МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске
Колледж института сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

Математика

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Специальность СПО

38.02.04 Коммерция (по отраслям)
Квалификация: Менеджер по продажам

Пятигорск 2019 г.

Методические указания для практических занятий по дисциплине «*Математика*» составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности: 38.02.04 Коммерция (по отраслям)

Рассмотрено на заседании ПЦК колледжа ИСТиД (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

Протокол № 9 от «08» апреля 2019 г.

Составитель ____________ И.Б. Иванова

Директор колледжа ИСТиД ____________ З.А. Михалина

Пояснительная записка

Методические рекомендации призваны оказывать помощь студентам в изучении основных понятий, идей, теорий и положений дисциплины «Математика», изучаемых в ходе конкретного занятия, способствовать развитию их умений, навыков и являются одним из способов проверки знаний студентов.

Выполнение учащимися практических работ направленно на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам;
- формирование умений применять полученные знания на практике и реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких профессиональных качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В результате изучения учебной дисциплины «Математика» обучающийся должен

АЛГЕБРА

уметь:

- выполнять арифметические действия над числами, сочетая устные и письменные приемы; находить приближенные значения величин и погрешности вычислений (абсолютная и относительная); сравнивать числовые выражения;
- находить значения корня, степени, логарифма, тригонометрических выражений на основе определения, используя при необходимости инструментальные средства; пользоваться приближенной оценкой при практических расчетах;
- выполнять преобразования выражений, применяя формулы, связанные со свойствами степеней, логарифмов, тригонометрических функций;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

  - для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства.

Функции и графики

уметь:

- вычислять значение функции по заданному значению аргумента при различных способах задания функции;

- определять основные свойства числовых функций, иллюстрировать их на графиках;
- строить графики изученных функций, иллюстрировать по графику свойства элементарных функций;
- использовать понятие функции для описания и анализа зависимостей величин;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

  -для описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков.

Начала математического анализа

уметь:

- находить производные элементарных функций;
- использовать производную для изучения свойств функций и построения графиков;
- применять производную для проведения приближенных вычислений, решать задачи прикладного характера на нахождение наибольшего и наименьшего значения;
- вычислять в простейших случаях площади и объемы с использованием определенного интеграла;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

  -решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшее и наименьшее значения на нахождения скорости и ускорения.

ГЕОМЕТРИЯ

уметь:

- распознавать на чертежах и моделях пространственные формы; соотносить трехмерные объекты с их описаниями, изображениями;
- описывать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, *аргументировать свои суждения об этом расположении*;
- анализировать в простейших случаях взаимное расположение объектов в пространстве;
- изображать основные многогранники и круглые тела; выполнять чертежи по условиям задач;
- *строить простейшие сечения куба, призмы, пирамиды*;
- решать планиметрические и простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов);
- использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- для исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойства фигур;
- вычисления объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **знать:**

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

При проведении практических работ учебная группа может делиться на подгруппы численностью не меньше 8 человек.
Каждая практическая работа составлена с ведущей дидактической целью - формирование практических умений.

Содержание практических работ нацелено и на развитие профессиональных умений и навыков. Выполнение расчётов, чертежей, инструктивными материалами, справочниками, умение пользоваться современными информационно-коммуникационными технологиями. Наряду, с формированием умений и навыков, в процессе выполнения практических работ обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

В данных методических указаниях в начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приводятся решения типовых примеров и задач. Даются упражнения для закрепления материала.

Практическое занятие №1

Тема: Целые и рациональные числа. Действительные числа. Действия над рациональными числами**.**

Цель: Обобщение и систематизация знаний, умений, навыков учащихся при выполнении арифметических действий над обыкновенными дробями

Теоретический блок

1. *Сложение.* Суммой дробей с одним и тем же знаменателем называют дробь, имеющую тот же знаменатель, а числитель равен сумме числителей данных дробей, т.е.

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$$

Это определение можно сформулировать также в виде следующего правила.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Пример. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$.

Чтобы сложить дроби с разными знаменателями, надо привести их к наименьшему общему знаменателю, а затем сложить полученные числители и под суммой подписать общий знаменатель.

Пример. $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15}{24}+\frac{14}{24}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$

Короче записывают так: $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$

Чтобы сложить смешанные числа, нужно отдельно найти сумму целых и сумму дробных частей. Действие записывается так:

$$4\frac{7}{15}+1\frac{11}{45}+8\frac{4}{9}=13\frac{21+11+20}{45}=13\frac{52}{45}=14\frac{7}{45}$$

2. *Вычитание.* Вычитание дробей можно определить как действие, обратное сложению дробей. Вычесть из одного дробного числа второе это значит найти третье число, которое в сумме со вторым дает первое. Из этого определения следует правило:

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть числитель вычитаемого из числителя уменьшаемого и оставить прежний знаменатель. Действие записывают так:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Чтобы вычесть дроби с разными знаменателями, нужно сначала привести их к наименьшему общему знаменателю, затем из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и под их разностью подписать общий знаменатель. Действие записывают так:

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}$$

Если нужно вычесть одно смешанное число из другого смешанного числа, то, если можно, вычитают дробь из дроби, а целое из целого. Действие записывают так:

$$8\frac{9}{11}-5\frac{3}{4}=3\frac{36-33}{44}=3\frac{9}{44}$$

Если же дробь вычитаемого больше дроби уменьшаемого, то берут одну единицу из целого числа уменьшаемого, раздробляют ее в надлежащие доли и прибавляют к дроби уменьшаемого, после чего поступают, как описано выше. Действие записывают так:

$$5\frac{4}{9}-1\frac{11}{12}=4\frac{16-33}{36}=3\frac{52-33}{36}=3\frac{19}{36}$$

Аналогично поступают, когда надо вычесть из целого числа дробное.

Пример. $3-2\frac{3}{5}=2\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

3. Распространение свойств сложения и вычитания на дробные числа. Все законы и свойства сложения и вычитания натуральных чисел справедливы и для дробных чисел. Их применение во многих случаях значительно упрощает процесс вычисления.

Пример 1. $$4\frac{3}{4}+1\frac{7}{9}+2\frac{5}{12}+5\frac{2}{9}+\frac{7}{12}+3\frac{1}{4}=\left(4\frac{3}{4}+3\frac{1}{4}\right)+\left(1\frac{7}{9}+5\frac{2}{9}\right)+\left(2\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\right)=8+7+3=18$$.

Здесь использованы переместительный и сочетательный законы сложения.

Пример 2. $$2\frac{7}{720}+\left(3\frac{31}{144}+\frac{53}{720}\right)=\left(2\frac{7}{720}+\frac{53}{720}\right)+3\frac{31}{144}=2\frac{6}{72}+3\frac{31}{144}=5\frac{12+31}{144}=5\frac{43}{144}$$.

Здесь использовано правило прибавления суммы к числу.

Пример 3. $43\frac{29}{36}-\left(15\frac{11}{36}-4\frac{1}{2}\right)=\left(43\frac{29}{36}-15\frac{11}{36}\right)+4\frac{1}{2}=28\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}=33$.

Пример 4. $17\frac{7}{8}-\left(2\frac{3}{5}+6\frac{7}{8}\right)=\left(17\frac{7}{8}-6\frac{7}{8}\right)-2\frac{3}{5}=11-2\frac{3}{5}=8\frac{2}{5}$.

Здесь использованы правила вычитания из числа разности и суммы.

4. Умножение. Умножение дроби на целое число можно понимать так же, как и умножение целого числа на целое, т.е. как сложение одинаковых слагаемых. Например,

$$\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}.$$

Но для умножения на дробь такое толкование не подходит. Например, умножая $\frac{3}{7}$ на $\frac{2}{3}$, нельзя сказать, что здесь " $\frac{3}{7}$ надо взять $\frac{2}{3}$ раза слагаемым".

Здесь необходимо дать новое определение.

Произведением дробей называют такую дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель - произведению их знаменателей, т.е. $\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}=\frac{a\cdot b}{m\cdot n}$, чтобы умножить дробь на дробь, нужно умножить числитель на числитель, а знаменатель на знаменатель и первое произведение сделать числителем, а второе - знаменателем: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

При умножении следует делать (если возможно) сокращение.

Пример. $\frac{12}{19}\cdot\frac{19}{30}=\frac{12\cdot 19}{19\cdot 30}=\frac{2}{5}$.

Если учесть, что целое число представляет собой дробь со знаменателем 1, то умножение дроби на целое число и целого числа на дробь можно выполнять поэтому же правилу.

Примеры. $\frac{2}{13}\cdot 7=\frac{2}{13}\cdot\frac{7}{1}=\frac{14}{13}=1\frac{1}{13}$;

$6\cdot\frac{5}{12}=\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{12}=\frac{30}{12}=2\frac{1}{2}$

5. Умножение смешанных чисел. Чтобы перемножить смешанные числа, нужно предварительно обратить их в неправильные дроби и потом перемножать по правилу умножения дробей.

Пример. $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{16}{5}=\frac{80}{10}=8$.

Если же перемножают смешанное число на целое, то проще множить отдельно целую часть и дробную часть.

Пример. $2\frac{3}{5}\cdot 3=6\frac{9}{5}=7\frac{4}{5}$

6. Распространение свойств умножения на дробные числа. Свойства умножения натуральных чисел справедливы и для дробей. Их использование упрощает устные и письменные вычисления.

Пример 1. $7\frac{2}{15}\cdot 30=\left(7+\frac{2}{15}\right)\cdot 30=210+4=214$.

Пример 2. $9\frac{7}{8}\cdot 8=9\cdot 8+\frac{7}{8}\cdot 8=72+7=79$.

Пример 3. $\frac{3}{4}\cdot\left(7\frac{9}{31}\cdot 1\frac{1}{3}3\right)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot 7\frac{9}{31}=1\cdot 7\frac{9}{31}=7\frac{9}{31}$.

Пример 4. $\left(12\frac{2}{5}\cdot 43\frac{5}{17}\right)\cdot\frac{5}{31}=\left(\frac{62}{5}\cdot\frac{5}{31}\right)\cdot 43\frac{5}{17}=2\cdot 43\frac{5}{17}=86\frac{10}{17}$.

7. Деление дробей. Для деления дробей сохраняется то же определение, что и для деления целых чисел: это - действие посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается второй сомножитель. Разделить одно число на второе - значит найти такое третье число, которое при умножении на второе дает первое. Выполняют деление дробей по следующему правилу.

Чтобы разделить дробь на дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первой на числитель второй и первое произведение записать числителем, а второе - знаменателем: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Пример. $\frac{6}{7}:\frac{9}{10}=\frac{6\cdot 10}{7\cdot 9}=\frac{60}{63}=\frac{20}{21}$.

По этому же правилу можно выполнять деление дроби на целое число и целого на дробь, если представить целое число в виде дроби со знаменателем 1.

Примеры.

$$15:\frac{5}{7}=\frac{15}{1}:\frac{5}{7}=\frac{15\cdot 7}{1\cdot 5}=\frac{21}{1}=21;$$

$$\frac{8}{13}:2=\frac{8}{13}:\frac{2}{1}=\frac{8\cdot 1}{13\cdot 2}=\frac{4}{13}$$

Однако в последнем примере проще числитель разделить на целое число:

$$\frac{8}{13}:2=\frac{8:2}{13}=\frac{4}{13}$$

8. Деление смешанных чисел. Чтобы выполнить деление смешанных чисел, их предварительно обращают в неправильные дроби и затем делят по правилу деления дробей.

Пример. $12\frac{3}{5}:1\frac{1}{20}=\frac{63}{5}:\frac{21}{10}=\frac{63\cdot 20}{5\cdot 21}=12$.

Однако при делении смешанного числа на целое бывает удобней делить отдельно целую часть и отдельно дробную часть смешанного числа.

Пример. $30\frac{5}{7}:5=6\frac{1}{7}$.

9. Замена деления умножением. Если в какой-нибудь дроби поменять местами числитель и знаменатель, получится новая дробь, обратная данной. Например, для дроби $\frac{8}{7}$ обратная дробь будет $\frac{7}{8}$.

Очевидно, что произведение двух взаимно обратных дробей равно 1.

$$\frac{8}{7}\cdot\frac{7}{8}=1.$$

Учитывая это, можно деление выполнять по следующему правилу.

Чтобы разделить одно число на другое, нужно делимое умножить на число, обратное делителю.

Пример 1. $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{11}{15}$.

Пример 2. $14:\frac{7}{8}=14\cdot\frac{8}{7}=\frac{14\cdot 8}{7}=16$

Пример 3. $\frac{4}{7}:5\frac{1}{3}=\frac{4}{7}:\frac{16}{3}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{16}=\frac{3}{28}$.

10. Примеры на все действия с обыкновенными дробями. Решение примеров на все действия с дробями выполняют с помощью записи по отдельным действиям или записи цепочкой.

Пример. Вычислить:

$$\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{21}+\frac{15}{28}:\frac{5}{84}}{5\frac{1}{2}+10}+\frac{2:\frac{1}{2}+3:\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}:2+\frac{1}{3}:3}\cdot\frac{1}{36}-\frac{16}{35}$$

Решение по частям.

$1)\ \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{21}=\frac{3\cdot5}{5\cdot21}=\frac{1}{7};$ $\quad 3)\ \frac{1}{7}+9=9\frac{1}{7};$

$2)\ \frac{15}{28}:\frac{5}{84}=\frac{15\cdot84}{28\cdot5}=9;$ $\quad 4)\ 5:\frac{1}{2}=10;$

$5)\ 10+10=20;$

$6)\ 9\frac{1}{7}:20=\frac{64}{7\cdot20}=\frac{16}{35};$ $\quad 11)\ \frac{1}{3}:3=\frac{1}{9};$

$7)\ 2:\frac{1}{2}=4;$ $\quad 12)\ \frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36};$

$8)\ 3:\frac{1}{3}=9;$ $\quad 13)\ 13:\frac{13}{36}=\frac{13\cdot36}{13}=36;$

$9)\ 4+9=13;$ $\quad 14)\ 36\cdot\frac{1}{36}=1;$

$10)\ \frac{1}{2}:2=\frac{1}{4};$ $\quad 15)\ \frac{16}{35}+1-\frac{16}{35}=1$

Ответ. 1.

Пример вычисления цепочкой:

$$\frac{\left(8\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right):3\frac{1}{2}}{\left(5-4\frac{2}{5}\right):10}+\frac{\left(3\frac{1}{8}-1\frac{7}{8}\right)\cdot 1\frac{7}{8}}{\left(2-1\frac{3}{8}\right):3\frac{1}{8}}=\frac{7\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}:10}+\frac{1\frac{1}{4}\cdot 1\frac{3}{5}}{\frac{5}{8}:3\frac{1}{8}}=$$

$$=\frac{\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{10}}+\frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{5}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{25}}=\frac{\frac{15}{7}}{\frac{3}{50}}\cdot\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{5}}+2\cdot 5=\frac{250}{7}+10=$$

$$35\frac{5}{7}+10=45\frac{5}{7}$$

Решение задач

1. Вода занимает $\frac{2}{3}$ поверхности Земли. Поэтому Землю называют «голубой планетой». Какую часть земной поверхности занимает суша? Ответ: $\frac{1}{3}$ суша.

2. Отцу 42 года, а возраст сына составляет $\frac{2}{7}$ возраста отца. Сколько лет сыну? Ответ: 12 лет.

3. Предельный возраст белки 6 лет, что составляет $\frac{3}{5}$ предельного возраста зайца. Сколько лет может прожить заяц? Ответ: 10 лет.

4. Длина стороны квадрата $\frac{5}{9}$ дм. Какова его площадь? Ответ: $\frac{25}{81}$ дм^2.

5.Рабочий может выполнить производственное задание за 5 часов, а его ученик – за 8 часов. Какую часть работы они выполнят вместе после часа работы? Ответ: $\frac{13}{40}$ ч.

6. В первый час автобус прошел $\frac{2}{5}$ всего пути, во второй $\frac{1}{3}$ пути, а в третий – остальные 28 км. Какое расстояние прошел автобус за три часа?

1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$ (ч) – за два часа.

2) $1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$ (ч) – прошел в третий час. 4

3) $28:\frac{4}{15}=105$ (км) – за три часа.

Ответ: 105 км прошел автобус за три часа.

Домашнее задание:

1. Какое расстояние улитка за $\frac{5}{6}$ часа, если она будет ползти со скоростью $\frac{3}{250}$ км/ч?

Ответ: $\frac{1}{100}$ км.

2. Из бочки с бензином вначале отлили $\frac{9}{28}$ всего имеющегося там бензина, потом $\frac{2}{7}$ всего бензина и после этого в бочке осталось 99 литров бензина. Сколько литров бензина было в бочке первоначально?

1) $\frac{9}{28}$ + $\frac{2}{7}$ = $\frac{17}{28}$ (ч) – отлили.

2) 1 – $\frac{17}{28}$ = $\frac{11}{28}$ (ч) – осталось.

3) 99 : $\frac{11}{28}$ = 252 (л) – было первоначально.

Ответ: 252 л бензина было в бочке первоначально.

Практическое занятие № 2

Тема: «Решение линейных уравнений и неравенств»

Цель: Обобщить и систематизировать знания, умения учащихся при решении линейных уравнений и неравенств

Теоретический блок

Линейные уравнения

Линейным уравнением относительно переменной x называется уравнение первой степени $kx + b = 0$ (1)

где k и b – произвольные вещественные числа.

В случае $k \neq 0$ уравнение (1) имеет единственное решение при любом значении b :

$$x = -\frac{b}{k}$$

В случае, когда $k = 0, b \neq 0$ уравнение (1) решений не имеет.

В случае, когда k = 0, b = 0, решением уравнения (1) является любое число

$x \in (-\infty; +\infty)$. Если изначально задано уравнение, содержащее переменную в знаменателе, то перед решением необходимо указать область определения, исключить из ответа корни, при которых выражение не имеет смысла.

Пример 1

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = 2$$

Пример 2

$$3x = -2$$

$$x = \frac{-2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Пример 3

$$8(x-1)+2x = 2(4-2x)$$

$$8x-8+2x = 8-4x$$

$$8x+2x+4x = 8+8$$

$$8x+2x+4x = 8+8$$

$$14x = 16$$

$$x = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

Пример 4

$$\frac{5x+15}{x+4} = 4$$

$D:\ \ x \neq -4$

$$\frac{5x+15}{x+4} \cdot (x+4) = 4 \cdot (x+4)$$

$$5x+15 = 4x+16$$

$$x = -1$$

Ответ: $x = -1$

Пример 5

$$\frac{5x+15}{x+3} = 4$$

$D:\ \ x \neq -3$

$$\frac{5x+15}{x+4} \cdot (x+3) = 4 \cdot (x+3)$$

$$5x+15 = 4x+12$$

$$x = -3$$

Ответ: *нет корней*

Линейные неравенства

Линейным неравенством относительно переменной x называется неравенство, принадлежащее к одному из следующих типов:

$kx + b \geq 0,$
$kx + b > 0,$
$kx + b < 0,$
$kx + b \leq 0,$
где k и b – произвольные вещественные числа.

Решая линейные, да и не только линейные, неравенства, следует помнить, что при умножении или делении неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется, а при умножении или делении неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

В соответствии с этим решение линейных неравенств, в зависимости от значений коэффициентов k и b, представлено в следующей Таблице 1.

Таблица 1. – Решение неравенств первой степени

	$kx + b \geq 0$	$kx + b > 0$	$kx + b \leq 0$	$kx + b < 0$
$k > 0$	Знак неравенства сохраняется			
	$x \geq -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$	$x \leq -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$
$k = 0,\ b < 0$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x \in (-\infty; +\infty).$	$x \in (-\infty; +\infty).$
$k = 0,\ b = 0$	$x \in (-\infty; +\infty).$	$\varnothing$	$x \in (-\infty; +\infty).$	$\varnothing$
$k = 0,\ b > 0$	$x \in (-\infty; +\infty).$	$x \in (-\infty; +\infty).$	$\varnothing$	$\varnothing$
$k < 0$	Знак неравенства меняется на противоположный			
	$x \leq -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$	$x \geq -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$

Системы линейных неравенств

Рассмотрим решение систем линейных неравенств на примерах.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x-3\ge 0, \\ -3x+11>0 \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} 2x-3\ge 0, \\ -3x+11>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\ge 3, \\ -3x>-11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \frac{3}{2}, \\ x<\frac{11}{3}. \end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (Рис. 1) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера.

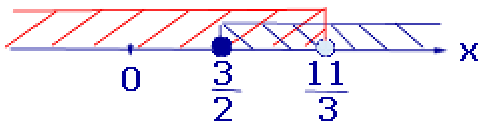


Рис.1

Ответ: $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{11}{3}\right)$

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x+4<0, \\ -2x-7\ge 0. \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} 5x+4<0, \\ -2x-7\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x<-4, \\ -2x\ge 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\frac{4}{5}, \\ x\le -\frac{7}{2}. \end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (Рис. 2) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера.

Изобразив на одной координатной прямой (Рис. 1) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера.

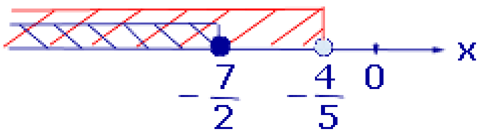


Рис.2

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right]$

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 6x - 7 > 0, \\ 4x + 13 < 0. \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} 6x - 7 > 0, \\ 4x + 13 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x > 7, \\ 4x < -13, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{6}, \\ x < -\frac{13}{4}. \end{cases}$$

Изобразив на одной координатной прямой (Рис. 3) оба точечных множества, составляющих последнюю систему, получаем ответ примера

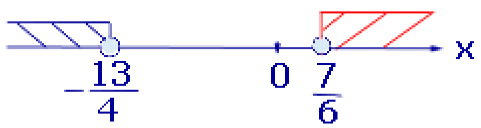


Рис.3

Ответ: $\varnothing$

Решить данные системы неравенств (№ 179 —184):

179. $\begin{cases} 2x - 1 > 1, \\ 3 - x > 0. \end{cases}$

180. $\begin{cases} 1 - 2x < -9, \\ 3x + 1 < 13. \end{cases}$

181. $\begin{cases} 5x + 3 > 8, \\ 0{,}7 - 3x \leqslant -2{,}6. \end{cases}$

182. $\begin{cases} 2x - 3 > x - 3, \\ 4x + 3 > 8 - x. \end{cases}$

183. $\begin{cases} 3x + 7 \geqslant 9 + 2x, \\ 5 + x > 2x + 2. \end{cases}$

184. $\begin{cases} x + 4 < 2x, \\ 1 - x > -2. \end{cases}$

Домашнее задание:

$(2\boldsymbol{x} + 3)(2 - 2\boldsymbol{x}) > 0.$

$(2 - \boldsymbol{\pi})(2\boldsymbol{x} - 15)(\boldsymbol{x} + 4) > 0.$

$$(3x-4)(5x+6) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-4>0, \\ 5x+6>0; \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-4<0, \\ 5x+6<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x>4, \\ 5x>-6; \end{cases} \\ \begin{cases} 3x<4, \\ 5x<-6; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>\frac{4}{3}, \\ x>-\frac{6}{5}; \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{4}{3}, \\ x<-\frac{6}{5}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{4}{3}, \\ x<-\frac{6}{5}. \end{array}\right.$$

Практическое занятие № 3

Тема: Решение квадратичных уравнений и систем уравнений

Цель: Обобщить и систематизировать знания учащихся по данной теме.

Теоретический блок

Определение

Квадратное уравнение — это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты a, b и c — произвольные числа, причем а ≠ 0.

Прежде, чем изучать конкретные методы решения, заметим, что все квадратные уравнения можно условно разделить на три класса:

Не имеют корней;

Имеют ровно один корень;

Имеют два различных корня.

Дискриминант

Определение

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Тогда *дискриминант* — это просто число $D = b^2 - 4ac$.

Эту формулу надо знать наизусть. Откуда она берется — сейчас неважно. Важно другое: по знаку дискриминанта можно определить, сколько корней имеет квадратное уравнение. А именно:

Если $D < 0$, корней нет;

Если $D = 0$, есть ровно один корень;

Если $D > 0$, корней будет два.

Обратите внимание: дискриминант указывает на количество корней, а вовсе не на их знаки, как почему-то многие считают. Взгляните на примеры — и сами все поймете:

Задача

Сколько корней имеют квадратные уравнения:

$x^2 - 8x + 12 = 0$;

$5x^2 + 3x + 7 = 0$;

$x^2 - 6x + 9 = 0$.

Решение

Выпишем коэффициенты для первого уравнения и найдем дискриминант:
$a = 1$, $b = -8$, $c = 12$;
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 64 - 48 = 16$

Итак, дискриминант положительный, поэтому уравнение имеет два различных корня. Аналогично разбираем второе уравнение:
$a = 5$; $b = 3$; $c = 7$;
$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 9 - 140 = -131$.

Дискриминант отрицательный, корней нет. Осталось последнее уравнение:
$a = 1$; $b = -6$; $c = 9$;
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$.

Дискриминант равен нулю — корень будет один.

Ответ

1) 2 корня; 2) нет корней; 3) один корень.

Корни квадратного уравнения

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Когда $D = 0$, можно использовать любую из этих формул — получится одно и то же число, которое и будет ответом. Наконец, если $D < 0$, корней нет — ничего считать не надо.

Задача

Решить квадратные уравнения:

$x^2 - 2x - 3 = 0$;

$15 - 2x - x^2 = 0$;

$x^2 + 12x + 36 = 0$.

Решение

Первое уравнение:
$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow a = 1; b = -2; c = -3;$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16.$

$D > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет два корня. Найдем их:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 3; \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -1$$

Второе уравнение:
$15 - 2x - x^2 = 0 \Rightarrow a = -1; b = -2; c = 15;$
$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 15 = 64.$

$D > 0 \Rightarrow$ уравнение снова имеет два корня. Найдем их:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2 \cdot (-1)} = -5; \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2 \cdot (-1)} = 3$$

Наконец, третье уравнение:
$x^2 + 12x + 36 = 0 \Rightarrow \mathrm{a} = 1; \mathrm{b} = 12; \mathrm{c} = 36;$
$\mathrm{D} = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0.$

$\mathrm{D} = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет один корень. Можно использовать любую формулу. Например, первую:

$$x = \frac{-12 + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -6$$

Ответ

1) $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; 2) $x_1 = -5$; $x_2 = 3$; 3) $x = -6$.

Неполные квадратные уравнения

Бывает, что квадратное уравнение несколько отличается от того, что дано в определении. Например:

$x^2 + 9x = 0$;

$x^2 - 16 = 0$.

Несложно заметить, что в этих уравнениях отсутствует одно из слагаемых. Такие квадратные уравнения решаются даже легче, чем стандартные: в них даже не потребуется считать дискриминант.

Определение

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *неполным квадратным уравнением*, если $b = 0$ или $c = 0$, т.е. коэффициент при переменной x или свободный элемент равен нулю.

Разумеется, возможен совсем тяжелый случай, когда оба этих коэффициента равны нулю: $b = c = 0$. В этом случае уравнение принимает вид $ax^2 = 0$. Очевидно, такое уравнение имеет единственный корень: $x = 0$.

Рассмотрим остальные случаи. Пусть $b = 0$, тогда получим неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$. Немного преобразуем его:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Поскольку арифметический квадратный корень существует только из неотрицательного числа, последнее равенство имеет смысл исключительно при $(-c/a) \geq 0$. Вывод:

Если в неполном квадратном уравнении вида $ax^2 + c = 0$ выполнено неравенство $(-c/a) \geq 0$, корней будет два. Формула дана выше;

Если же $(-c/a) < 0$, корней нет.

Как видите, дискриминант не потребовался — в неполных квадратных уравнениях вообще нет сложных вычислений. На самом деле даже необязательно помнить неравенство $(-c/a) \geq 0$. Достаточно выразить величину x^2 и посмотреть, что стоит с другой стороны от знака равенства. Если там положительное число — корней будет два. Если отрицательное — корней не будет вообще.

Теперь разберемся с уравнениями вида $ax^2 + bx = 0$, в которых свободный элемент равен нулю. Тут все просто: корней всегда будет два. Достаточно разложить многочлен на множители:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Отсюда находятся корни. В заключение разберем несколько таких уравнений:

Задача

Решить квадратные уравнения:

$x^2 - 7x = 0$;
$5x^2 + 30 = 0$;
$4x^2 - 9 = 0$.
Решение

$x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 7) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -(-7)/1 = 7$.

$5x^2 + 30 = 0 \Rightarrow 5x^2 = -30 \Rightarrow x^2 = -6$. Корней нет, т.к. квадрат не может быть равен отрицательному числу.
$4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9/4 \Rightarrow x_1 = 3/2 = 1{,}5$; $x_2 = -1{,}5$.

Ответ

$x_1 = 0$; $x_2 = 7$; 2) корней нет; 3) $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}5$.

Решение квадратичных систем уравнений

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$

Решение. Выразив x из первого уравнения системы и подставив во второе, получим равносильную систему $\begin{cases} x = y + 1, \\ 2y^2 + 2y - 40 = 0. \end{cases}$ ……………………………………(1)

Решая второе уравнение системы (1), находим два значения переменной y: $y_1 = 4, y_2 = -5$, подставляя эти значения в первое уравнение системы (1), получаем два значения переменной x: $x_1 = 5, x_2 = -4$.
Ответ: (5; 4),(-4; -5).

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y - xy = 4 \\ 3x + y + 3xy = 3 \end{cases}$

Решение. Сразу выразить одну переменную через другую в данном случае затруднительно, мешает слагаемое xy. Чтобы избавиться от этого слагаемого умножим первое уравнение системы на 3 и сложим со вторым уравнением. При этом получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y - xy = 4, \\ 9x - 8y = 15. \end{cases}$ ……………..(2)

Из второго уравнения получаем: $x = \dfrac{15 + 8y}{9}$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (2) получим уравнение $2\dfrac{15 + 8x}{9} - 3y - y\dfrac{15 + 8y}{9} = 4$. Преобразовав его, получим квадратное уравнение относительно y: $4y^2 + 13y + 3 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = -3, y_2 = -\dfrac{1}{4}$, подставим в формулу для x, и получим $x_1 = -1, x_2 = \dfrac{13}{9}$.
Ответ: (-1; -3),(13/9; -1/4).

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2(x+y)=80, \\ x^2(2x-3y)=80. \end{cases}$

Решение. В левых частях уравнений системы стоят произведения двух сомножителей, а справа число отличное от нуля, поэтому, очевидно, ни один из сомножителей левых частей уравнений не может быть равен нулю. Таким образом, получаем, что $x \neq 0$ и $2x-3y \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2}y$. Разделим первое уравнение системы на второе почленно, в силу сделанного выше замечания, получим равносильную систему $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2x-3y}=1, \\ x^2(x+y)=80. \end{cases}$. Выразим из первого уравнения полученной системы выразим х: $x=4y$. Подставим это значение во второе уравнение системы и найдем $y=1$, тогда $x=4$. Ответ: (4; 1).

Домашнее задание: Решите уравнения:

1. $x^4-8x^2-9=0$
2. $x^8-15x^4-16=0$
3. $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-3)-4=0$

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} xy=2, \\ 9x^2+y^2=13. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y=2 \\ y^2+x=2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2, \\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x+y}=7 \end{cases}$

Практическое занятие №4

Тема: Решение квадратичных неравенств

Цель: Обобщить и систематизировать знания и умения учащихся по данной теме

Теоретический блок

Квадратное неравенство – это неравенство, в левой части которого стоит квадратный трехчлен, в левой – нуль.

То есть, квадратные неравенства бывают следующих видов:

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Решить квадратное уравнение можно с помощью метода интервалов.

Для этого необходимо сначала найти корни квадратного неравенства (вместо знака неравенства поставить «=» и решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$). Корней может быть либо два, либо один, либо не быть вообще. Дальнейшие действия зависят от количества корней:

1. Если уравнение имеет два корня, необходимо нанести их на числовую прямую. Они разобьют ее на три промежутка. Нужно будет определить знаки выражения $ax^2 + bx + c$ на каждом из промежутков (конкретный пример решения вы можете посмотреть, введя в форму выше какое-либо неравенство, например $5x^2 + 2x - 7 \geq 0$):

- если $a > 0$, то знаки будут +, –, + (слева направо);
- если $a < 0$, то знаки будут –, +, – (слева направо).

В случае, если знак неравенства > или ≥, ответом будут промежутки со знаком «+». Если же знак < или ≤, то ответом будут отрицательные промежутки.

Если знак неравенства > или <, то точки-границы промежутков записываются в круглых скобках. Если же знак ≥ или ≤, то границы промежутков записываются в квадратных скобках.

2. Если уравнение имеет один корень, то нужно также нанести его на числовую прямую и определить знаки выражения $ax^2 + bx + c$ на каждом из промежутков. Корень разделит прямую на два промежутка, знаки в которых будут одинаковыми (в зависимости от коэффициента a):

- если $a > 0$, то знаки будут +, +. В этом случае, если знак неравенства >, то ответом будет вся числовая прямая, кроме точки-границы промежутка. Если же знак неравенства ≥, то ответ – вся числовая прямая. Если знак неравенства <, то ответ – пустое множество. Если знак неравенства ≤, то ответ – одна точка – граница между промежутками.
- если $a < 0$, то знаки будут –, –. В этом случае, если знак неравенства >, то ответом будет пустое множество. Если же знак неравенства ≥, то ответ – одна точка – граница промежутка. Если знак неравенства <, то ответ – вся числовая прямая, кроме точки-границы промежутка. Если знак неравенства ≤, то ответ – вся числовая прямая.

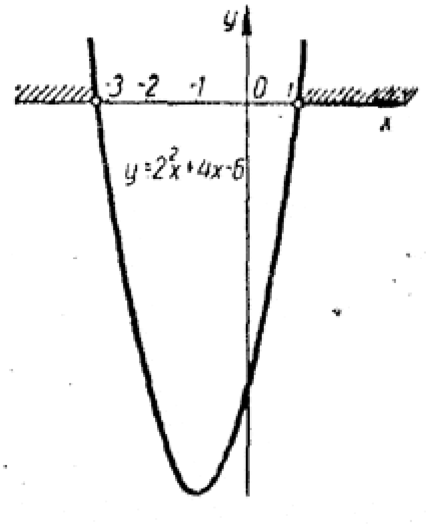
3. Если уравнение корней не имеет, то ничего на координатную ось и не нужно наносить: надо просто определить знак выражения $ax^2 + bx + c$ на всей числовой прямой:

- если $a > 0$, то знак будет +. В этом случае: если знак неравенства > или ≥, то ответом будет вся числовая прямая. В противном случае – если знак < или ≤ – ответом будет пустое множество.

- если $a < 0$, то знак будет –. В этом случае: если знак неравенства < или ≤, то ответом будет вся числовая прямая. В противном случае – если знак > или ≥ – ответом будет пустое множество.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + 4x - 6 > 0$.

Квадратный трехчлен $2x^2 + 4x - 6$ имеет два действительных корня $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Поэтому парабола $y = 2x^2 + 4x - 6$ пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны —3 и 1. Поскольку коэффициент при x^2 больше нуля, парабола $y = 2x^2 + 4x - 6$ направлена вверх



Из рисунка видно, что трехчлен $2x^2 + 4x - 6$ положителен при $x < -3$ и при $x > 1$.

Пример 2. Решить неравенство

$$-x^2 + x - 1 > 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена $-x^2 + x - 1$ отрицателен: D = —3. Поэтому при всех x значения функции $y = -x^2 + x - 1$ имеют один и тот же знак, а именно знак коэффициента при x^2, то есть минус. Следовательно, неравенство $-x^2 + x - 1 > 0$ не выполняется ни при каких значениях x.

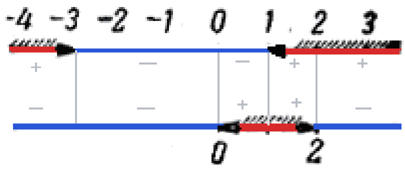
Пример 3. Выяснить, при каких значениях x дробь

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{2x - x^2}$$

положительна и при каких — отрицательна.

Сначала указанным выше способом определим знаки числителя и знаменателя данной дроби, а затем сравним их.

Числитель $x^2 + 2x^2$ — 3 положителен при $x <$ —3 и при $x > 1$, а отрицателен при —3 < x < 1 (рис. верхняя числовая ось).



Знаменатель $2x - x^2$ положителен при $0 < x < 2$ и отрицателен при $x < 0$ и при $x > 2$ (рис. , нижняя числовая ось). Из рисунка видно, что данная дробь будет положительна при — 3 < x < 0 (в этом случае числитель и знаменатель отрицательны) и при 1< x <2 (в этом случае числитель и знаменатель положительны); отрицательной она будет при x <. —3 (числитель положителен, знаменатель отрицателен), при $0 < x < 1$ (числитель отрицателен, знаменатель положителен) и при $x > 2$ (числитель положителен, знаменатель отрицателен).

Упражнения

Решить данные неравенства

1. $x^2 - 4x + 3 > 0$. 5. $x^2 + x + 1 < 0$.

2. $x^2 - 6x + 5 < 0$. 6. $x^2 - x + 1 > 0$.

3. $-5x^2 + 3x + 2 > 0$. 7. $x^2 - 6x + 10 < 0$.

4. $x(1 - x) > 0$. 8. $-3x^2 + 2x + 1 > 0$.

Домашнее задание:
1. Решить неравенство:
$8x^2 - 6x + 1 > 0$
2. Найти наименьшее положительное целое решение нtравенства:
$-x^2 + 2x \geq -3$
3. Решить неравенство:
$x^2 + 3x + 8 \geq 0$
4. Решить неравенство:
$x^2 - 4x + 4 > 0$

5. Решить неравенство:
$x^2 - 4x + 4 \geq 0$
6. Найти все значения х, не являющиеся решением неравенства:
$x^2 \geq 16$

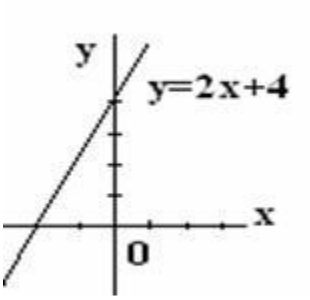
Практическое занятие №5

Тема: Функции: линейная, обратная пропорциональность. Построение квадратичной функции
Цель: Закрепить у учащихся знания и умения построения графиков функций
Теоретический блок

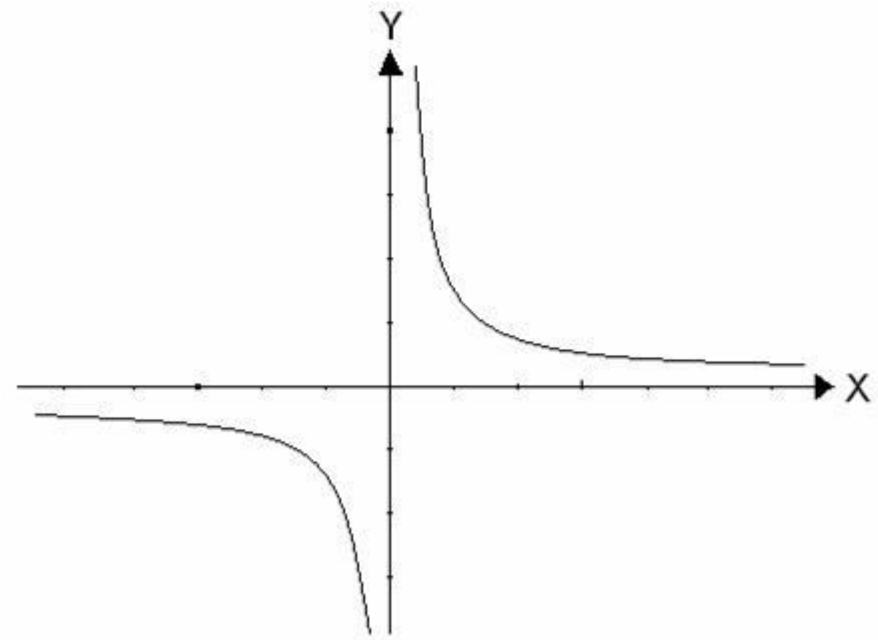
Свойства линейной функции $y = kx + b$.

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел.
2. Область изменения функции при условии, что $k \neq 0$ – множество всех действительных чисел. Если $k = 0$, то множество значений функции состоит из одной точки b.
3. При $k \neq 0,\ b \neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной. Если $k = 0$ (b любое) – функция четная. Если $b = 0$ (k любое) функция нечетная.
4. При $k > 0$ функция возрастает при любых x. При $k < 0$ функция убывает при любых x. При $k = 0$ функция постоянна.

Пример. Построить график функции $y = 2x + 4$.
Решение. Графиком является прямая линия. Для её построения достаточно найти точки пересечения с осями координат: при $x = 0, y = 4$ и при $x = -2, y = 0$. Таким образом, прямая проходит через точки $A(0;4)$ и $B(-2;0)$



Функция вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d – постоянные числа, причем $c \neq 0$, $ad \neq bc$, называется ***дробно-линейной функцией***. Функция определена всюду, кроме значения $x = -\dfrac{d}{c}$. Если $a = 0$, $c = 1$, $d = 0$, то получим частный случай дробно-линейной функции $y = \dfrac{b}{x}$. Область определения такой функции $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Графиком функции $y = \dfrac{b}{x}$ является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется ***гиперболой***. Если $b > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях; если же $b < 0$, то во II и IV координатных четвертях. Гипербола не имеет общих точек с осями координат, а лишь сколько угодно близко к ним приближается. Функция $y = \dfrac{b}{x}$ нечетная. На рисунке изображен график гиперболы $y = \dfrac{b}{x}$ для случая $b > 0$.



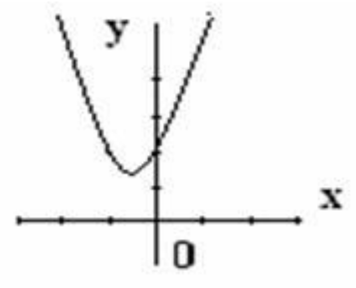
Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где y, x – переменные, a, b, c – заданные числа, $a \neq 0$, называется ***квадратичной функцией***. Областью определения квадратичной функции является множество действительных чисел. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является ***парабола***. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз. Осью симметрии параболы является прямая $x = -\frac{b}{2a}$. Координаты вершины параболы определяются по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Для построения параболы удобно выбрать следующие три точки:

а) точку пересечения параболы с осью Oy, при $x = 0$ получим $y = c$, таким образом, первая точка $C(0, c)$;
б) точку на параболе при $y = c$, то есть либо точку с абсциссой $x = 0$ (точка C), либо точку с абсциссой $x = -\frac{b}{a}$, таким образом, вторая точка $B\left(\frac{-b}{a}; c\right)$.

в) вершину параболы точку $A(x_0, y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.
Можно также в качестве основных точек выбрать точки пересечения параболы с осью Ox, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, если такие существуют, то есть дискриминант квадратного трехчлена неотрицательный.

Пример. Построить график функции $y = 2x^2 + 2x + 2$.
Отметим три точки $C(0;2), B(-1;2), A(-0{,}5;1{,}5)$. Ветви параболы направлены вверх $(a > 0)$. Парабола симметрична относительно прямой $x = -0{,}5$



1. Постройте графики функций:

1.$y = 3x + 4$

2.$y = \frac{1}{2}x - 1$

3.$y = 5 - 4x$

4.$2y - 4x = 6$

5.$3x + 4y = 2$

6.$y = \frac{3}{x}$

6.$y = \frac{2}{x}$

7.$y = \frac{1}{x}$

8.$y = -\frac{2}{x} + 2$

9.$y = 4 + \frac{2}{x}$

2. Постройте графики квадратичной функции:

1. $y = x^2 - 4x + 3$.

5. $y = x^2 + x + 1$.

2. $y = x^2 - 6x + 5$.

6. $y = x^2 - x + 1$.

3. $y = -5x^2 + 3x + 2$.

7. $y = x^2 - 6x + 10$.

4. $y = x(1 - x)$.

8. $y = -3x^2 + 2x + 1$.

Домашнее задание:

Постройте графики функций:

1. $y = 4x - 5$

2. $y = 3 - \frac{2}{3}x$

3. $y = 2 - \frac{1}{x}$

3

Постройте графики квадратичной функции:

1. $y=8x^2 - 6x + 1$

2. $y= -x^2 + 2x +3$

3. $y=x^2 + 3x + 8$

4. $y= x^2 - 4x + 4$

5. $y= x^2 - 4x + 4$

Практическое занятие №6

Тема: Контрольная работа по теме: «Развития понятия о числе»
Цель: Проверить уровень усвоения данного материала по теме «Развития понятия о числе»

1 Вариант

1.Решите линейное уравнение:

а) $3x - \frac{x+2}{4} - \frac{3x-2}{2} + \frac{x-1}{3} = 1$ б) $1 - \frac{6-2x}{3} = x - \frac{x+3}{2}$

2. Решите систему линейных неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{4x-3}{6} + 3 \succ \frac{3x}{2} + \frac{5}{8}, \\ \frac{4x-3}{8} + \frac{x-5}{5} \succ \frac{x-1}{2} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3-2x}{4} \geq \frac{5-2x}{8}, \\ \frac{4x-15}{3} \succ -4\frac{2}{3} \end{cases}$

3.Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 2y = 7, \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3} - \frac{3x-2}{4} = x + y, \\ 5x - 4y = -18 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ 2y - x = 1 \end{cases}$

4.Решите квадратное уравнение:

а) $x^2 - x = 0$ б) $\frac{5x^2+9}{6} + \frac{4x^2-9}{5} = 3$ в) $x^2 + 9x + 20 = 0$ г) $x^2 - 5 = 0$

д) $\frac{x(2x-3)}{2} + \frac{(3x-1)^2}{5} - \frac{(x+3)^2}{5} = 1$

5. Решите квадратичное неравенство:

а) $x^2 - 8x - 20 \leq 0$ б) $-x^2 - 6x + 27 \prec 0$ в) $2x^2 - 13x + 20 \succ 0$

6. Решите графически уравнение: $x + 1 = (x-1)^2$

2 Вариант

1.Решите линейное уравнение:

а) $x+\frac{x-3}{8}+\frac{x+1}{4}=2x+\frac{5-3x}{2}$ б) $4-\frac{6-2x}{3}+x=2x-\frac{x+3}{2}$

2.Решите систему линейных неравенств:

а) $\begin{cases} 5x-3\succ 1+x, \\ \frac{1}{2}-3x\prec\frac{2}{3}x-5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{7-6x}{2}+10\le\frac{8x+1}{3}-12, \\ \frac{x+1}{2}\succ 2x-2\frac{1}{2} \end{cases}$

3.Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 5x-y=7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x-6}{3}-\frac{x-2}{2}=2y, \\ \frac{3x-6}{2}+\frac{y}{2}=x \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{3}, \\ x-2y=2 \end{cases}$

4.Решите квадратное уравнение:

а) $x^2-2=0$ *б)* $3x^2+6x=8x^2-9x$ в) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12}=10$ г) $2x^2-3x+8=0$

д) $\frac{x(x-7)}{3}+\frac{x-4}{3}-\frac{11x}{10}=1$

5. Решите квадратичное неравенство:

а) $2x^2-x+4\prec 0$ б) $-3x^2+5x+2\ge 0$ в) $2x^2-4x+13\succ 0$

6. Решите графически уравнение: $\frac{2}{x}=3x-1$.

Практическое занятие №7

Тема: Основные тригонометрические тождества
Цель: Научить использовать основные тригонометрические тождества при преобразовании выражений
Теоретический блок

Теорема

Основное тригонометрическое тождество. Для любого угла α верно утверждение:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Следствие

Для любого угла α можно переписать основное тригонометрическое тождество следующим образом:

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad \mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Эти уравнения легко выводятся из основного тождества — достаточно разделить обе стороны на $\cos^2\alpha$ (для получения тангенса) или на $\sin^2\alpha$(для котангенса).

Решение упражнений

1.Найдите $\sin\alpha$, если известно следующее:

$$\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{10};\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$$

Решение

Нам известен косинус, но неизвестен синус. Основное тригонометрическое тождество (в «чистом» виде) связывает как раз эти функции, поэтому будем работать с ним. Имеем:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + 99/100 = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1/100 \Rightarrow \sin\alpha = \pm 1/10 = \pm 0{,}1$.

Для решения задачи осталось найти знак синуса. Поскольку угол $\alpha \in (\pi/2;\ \pi)$,то в градусной мере это записывается так: $\alpha \in (90°;\ 180°)$.

Следовательно, угол α лежит во II координатной четверти — все синусы там положительны. Поэтому $\sin\alpha = 0{,}1$.

Ответ: 0,1

2.Найдите $\cos\alpha$, если известно следующее:

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ \alpha \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$$

Решение

Итак, нам известен синус, а надо найти косинус. Обе эти функции есть в основном тригонометрическом тождестве. Подставляем:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 3/4 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1/4 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 1/2 = \pm 0{,}5$.

Осталось разобраться со знаком перед дробью. Что выбрать: плюс или минус? По условию, угол α принадлежит промежутку (π $3\pi/2$). Переведем углы из радианной меры в градусную — получим: $\alpha \in (180°;\ 270°)$. Очевидно, это III координатная четверть, где все косинусы отрицательны. Поэтому $\cos\alpha = -0{,}5$.

Ответ:−0,5

3.Найдите tg α, если известно следующее:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}};\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

Решение

Тангенс и косинус связаны уравнением, следующим из основного тригонометрического тождества:

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\,\alpha = 10 - 1 = 9$$

Получаем: tg $\alpha = \pm 3$. Знак тангенса определяем по углу α. Известно,что $\alpha \in (3\pi/2; 2\pi)$. Переведем углы из радианной меры в градусную — получим $\alpha \in (270°; 360°)$. Очевидно, это IV координатная четверть, где все тангенсы отрицательны. Поэтому tg $\alpha = -3$.

Отве: −3

4.Найдите cos α, если известно следующее:

$$\sin\alpha = -0{,}8;\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

Решение

Снова известен синус и неизвестен косинус. Запишем основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}64 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 0{,}6$.

Знак определяем по углу. Имеем: $\alpha \in (3\pi/2; 2\pi)$. Переведем углы из градусной меры в радианную: $\alpha \in (270°; 360°)$ — это IV координатная четверть, косинусы там положительны. Следовательно, $\cos\alpha = 0{,}6$.

Ответ:0,6

5.Найдите sin α, если известно следующее:

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = 2\sqrt{6};\ \ \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Решение:

Запишем формулу, которая следует из основного тригонометрического тождества и напрямую связывает синус и котангенс:

$$\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = 24 + 1 = 25$$

Отсюда получаем, что $\sin^2\alpha = 1/25$, т.е. $\sin\alpha = \pm 1/5 = \pm 0{,}2$. Известно, что угол $\alpha \in (0; \pi/2)$. В градусной мере это записывается так: $\alpha \in (0°; 90°)$ —I координатная четверть.

Итак, угол находится в I координатной четверти — все тригонометрические функции там положительны, поэтому sin α = 0,2.

Ответ: 0,2

3π

7.Найдите $sin\alpha$ и $tg\alpha$, если $cos\alpha = \frac{5}{13}$ и

8.Найдите $cos\alpha$ и $tg\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{1}$ и

Домашнее задание:

1.Найдите $sin\alpha$ и $tg\alpha$, если $cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и

2.Найдите $cos\alpha$ и $tg\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

3.Найдите $cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если $tg\alpha = -1$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Практическое занятие № 8

Тема: Применение основных тригонометрических тождеств к преобразованию выражений
Цель: Научить использовать основные тригонометрические тождества при преобразовании выражений

Теоретический блок

– формулы для $tg\alpha, ctg\alpha$;
– основное тригонометрическое тождество;
– формула, выражающая зависимость $tg\alpha$ и $\cos\alpha$;
– формула, выражающая зависимость $ctg\alpha$ и $\sin\alpha$.

Упростить выражения (устно)

$1-\cos^2\alpha$
$2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$
$\cos\alpha \bullet tg\alpha$
$\sin^2\alpha+tg^2\alpha+\cos^2\alpha$
$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$
$\sin^4\beta-\cos^4\beta$

Решение упражнений

Упростить выражение:

1. $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\bullet ctg^2\alpha$

Решение:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)\bullet ctg^2\alpha=\left(1+tg^2\alpha-1\right)\bullet ctg^2\alpha=1$$

2. $tg\alpha\bullet ctg\alpha-\left(tg\alpha\bullet\cos\alpha\right)^2$

Решение:

$$tg\alpha\bullet ctg\alpha-\left(tg\alpha\bullet\cos\alpha\right)^2=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$$

3. $\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$

Решение:

$$\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}=\frac{1-\sin^2\beta-\cos^2\beta}{\cos\beta(1+\sin\beta)}=0$$

? Какие знания мы применяли для решения данных выражений?

Выполняя упрощение выражений использовали тригонометрические тождества и формулы сокращенного умножения.

Доказать тождество:

В чем отличие тождества от формулы?

Тождество – равенство двух аналитических выражений, справедливых для любых допустимых значений входящих в него букв.

Формула – комбинация математических знаков и букв, выражающая какое-либо предложение

1. $\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\bullet tg\alpha=1$

$$\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\bullet tg\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\bullet tg\alpha=ctg\alpha\bullet tg\alpha=1$$

$1=1$

2. $\sin^4\alpha+2\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=1$

$$\sin^4\alpha+2\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)+2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$1=1$

3. $\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+2tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} + 2tg^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 2tg^2\alpha = 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Что необходимо для успешного выполнения преобразований тригонометрических выражений?

Свободное владение тригонометрическими тождествами и формулами сокращенного умножения.

Дано: $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}6$

Найти: $\sin\alpha\cos\alpha$

Решение:

$\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}6$

$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 0{,}6^2$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0{,}36$

$1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}36$

$2\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}64$

$\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}32$

Решение упражнений:

Упростите выражение

1. $1-\cos^2\alpha$
2. $\cos^2\alpha + (1-\sin^2\alpha)$
3. $(\cos\alpha - 1)(1+\cos\alpha)$
4. $\cos^2\alpha - (1-2\sin^2\alpha)$
5. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot ctg\alpha - 1$
6. $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$
7. $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$
8. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\alpha$
9. $\frac{\sin\alpha}{tg\alpha}$
10. $1-\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{ctg\alpha}$

Домашнее задание:

Упростите выражение

$$\frac{tg\alpha \cdot ctg\alpha - \cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} + tg\alpha$$

$$\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}$$

$$ctg^2\beta\left(\cos^2\beta - 1\right) + 1$$

$$\frac{tg\beta + 1}{1 + ctg\beta}$$

$$\cos^2\alpha \cdot tg^2(-\alpha) - 1$$

$$\frac{1 - tg(-\alpha)}{\sin\alpha + \cos(-\alpha)}$$

Практическое занятие №9

Тема: Формулы приведения. Формулы сложения
Цель: Научить использовать формулы приведения при преобразовании тригонометрических выражений

Теоретический блок

Углы / Функции	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$ $(90°-\alpha)$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$ $(90°+\alpha)$	$\pi-\alpha$ $(180°-\alpha)$	$\pi+\alpha$ $(180°+\alpha)$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$ $(270°-\alpha)$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$ $(270°+\alpha)$	$2\pi-\alpha$ $(360°-\alpha)$	$2\pi+\alpha$ $(360°+\alpha)$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
ctg	$-ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta},\ tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

(в последних двух формулах $\alpha\neq\pi/2+\pi n,\quad \beta\neq\pi/2+\pi n$ и соответственно $\alpha+\beta\neq\pi/2+\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\pi/2+\pi n,\quad n\in Z$);

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha},\ ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

(в последних двух формулах $\alpha\neq\pi n,\quad \beta\neq\pi n$ и соответственно $\alpha+\beta\neq\pi n,\quad \alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z$).

Примеры:

$$\frac{\sin 13\pi}{3}=\sin\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\cos 13\pi}{3}=\cos\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$tg\frac{13\pi}{3}=tg\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$ctg\frac{13\pi}{3}=c\,tg\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=ctg\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Тангенс и котангенс можно было бы вычислить и так:

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}=\frac{\sin(13\pi/3)}{\cos(13\pi/3)}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3},\quad \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{3}=\frac{1}{\operatorname{tg}(13\pi/3)}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\sin(-1050^\circ)=\sin[360^\circ\cdot(-3)+30^\circ]=\sin 30^\circ={}^1/_2,$$
$$\cos(-1050^\circ)=\cos[360^\circ\cdot(-3)+30^\circ]=\cos 30^\circ=\sqrt{3}/2.$$

$$\operatorname{tg}(-1050^\circ)=\frac{\sin(-1050^\circ)}{\cos(-1050^\circ)}=\frac{{}^1/_2}{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\operatorname{ctg}(-1050^\circ)=\frac{\cos(-1050^\circ)}{\sin(-1050^\circ)}=\frac{\sqrt{3}/2}{{}^1/_2}=\sqrt{3}.$$

$$\sin(-960^\circ)=\sin[360^\circ\cdot(-3)+120^\circ]=\sin 120^\circ=$$
$$=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\sqrt{3}/2,$$
$$\cos(-960^\circ)=\cos[360^\circ\cdot(-3)+120^\circ]=\cos 120^\circ=$$
$$=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-{}^1/_2,$$
$$\operatorname{tg}(-960^\circ)=\frac{\sin(-960^\circ)}{\cos(-960^\circ)}=\frac{\sqrt{3}/2}{-{}^1/_2}=-\sqrt{3},$$
$$\operatorname{ctg}(-960^\circ)=1/\operatorname{tg}(-960^\circ)=-1/\sqrt{3}.$$

Решение упражнений

1. Заменить значения данных тригонометрических функций значениями тригонометрических функций дополнительных углов:

а) $\sin 54^\circ$, б) $\sin(\pi/4-3\alpha)$; в) $\cos 53^\circ$; г) $\cos(3\pi/10)$; д) $\operatorname{tg} 51^\circ$; е) $\operatorname{ctg}(\pi/4-\alpha/2)$; ж) $\operatorname{ctg} 36^\circ 28' 46''$.

2. Найти значения следующих тригонометрических функций (или выразить их через значения тригонометрических функций острых углов):

а) $\cos(2\pi/3)$; б) $\sin 92^\circ 31'$; в) $\operatorname{ctg}(5\pi/4)$; г) $\operatorname{tg} 330^\circ$.

3. Вычислить:

а) $3\sin(\pi/2)+4\cos(2\pi/3)+6\sin(13\pi/6)$;

б) $2\operatorname{tg}180^\circ-\frac{1}{2}\sin(-270^\circ)+\frac{1}{2}\cos 180^\circ$.

4. Значения данных тригонометрических функций привести к значениям тригонометрических функций неотрицательных острых углов:

а) $\cos(32\pi/3)$; б) $\sin 2760^\circ$; в) $\operatorname{tg}(-1845^\circ)$; г) $\operatorname{ctg} 2209^\circ$.

5. Доказать тождество

$$3[\sin^4(3\pi/2-\alpha)+\sin^4(3\pi+\alpha)]-2[\sin^6(\pi/2+\alpha)+\sin^6(5\pi-\alpha)]=1.$$

Преобразуйте выражение

а) $\cos(\pi/4-\varphi)$; б) $\sin(\varphi+\pi/4)$; в) $\cos(\pi/4+\varphi)$; г) $\sin(\varphi-\pi/4)$

д) $\operatorname{tg}(3\pi/2-\varphi)$; е) $\sin(\varphi-\pi/6)$;

2. Вычислите:

а) $\cos [105]^{0}$; б) $\sin [105]^{0}$; в) $\cos [75]^{0}$; г) $\sin [75]^{0}$

д) $tg [75]^{0}$; е) $\sin [15]^{0}$

3. Упростите:

а) $\sqrt{2}\ \sin(\pi/4+\alpha) - cos\alpha$; б) $\sqrt{2}\ \sin(\alpha-\pi/4) - sin\alpha$; в) $2\sin(\pi/3-\alpha) - \sqrt{3}\ sin\alpha$

4.а) Зная, что $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $cos\beta = \frac{4}{5}$, α и β – углы I четверти, найдите значения выражения

б) Зная, что $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $cos\beta = \frac{4}{5}$, α и β – углы I четверти, найдите значения выражения

в) Зная, что $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $cos\beta = \frac{4}{5}$, α и β – углы I четверти, найдите значения выражения

Домашнее задание:

1.Замените тригонометрической функцией угла α:

а) $sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $cos(2\pi-\alpha)$; в) $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; г) $ctg(90^0-\alpha)$

2. Найдите значение выражения;

а) $\sin 240^0$; б) $\cos 300^0$; в) $tg(-225^0)$; г) $ctg\,\frac{4\pi}{3}$

3. Преобразуйте выражение:

$$\frac{\cos(-\alpha)\cdot cos(180^0+\alpha)}{\sin(-\alpha)\cdot\sin(90^0+\alpha)}$$

4. Преобразуйте выражение

а) $tg(2\pi-\varphi)$ б) $sin(\pi/3-\varphi)$

5. Вычислите:

а) $tg [15]^{0}$ б) $\cos [15]^{0}$

6. Упростите:

$\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$

7. Зная, что $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, α и β – углы I четверти, найдите значения выражения

Практическое занятие №10

Тема: Формулы двойного аргумента. Формулы половинного угла
Цель: Научить использовать формулы двойного аргумента при преобразовании тригонометрических выражений
Теоретический блок

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Упростить выражение:

1) $\mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$

Здесь представляем $2x$ в виде $x + x$ и применяем формулу косинуса сложения аргументов:

$\mathbf{\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$

2) **$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.**

Здесь мы просто продолжим преобразовывать предыдущую формулу.
Используем для этого основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Из этого тождества следует, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Итак, выпишем предыдущую формулу, вставим значение $\cos^2 x$, сведем подобные члены и получим результат:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

3) $$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Способов, как прийти к такому тождеству, два.

<u>Первый способ</u>. Здесь нам поможет формула тангенса сложения аргументов. Для этого представим $\operatorname{tg} 2x$ в виде $\operatorname{tg}(x + x)$. Итак:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

<u>Второй способ</u>. Он сложнее. Сначала применяем формулы синуса и косинуса сложения аргументов:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\sin(x + x)}{\cos(x + x)} = \frac{\sin x \cos x + \cos x \sin x}{\cos x \cos x - \sin x \sin x}$$

Теперь, чтобы упростить выражение, делим все его части на $\cos x \cos x$, сокращаем подобные члены и приходим к решению:

$$\frac{\dfrac{\sin x \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} \cos x} + \dfrac{\cancel{\cos x} \sin x}{\cancel{\cos x} \cos x}}{\dfrac{\cancel{\cos x \cos x}}{\cancel{\cos x \cos x}} - \dfrac{\sin x \sin x}{\cos x \cos x}} = \frac{\dfrac{2 \sin x}{2 \cos x}}{1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

ПРИМЕЧАНИЕ:

При решении конкретных задач важно помнить, что задача имеет смысл лишь в том случае, если в процессе решения знаменатели нигде не оказываются равны нулю.

Теперь для наглядности решим несколько примеров по теме.

<u>Пример 1</u>. Упростить выражение:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$$

Решение:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2\cancel{\sin \alpha}\cos \alpha}{\cancel{\sin \alpha}} = 2\cos \alpha$$

Пример 2. Пусть tg α = 3/4 и 180º < α < 270º.

Найти sin 2α.

Решение.

В первую очередь, отмечаем, что угол находится в третьей четверти. Значит, синус будет со знаком минус.

1) Значение синуса мы могли бы найти через формулу $1 + \text{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Значит, нам надо сначала вычислить значение котангенса. Мы знаем, что tg α · ctg α = 1. Следовательно:

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

2) Теперь находим значение синуса:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \text{ctg}^2\,\alpha} = \frac{1}{1 + (4/3)^2} = \frac{1}{1 + 16/9} = \frac{1}{25/9} = \frac{9}{25}$$

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

3) Мы знаем, что sin 2α = 2 sin α cos α. Значит, находим еще косинус (по формуле $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$). При этом опять не забываем, что угол – в третьей четверти и косинус должен быть со знаком минус. Итак:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

4) Осталось применить формулу двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25} = 0{,}96.$$

Пример 3: Вычислить

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

Решение.

Это выражение соответствует правой части формулы косинуса двойного аргумента ($\cos 2x = \mathbf{\cos^2 x - \sin^2 x}$). Значит, просто приравняем его к левой части. Для этого замечаем, что

$$x = \frac{\pi}{8}$$

Остается ввести в формулу это значение x и решить уравнение:

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \cos \frac{2\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Упражнения:

Вычислить:

1) $cos^2 \frac{\pi}{8} - sin^2 \frac{\pi}{8} = cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2) $sin \frac{\pi}{12} \cdot cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(2sin \frac{\pi}{12}\, cos \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

3) $\dfrac{2tg \frac{\pi}{8}}{1 - tg^2 \frac{\pi}{8}} = tg\left(2 \frac{\pi}{8}\right) = tg \frac{\pi}{4} = 1.$

2. Дано: $cosx = \frac{3}{5}, \;\; x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right).$

Найти: а) $cos2x,$ б) $sin2x.$

Решение:

а)

$$sin^2x = 1 - cos^2x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25},$$

$$sinx = -\frac{4}{5},$$

Учитывая, что $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, то

$$cos2x = cos^2x - sin^2x = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Ответ: $cos2x = -\frac{7}{25}.$

б)

$$sin2x = 2sinx\,cosx = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = -\frac{24}{25}.$$

Ответ: $sin2x = -\frac{24}{25}.$

Упростите выражение:

б) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$,

г) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18}{\cos 18^\circ}$

Решение.

б) $$\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ} = \frac{\cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ} = \frac{(\cos 40^\circ + \sin 40^\circ)(\cos 40^\circ - \sin 40^\circ)}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ} = \cos 40^\circ - \sin 40^\circ$$

Ответ: $\cos 40^\circ - \sin 40^\circ$

г) $$\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos^2 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 18^\circ$$

Ответ: $\cos 18^\circ$.

Вычислите $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$

Решение.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}-\cos^2\frac{\pi}{8}-2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}-2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}-\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}-2\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}-1 = \frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\frac{\pi}{4}-1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1 = -1$$

Ответ: -1.

Тестирование

<table>
<tr>
<td>

Вариант 1
Вычислите:

1. $\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\frac{2tg75^\circ}{tg^2 75^\circ-1}$

1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $-\sqrt{3}$

3. $\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$

1) $\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-2)$, 4) $-\frac{1}{2}$

4. *Найдите* $tg\alpha$, *если* $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}$

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) $\frac{8}{15}$; 4) $\frac{8}{17}$

</td>
<td>

Вариант 2
Вычислите:

1. $\frac{2tg15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}$

1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $-\sqrt{3}$

2. $\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}$

1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\cos^4\frac{3\pi}{8}-\sin^4\frac{3\pi}{8}$

1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$

4. *Найдите* $tg4\alpha$, *если* $tg2\alpha=0{,}4$

1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0,8; 4) $\frac{20}{21}$

</td>
</tr>
</table>

6. Проверка, анализ ошибок

№ задания	***Вариант 1***	***Вариант 2***
1	1	2
2	2	1
3	1	1
4	3	4

УПРАЖНЕНИЯ

1. Упростите:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; в) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$; г) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;

д) $\frac{\sin 40^\circ}{2\cos 20^\circ}$; е) $\frac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ}$; ж) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ}$; з) $\frac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

2. Докажите тождества:

а) $2\sin(90^\circ - \alpha)\cdot\sin\alpha = \sin 2\alpha$; б) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$.

3. Вычислите:

а) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

б) $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}2$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

в) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

4. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; в) $\frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}}$;

б) $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta}$; г) $\frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$.

5. Найдите значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{41}$ и $0<\alpha<\pi$.

6. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$; в) $\sin 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1$;

б) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; г) $(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha$.

7. Упростите:

а) $0{,}5\operatorname{tg}\alpha\sin 2\alpha + \cos^2\alpha$; б) $\dfrac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta + \sin^2\beta}$.

8. Вычислите:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; г) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

б) $8\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; д) $4\cos^2\frac{\pi}{8} - 4\sin^2\frac{\pi}{8}$;

в) $\sin 105^\circ\cos 105^\circ$; е) $\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sin^2\frac{7\pi}{12}$.

9. Упростите:

а) $\dfrac{2\operatorname{tg}5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 5^\circ}$; б) $\dfrac{4\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$; в) $\dfrac{\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$.

10. Упростите выражение:

а) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $4\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{2\pi+\alpha}{4}\cos\frac{2\pi+\alpha}{2}$.

11. Докажите тождество

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

12. Упростите выражение:

$\dfrac{1+\cos 2\varphi}{1-\cos 2\varphi}$.

13. Существует ли такой угол x, при котором $\sin x\cos x = \frac{3}{7}$?

Практическое занятие №11

Тема: Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму

Цель: Научить использовать данные формулы при преобразовании тригонометрических выражений

Теоретический блок

Сумма синусов

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Разность синусов

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Сумма косинусов

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Разность косинусов

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Сумма тангенсов

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}.$$

Разность тангенсов

$$\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}.$$

Сумма котангенсов

$$\mathrm{ctg}x + \mathrm{ctg}y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}.$$

Разность котангенсов

$$\mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}.$$

Сумма тангенса и котангенса

$$\text{tg}x + \text{ctg}y = \frac{cos(x-y)}{\sin y \cos x}.$$

Разность тангенса и котангенса

$$\text{tg}x - \text{ctg}y = -\frac{cos(x+y)}{\sin y \cos x}.$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)).$$

<u>Пример.</u> Доказать, что тангенсы углов $\alpha \neq {}^{\pi}/_{2} + n\pi$ и $\beta \neq {}^{\pi}/_{2} + n\pi$ равны тогда и только тогда, когда эти углы разнятся на угол, кратный π.

Пусть α и β разнятся на угол, кратный π; тогда α = β + nπ, где n — некоторое целое число. Но в таком случае

$$\text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ (\beta + n\pi) = \text{tg}\ \beta.$$

Обратно, пусть tg α = tg β. Тогда tg α — tg β = 0 и по формуле (2)

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = 0.$$

Но это возможно лишь при условии, что sin (α — β) = 0. Как известно, синус обращается в нуль лишь для углов, кратных π. Поэтому

$$\alpha - \beta = n\pi,$$

$$\alpha = \beta + n\pi,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Вычислить, не пользуясь тригонометрическими таблицами:

а). tg 22°30' + tg 67°30'. в). $\text{tg}\ {}^{11\pi}/_{12} + \text{tg}\ {}^{5\pi}/_{12}$.

б). tg 22°30' — tg 67°30' г). $\text{tg}\ {}^{11\pi}/_{12} - \text{tg}\ {}^{5\pi}/_{12}$.

2. Упростить выражение

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

3. Данные выражения представить в виде произведений:

а) $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha$; б) $1 + \operatorname{tg}\alpha$.

4. Найти условие, при котором котангенсы углов α и β равны между собой.

Упражнения:

Преобразовать в суммы следующие произведения.

1. 1) $\cos 15° \cdot \cos 5°$; 2) $2\cos 18° \cdot \cos 66°$;
3) $2\cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{5}$; 4) $2\cos (a + b) \cdot \cos (a - b)$;
5) $2\cos x \cdot \cos (x + 1)$; 6) $\cos (\alpha - \frac{\pi}{6}) \cdot \cos (\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6})$.

2. 1) $\sin 23° - \sin 32°$; 2) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$;
3) $2\sin A \cdot \sin 2A$; 4) $2\sin (x + a) \cdot \sin (x - a)$.

3. 1) $\sin 15° \cdot \cos 10°$; 2) $2\sin 14° \cdot \cos 16°$;
3) $2\cos 3° \cdot \sin 2°$; 4) $\sin (x - y) \cdot \cos (y - x)$.

4. Пользуясь формулами преобразования произведений тригонометрических функций в сумму, доказать тождества:

1) $2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$; 2) $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$;
3) $2\cos^2 (45° - \frac{\alpha}{2}) = 1 + \sin\alpha$; 4) $2\sin^2 (45° - \frac{\alpha}{2}) = 1 - \sin\alpha$.

5. Преобразовать в суммы тригонометрических функций 1-й степени следующие произведения:

1) $\sin^2 3A$; 2) $2\cos^2 (\alpha - 45°)$; 3) $4\cos x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$;
4) $\sin 4\gamma \cos^2 (2\gamma + \frac{\pi}{4})$ 5) $\sin^3 \alpha$; 6) $4\cos^4 \alpha$;
7) $16\sin^2 \alpha \cdot \cos^3 \alpha$; 8) $32\sin^5 \alpha \cdot \cos^3 \alpha$.

6. Пользуясь таблицами, найти числовые значения выражений:

1) $\sin 50° \cdot \sin 15°$; 2) $\sin 33° \cdot \cos 47°$;
3) $2\cos^2 33°21'$; 4) $\sin^2 26°34'$;
5) $2\sin 12° \cdot \cos 8° \cdot \cos 10°$; 6) $4\sin^2 10° \cdot \sin 70°$.

7. Упростить выражения.

1) $2 \sin 10° \cdot \sin 40° + \cos 50°$; 2) $2 \cos 20° \cdot \cos 40° — \cos 20°$.

8. 1) $\sin \alpha \cdot (1 + 2 \cos 2\alpha)$; 2) $2 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha — \cos 3\alpha$.

9. 1) $\sin 2\alpha + 2 \sin ({}^{5\pi}/_{12} — \alpha) \cdot \cos ({}^{5\pi}/_{12} + \alpha)$;
2) $\cos 2\alpha + 2\sin (\alpha + {}^{\pi}/_{6}) \cdot \sin (\alpha — {}^{\pi}/_{6})$.

Доказать тождества.

10. 1) $\sin 1° + \sin 91° + 2 \sin 203° \cdot (\sin 112° + \sin 158°) = 0$.
2) $\cos 35° + \cos 125° + 2 \sin 185° \cdot (\sin 130° + \sin 140°) = 0$.

11. 1) $4 \cos {}^{\alpha}/_{2} \cdot \cos \alpha \cdot \sin {}^{3\alpha}/_{2} = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;
2) $4 \cos 2\alpha \cdot \cos ({}^{\alpha}/_{2} + 30°) \cdot \cos ({}^{\alpha}/_{2} — 30°) = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

12. 1) $4 \cos {}^{\alpha}/_{2} \cdot \cos a \cdot \sin {}^{5\alpha}/_{2} = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;
2) $4 \cos {}^{\alpha}/_{2} \cdot \cos a \cdot \cos {}^{5\alpha}/_{2} = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

13. 1) $\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 60° \cdot \sin 80° = {}^{3}/_{16}$;
2) $\mathrm{tg}\, 20° \cdot \mathrm{tg}\, 40° \cdot \mathrm{tg}\, 60° \cdot \mathrm{tg}\, 80° = 3$.

14. Дано: $\mathrm{tg}\, \alpha = 2\, \mathrm{tg}\, \beta$. Доказать: $\sin (\alpha + \beta) = 3 \sin (\alpha — \beta)$.

Домашнее задание:

Преобразовать в суммы следующие произведения.

1. 1) $\sin 10° \cdot \cos 8° \cdot \cos 6°$; 2) $4\sin 25° \cdot \cos 15° \cdot \sin 5°$;
3) $4 \sin 12° \cdot \sin 14° \cdot \sin 16°$; 4) $4 \cos 25° \cdot \cos 35° \cdot \cos 15°$.

2. 1) $8 \cos 1° \cdot \cos 2° \cdot \cos 4° \cdot \cos 8°$; 2) $4 \sin A \cdot \sin 2A \cdot \sin 3A \cdot \sin 4A$.

Упростить выражения.

12. 1) $\sin^2 \alpha — \sin (\alpha + {}^{\pi}/_{3}) \cdot \sin (\alpha — {}^{\pi}/_{3})$.
2) $\cos^2 \alpha — \cos(30° + \alpha) \cdot \cos(30° — \alpha)$.

13. 1) $\cos 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha — {}^{1}/_{4} \cos 4\alpha — {}^{1}/_{2} \cos 2\alpha$;
2) $\cos^2 3 + \cos^2 1 — \cos 4 \cdot \cos 2$.

Практическое занятие №12

Тема: Формулы понижения степени

Цель: Научить использовать данные формулы при преобразовании тригонометрических выражений

Теоретический блок

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\mathrm{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

Упражнения:

1. Доказать:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}.$$

Доказательство:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2sin\frac{\alpha}{2}}{2cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{2cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{sin\alpha}{2\cdot\frac{1-cos\alpha}{2}}=\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}.$$

$cos\frac{\alpha}{2}\neq 0.$

2. Доказать:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}.$$

Доказательство:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2sin\frac{\alpha}{2}}{2sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2sin^2\frac{\alpha}{2}}{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1-cos\alpha}{2}}{sin\alpha}=\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}.$$

Анализ: кроме $cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$ добавляется $sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$, что сужает ОДЗ.

3. Дано: $\begin{cases} cos\alpha=-\frac{12}{13} \\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

Найти:

$$sin\frac{\alpha}{2},\ cos\frac{\alpha}{2},\ tg\frac{\alpha}{2},\ ctg\frac{\alpha}{2}.$$

Анализ условия: Угол задан однозначно, см. рис.1.

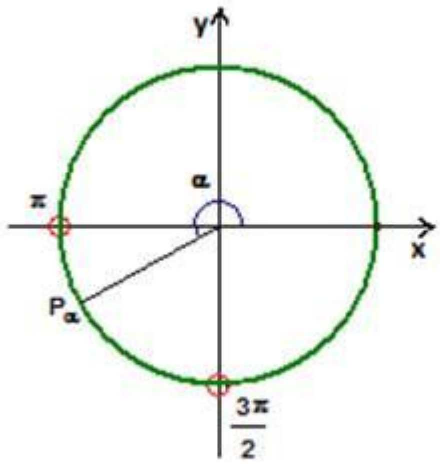


Рис. 1.

Указание: все функции половинного аргумента можно вычислять через косинус полного аргумента.

Решение:

1) $sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{12}{13}}{2}=\frac{1}{26},$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$, т.е. угол второй четверти, где синус величина положительная.

Ответ: $sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

2) $cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{12}{13}}{2} = \frac{1}{2}$.

Выше показали, что $\frac{\alpha}{2}$ находится во второй четверти, где его косинус величина отрицательная.

Ответ: $cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$.

Проверка:

$sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2} = 1, \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2 = 1,$

$1 = 1.$

3) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{5}{\sqrt{26}}}{-\frac{1}{\sqrt{26}}} = -5.$

Ответ: $tg\frac{\alpha}{2} = -5.$

4) $ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{5}$.

Ответ: $ctg\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{5}$.

4. Дано: $sin\alpha = 0{,}2.$

Найти: $sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$

Решение:

$$sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{2} = \frac{1 + sin\alpha}{2} = \frac{1 + 0{,}2}{2} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6.$$

Ответ: $0{,}6.$

Практическое занятие №13

Тема: Выполнение упражнений на применение изученных формул
Цель: Проверить уровень усвоения полученных знаний

I-Вариант

1. Вычислите:

1.$tg^2 45 \cdot \cos 30 \cdot ctg^2 30$

2.$tg^2 30 + 2\sin 60 - tg 45 + \cos^2 30$

2. Упростите выражение:

1.$\frac{tg\alpha \cdot ctg\alpha}{1-\sin^2\alpha}$

2.$\frac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha + \sin^2\alpha$

3.$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} - \cos\alpha$

3. Вычислите:

1.$\cos 34 \cos 56 - \sin 34 \sin 56$

2.$\sin 14 \cos 346 + \sin 346 \cos 14$

4. Сократите дробь:

1.$\frac{\sin 40}{\sin 20}$

2.$\frac{\cos 80}{\cos 40 + \sin 40}$

II – Вариант

Вычислите:

1.$ctg^2 45 \cdot \sin 30 \cdot \cos 30$

2.$ctg^2 45 + \cos 60 - \sin^2 60 + \frac{3}{4} ctg^2 60$

Упростите выражение:

1.$\frac{1-\cos^2\alpha}{tg\alpha \cdot ctg\alpha}$

2.$\frac{1}{\sin^2\alpha} - ctg^2\alpha - \cos^2\alpha$

3.$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} + \sin\alpha$

Вычислите:

1.$\cos 53 \cos 37 - \sin 53 \sin 37$

2.$\sin 13 \cos 17 + \sin 17 \cos 13$

4. Сократите дробь:

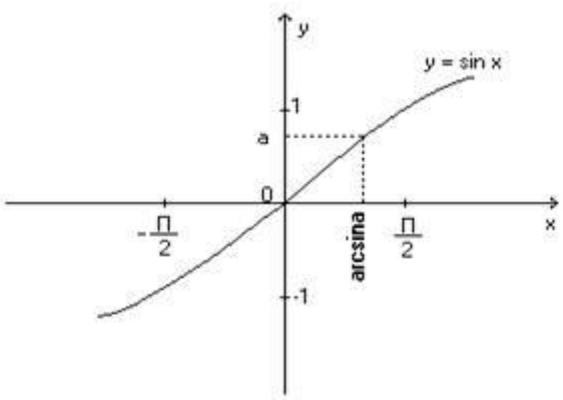
1.$\frac{\sin 100}{\sin 50}$

2.$\frac{\cos 36 + \sin^2 18}{\cos 18}$

Практическая работа № 14

Тема: Арксинус, арккосинус, арккотангенс

Цель: Научить вычислять арксинус, арккосинус, арккотангенс



Sin x = a на **[-** $\frac{\pi}{2}$ **;** $\frac{\pi}{2}$]

x = arcsin a, где $-1 \leq a \leq 1$

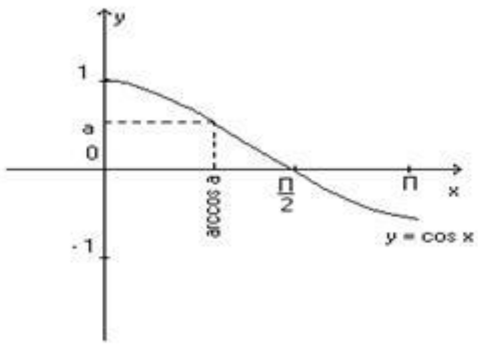
Определение:

arcsin a = b [- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]

sin b = a

sin (arcsin a) = a

arcsin (-a) = - arcsin a



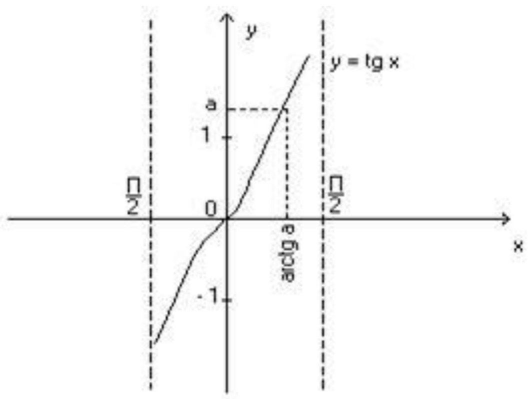
cos x = a на [0;п]

x = arccos a, где $-1 \leq a \leq 1$

Определение: arccos a = b cosb = a

cos(arccos) = a

arccos(-a) = p – arccos a



tg = a на (- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$)

x = arctg a, где a – любое.

Определение: arctg a =(- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$)

tgb = a

tg (arctg a) = a

arctg (-a) = - arctg a

Задание:

Вычислить:

1.arcsin 1; arccos ($-\frac{1}{2}$); arctg $\sqrt{3}$; arcsin ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$).

2.arccos ($-\frac{1}{2}$) = п - $\frac{\pi}{3}$ = 2 $\frac{\pi}{3}$, т. к. cos 2 $\frac{\pi}{3}$ = $-\frac{1}{2}$ и 2 $\frac{\pi}{3}$ Î [0;p]

3.arctg $\sqrt{3}$ = $\frac{\pi}{3}$, т. к. tg $\frac{\pi}{3}$ = $\sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ Î ($-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$)

4.arcsin($-\frac{\sqrt{2}}{2}$) = - arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $-\frac{\pi}{4}$,т. к. sin($-\frac{\pi}{4}$) = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}$ Î[$-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$].

5.а) arcsin($-\frac{1}{2}$);

б) 2 arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$

в) 3 arctg $\frac{1}{\sqrt{3}}$

г) arcsin 0 + arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$

д) sin (arcsin $\frac{1}{2}$) + cos(arccos $\frac{1}{3}$) – tg(arctg $\frac{1}{6}$)

6)При каких значениях х имеют смысл выражения :

а) arcsin($\frac{x}{3}$);

б) arccos 4х

в) arctg(2х-1)

7) Что больше:

а) arcsin $\frac{1}{2}$ или arcsin 0,82

б) arccos($-\frac{1}{2}$) или arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8) Вычислите:

а) <u>arcsin(-1) - arctg</u> $\sqrt{3}$

arccos ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **)**

Практическая работа № 15

Тема: Решение упражнений.

Цель: Проверить уровень усвоения данной темы у учащихся

Решение упражнений:

1. Решите уравнения

а) tg $x + 1 = 0$;

б) cos $x + 2 = 0$;

в) sin $x + 0{,}7 = 0$;

г) 2 cos $x + \sqrt{3} = 0$;

д) ctg $x + 1 = 0$;

Самостоятельная работа

1 вариант

Решите уравнения:

1. $2\cos x - 1 = 0$;
2. $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x - 1 = 0$;
3. $2\sin x + \sqrt{3} = 0$;
4. ctg $x - 1{,}5 = 0$.
5. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$
6. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$
7. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$
8. $1 - 2\cos^2 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
9. $\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)(\mathrm{ctg}\, x + \sqrt{3}) = 0$;
10. $4\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{8} = 0$.

2 вариант

Решите уравнения:

1. $2\sin x - \sqrt{2} = 0$;
2. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$;
3. $\sin x - 3 = 0$;
4. $\cos x - 0{,}4 = 0$;
5. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$;
6. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$;
7. $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -3$;
8. $\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4} = -\frac{1}{4}$;
9. $(1 + \cos 2x)(\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3}) = 0$;
10. $4\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{12} = 0$.

Практическое занятие № 16

Тема: Контрольная работа

Цель: Проверить уровень усвоения материала по теме: «Основы тригонометрии»

1 вариант

1. Вычислить: а) $\cos 780°$;

   б) $\sin\dfrac{13\pi}{6}$;

   в) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ *и* $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

   г) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}28$ и $0 < \alpha < \pi$;

   д) $\dfrac{\sin 75^0 + \sin 45^0}{\sin 285^0}$;

   е) $16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$, если $x = \dfrac{\pi}{6}$;

   ж) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

2. Упростить выражение: а) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$;

   б) $\sin 915°\cos\beta - \sin\beta\sin 645°$;

   в) $\dfrac{1}{2}\sin(540° + \beta)\sin(\beta + 810°)$;

   г) $\sin 3\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 3\alpha - \cos(2\pi - \alpha)$;

   д) $\dfrac{\sin(-\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{1 + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\alpha)}$;

   е) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

   ж) $4\sin 10°\cos 50°\cos 40°$.

3. Решить уравнение: а) $\cos(\pi + x) = \sin\dfrac{\pi}{2}$;

   б) $\sin 5x\cos 4x - \cos 5x\sin 4x = 1$.

4. Доказать тождество: а) $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$;

   б) $\cos 4\alpha + 1 = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$;

   в) $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = tg\ \alpha - ctg\ \alpha$.

2 вариант

1. Вычислить: а) $\sin 780°$;

   б) $\cos\dfrac{13\pi}{6}$;

   в) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$ *и* $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

   г) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

д) $\dfrac{\sin 70^0 + \sin 20^0}{\cos 205^0}$;

е) 16 sin *x* sin 2*x* sin 4*x* sin 8*x*, если *x* = $\dfrac{\pi}{6}$;

ж) $\dfrac{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}$, если ctg α = $\dfrac{1}{3}$.

2. Упростить выражение: а) sin (α + β) + sin (α – β);

б) sin 605°cos β + sin β sin 835°;

в) $\dfrac{1}{4}$ sin (405° + β) cos (β + 765°);

г) sin 4α cos 3α + sin 3α cos 4α –sin (6π – α);

д) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(2\pi + \alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha) + 1}$;

е) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

ж) 4 sin 15° cos 15° sin 100°.

3. Решить уравнение: а) sin (π + *x*) = cos $\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

б) cos 4*x* sin 3*x* + sin 4*x* cos 3*x* = 1.

4. Доказать тождество: а) $\dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$;

б) (tg α + ctg α)(1 – cos 4α) = 4 sin 2α;

в) $\dfrac{1}{tg\ \alpha + ctg\ \alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$.

Практическое занятие № 17

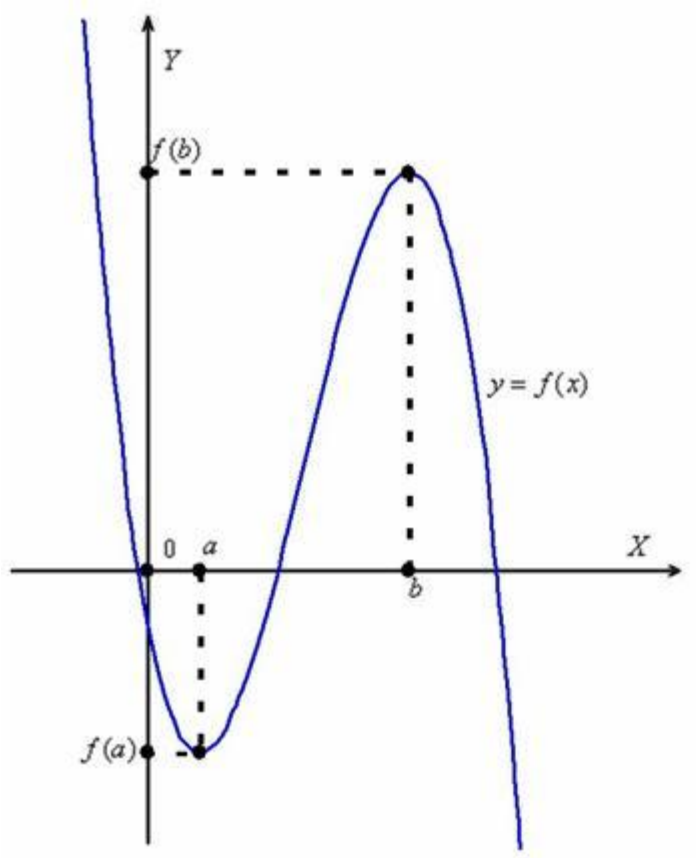
Тема: Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума

Цель: Научить находить возрастание и убывание функции, а также определять экстремумы функции

Теоретический блок

Монотонность функции. Точки экстремума и экстремумы функции

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Упрощённо полагаем, что она непрерывна на всей числовой прямой:



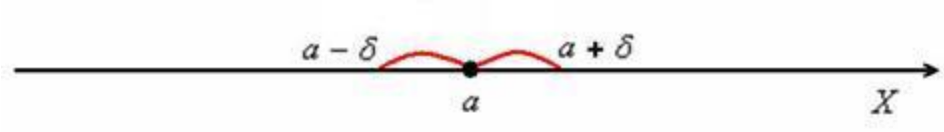
Функция **возрастает** на интервале, если для любых двух точек этого интервала, связанных отношением $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. То есть, большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и её график идёт «снизу вверх». Демонстрационная функция $y = f(x)$ растёт на интервале $(a; b)$.

Аналогично, функция **убывает** на интервале, если для любых двух точек данного интервала, таких, что $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. То есть, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, и её график идёт «сверху вниз». Наша функция $y = f(x)$ убывает на интервалах $(-\infty; a), (b; +\infty)$.

Если функция возрастает или убывает на интервале, то её называют **строго монотонной** на данном интервале. Также можно определить **неубывающую** функцию (смягчённое условие $f(x_2) \geq f(x_1)$ в первом определении) и **невозрастающую** функцию (смягчённое условие $f(x_2) \leq f(x_1)$ во 2-ом определении). Неубывающую или невозрастающую функцию на интервале называют монотонной функцией на данном интервале .

Окрестность точки.

Окрестностью точки называют интервал, который содержит данную точку, при этом для удобства интервал часто полагают симметричным. Например, точка $x = a$ и её стандартная δ - окрестность:



Точка x_0 называется **точкой строгого максимума**, если *существует* её δ - окрестность, **для всех** значений x которой за исключением самой точки x_0 выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$. В нашем конкретном примере это точка b.

Точка x_0 называется **точкой строгого минимума**, если *существует* её δ - окрестность, **для всех** значений x которой за исключением самой точки x_0 выполнено неравенство $f(x) > f(x_0)$. На чертеже – точка «а».

Точки a, b называют **точками строго экстремума** или просто **точками экстремума** функции. То есть это обобщенный термин точек максимума и точек минимума.

Точка x_0 называется **точкой максимума**, если *существует* её окрестность, такая, что **для всех** значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \le f(x_0)$.
Точка x_0 называется **точкой минимума**, если *существует* её окрестность, такая, что**для всех** значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

– значение $f(b)$ называют **максимумом** функции;
– значение $f(a)$ называют **минимумом** функции.

Общее название – **экстремумы** функции.

Точки экстремума – это «иксовые» значения.
Экстремумы – «игрековые» значения.

Ни одного, 1, 2, 3, … и т.д. до бесконечности. Например, у синуса бесконечно много минимумов и максимумов.

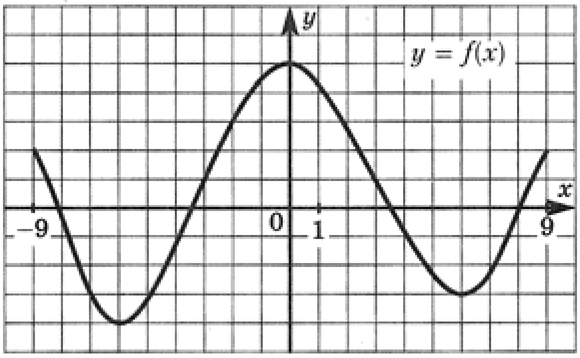
Что подразумевает задание «найдите промежутки монотонности и точки экстремума функции»?

Формулировка побуждает найти:

– интервалы возрастания/убывания функции

– точки максимума и/или точки минимума

Пример 1.Определить по графику промежутки возрастания

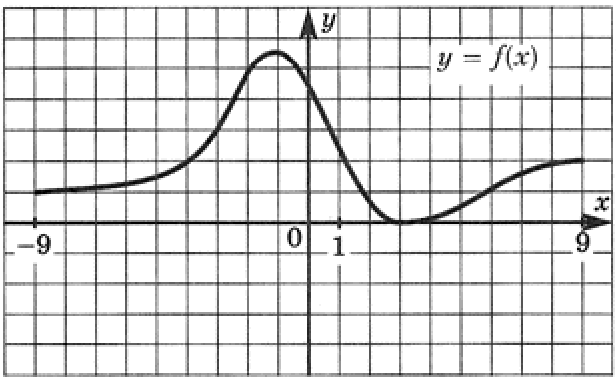


функции.

Решение Если функция возрастает, то при движении по графику слева направо ординаты увеличиваются. Следовательно, функция возрастает на отрезках *[-6; 0] U [6; 9]*.

Ответ: [-6; 0] U [6; 9].

Пример 2.Определить по графику промежутки убывания

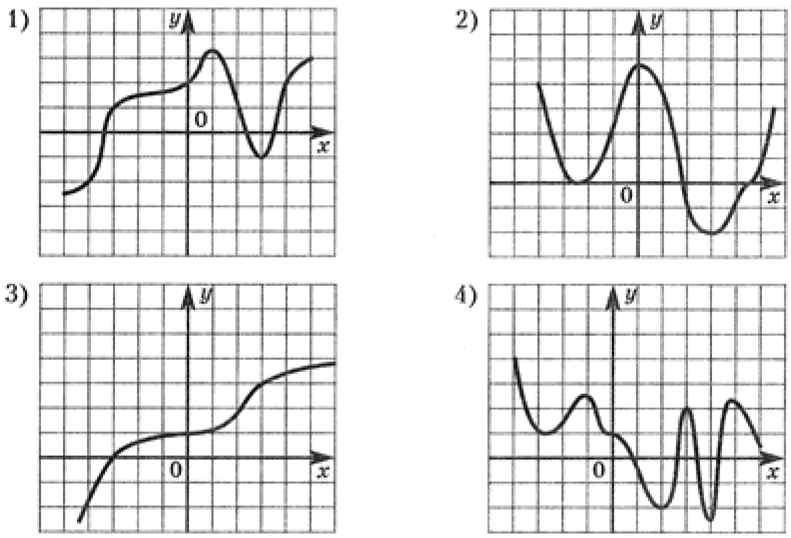


функции.

Решение Если функция убывает, то при движении по графику слева направо ординаты уменьшаются. Следовательно, функция убывает на отрезке[-1; 2].

Ответ: [-1; 2].

Пример 3.Укажите график возрастающей

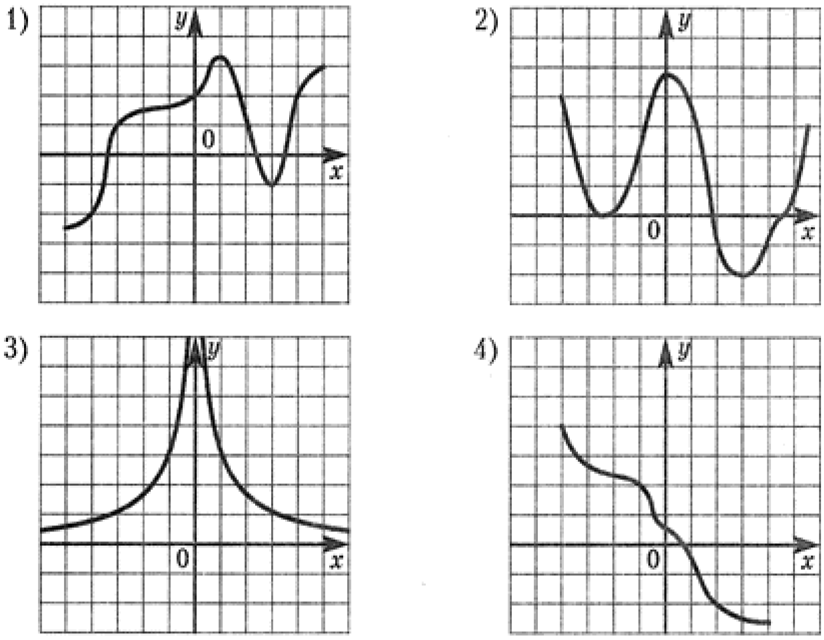


функции.

Ответ: 3.

Решение упражнений

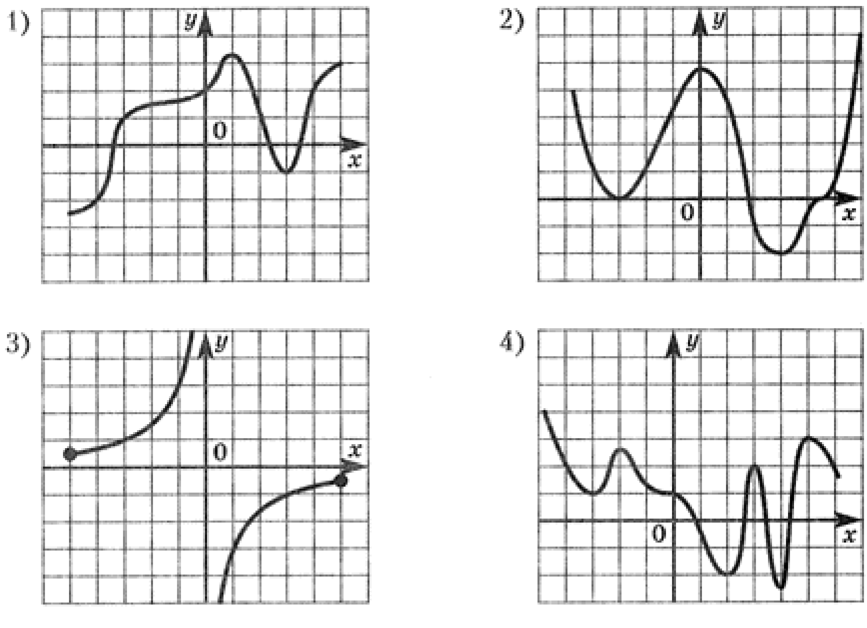
Пример 4.Укажите график убывающей



функции.

Ответ: 4.

Пример 5.Указать интервалы возрастания функций, графики которых представлены на

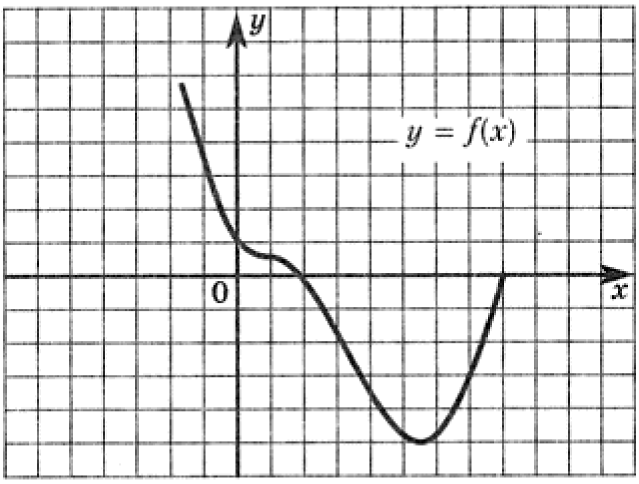


рисунках:

Ответ:

1) [-5; 1] U [3; 5];2) [-3; 0]U[3; 6];3) [-5; 0) U (0; 5];4) [-3; -2] U [2; 3] U [4; 5].

Пример 6.Определить по графику функции $y = x4 — x3 + bx + c$ знаки

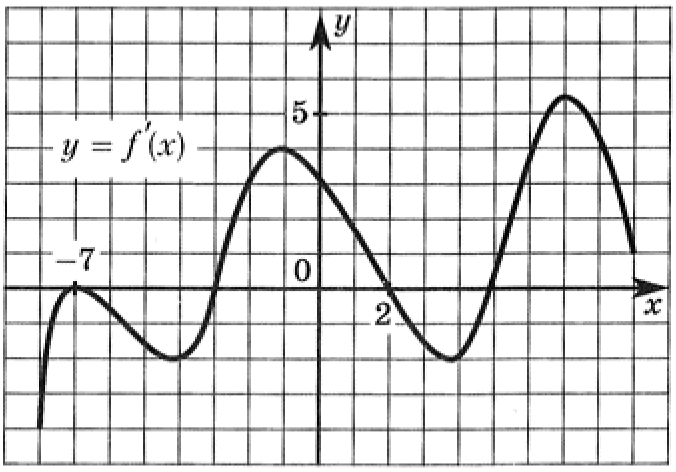


коэффициентов b и с.

Решение Заметим, что $c = f(0)$, следовательно, $c > 0$.Также заметим, что $b = f'(0)$, и, следовательно, $b < 0$, так как на интервале, содержащем точку 0, функция убывает.

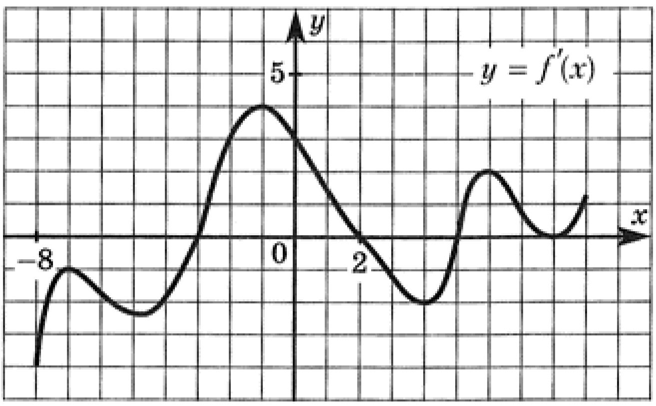
Ответ: $c > 0$, $b < 0$.

Пример 7.Определить по графику точку



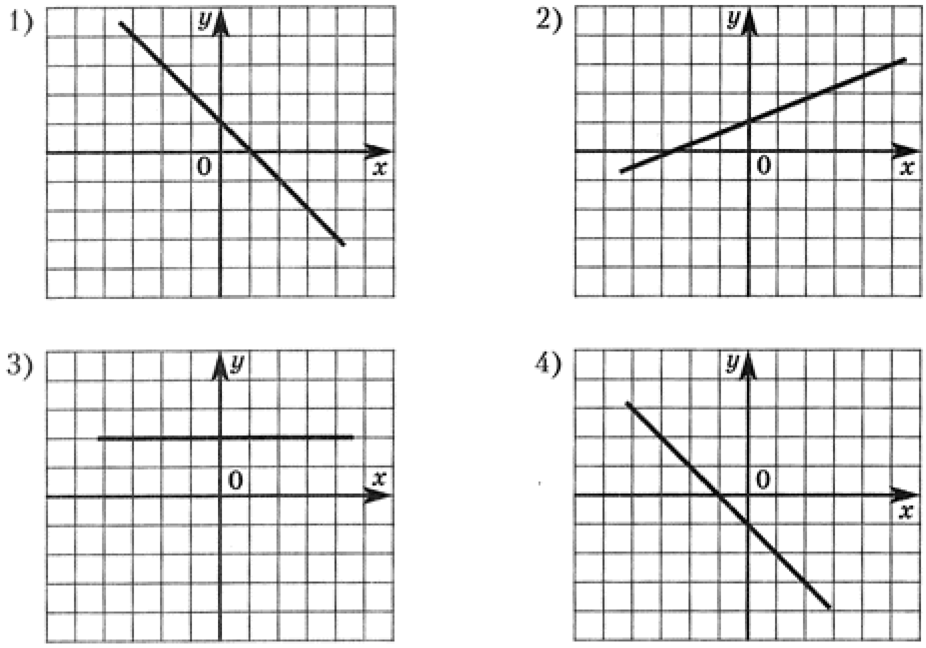
максимума.

Пример 8.Указать интервалы убывания



функции.

Пример 9.Определить по графику функции y = kx + b знаки



коэффициентов k и b.

Ответы:

1) *k < 0, b > 0*;2) *k > 0, b > 0*;3) *k = 0, b > 0*;4) *k < 0, b < 0.*

Практическая работа № 18

Тема: Исследование функций. Построение графиков функций

Цель: Закрепить и систематизировать исследование и построение графиков функций

1. Фронтальный опрос
   1. Что такое числовая функция, её область определения, область значения?
   2. Что такое график функции?
   3. Сформулируйте определение функции, возрастающей и убывающей на множестве Р
   4. Дайте определения точки максимума, точки минимума. Что такое точки экстремума?
   5. Дайте определение четной и нечетной функции. Каким свойством обладают их графики?
   6. Что такое периодическая функция, период функции?
   7. Какой наименьший положительный период имеет функция: $y = cosx$, $y = sinx, y = tgx, y = ctgx$
2. Решение упражнений
   1. Постройте график функции, если известны её функции:

	Свойство функции				
1.	Область определения Область значения	$[-6; 6]$ $[-2; 5]$	$[-5; 4]$ $[0; 6]$	$[-4; 4]$ $[-3; 6]$	$[-5; 3]$ $[0; 5]$
2.	Точки пересечения				

	графика: а) с осью Ох б) с осью Оу	A(-4;0) B(-2;0) C (0;2,5)	O(0;0)	A(-4;0) B(-1;0) C (2,5;0) D(0;-2)	A(3;0) B(0;4,5)
3.	Промежутки знакопостоянства: а) $f(x) > 0$ $f(x) < 0$ б)	$[-6;-4)$ $(-2;6]$ $(-4;-2)$	$[-5;-0)$ $(0;4]$ $-$	$(-4;-1)$ $(2{,}5;4)$ $(-1;2{,}5)$	$[-5;3)$ $-$
4.	Промежутки а)возрастания б)убывания	$[-3;1]$ $[4;6]$ $[-6;-3]$ $[1;4]$	$[-5;-2]$ $[0;4]$ $[-2;0]$	$[-4;-2]$ $[1;4]$ $[-2;1]$	$[-3;1]$ $[-5;-3]$ $[1;3]$
5.	Точки максимума, максимум функции Точки минимума, минимум функции	1, $f(1) = 3$ -3, 4,	-2, $f(-2) = 2$ 0,	-2, $f(-2) = 2$ 1, $f(1) = -3$	1, $f(1) = 5$ -3,
6.	Дополнительные точки графика	$f(-6) = 3$ $f(6) = 5$	$f(-5) = 0{,}5$ $f(4) = 6$	$f(4) = 6$	$f(-5) = 3$

2. Исследуйте и постройте график функции

$f(x) = 5 - 2x$

а)

б)

в) $f(x) = x^3 - 1$

г)

$f(x) = \frac{1}{x + 2}$

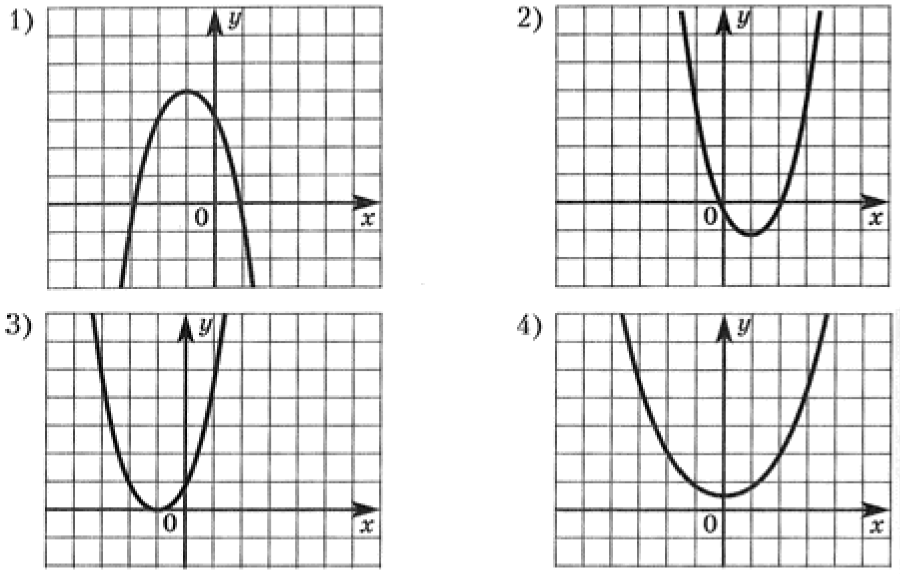
д)

Практическая работа № 19

Тема: Решение упражнений

Цель: Закрепить знания и умения студентов по данной теме

1. Определить по графикам функции у = ах2 + bх + с, указанных на рисунках, знаки коэффициентов a, b, c и



дискриминанта D.

Ответы:

1) a < 0, b < 0, c > 0, D > 0;

2) a > 0, b < 0, c = 0, D > 0;

3) a > 0, b > 0, c > 0, D = 0;

4) a > 0, b = 0, c > 0, D < 0.

Практическая работа № 20

Тема: Контрольная работа

Цель: Проконтролировать уровень усвоения учащимися темы: «Основные свойства функций»

I вариант.

1 Исследуйте функцию $f(x) = 3x^2 - 2|\sin x| + x^3 \cdot \operatorname{tg} x$ на чётность (нечётность).

2. Дана функция $g(x) = \sin 1{,}5x + 5\cos\frac{3}{4}x$.

А) Найдите: g(0); g(7π); g(–12π).
Б) Докажите, что 8π является периодом функции.
В Найдите основной период функции.

3 Найдите основной период и наибольшее значение функции $y = \sin 2x \cdot \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$.

4 (Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонических колебаний и постройте график: $y = -\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2t$.

5. Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x-12}}{x^2 - 1}.$$

II вариант.

1 Исследуйте функцию $f(x) = 3x|x| - 2\sin^3 x + ctgx$ на чётность (нечётность).

2. Дана функция $g(x) = 3\sin\frac{2}{3}x - \cos 2{,}5x$.

А) Найдите: g(0); g(–9π); g(8π).
Б)Докажите, что 24π является периодом функции.
В) Найдите основной период функции.

3 Найдите основной период и наименьшее значение функции $y = \frac{2tgx}{1 + tg^2 x} \cdot \cos 2x$.

4 (Найдите амплитуду, частоту, период и начальную фазу гармонических колебаний и постройте график: $y = \sqrt{3}\sin\frac{1}{2}t - \cos\frac{1}{2}t$

5.Найдите область определения функции

$y = \frac{\sqrt{x+12}}{x^2 - 1}$.

Практическая работа № 21

Тема: Решение иррациональных уравнений
Цель: Научить решать иррациональные уравнения

Теоретический блок

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие п р и е м ы :

1) «уединение» корня в одной из частей уравнения и возведение в соответствующую степень;

2) введение новой переменной;

3) сведение к системе уравнений;

4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

Следует помнить, что при решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \qquad (*)$$

при решении которого важную роль играет четность или нечетность n.

Если n - нечетное, то уравнение (*) равносильно уравнению

$$f(x) = (g(x))^n.$$

Если n - четное, то, так как корень считается арифметическим, необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений): $f(x) \geq 0$. Уравнение (*) в этом случае равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} = 1$.

Решение. Так как в данном примере $n = 3$ - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим
равносильное данному уравнение:

$$x^3 - 2x + 1 = 1^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x = 0 \\ & x^2 - 2 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ответ: $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x+1} = 2 - x$.

Решение. Так как $n = 2$ - четное, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1=(2-x)^2 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4-4x+x^2 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2} \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x=(5-\sqrt{13})/2$.

· Иногда встречаются уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$, которые решаются следующим образом:

n - нечетное $\Rightarrow f(x)=g(x)$

n - четное $\Rightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=0.$

Решение. Запишем данное уравнение в виде: $\sqrt{2x+6}=\sqrt{x+1}.$ Возводя обе части в квадрат и учитывая, что $x+1\ge 0,$ получим уравнение *2x+6=x+1*, решение которого есть *x=-5* – не удовлетворяет выписанному условию. Значит, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений

· Иногда иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-3}=1$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\sqrt{2x-9}=1+\sqrt{x-3}$. Так как теперь обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$$2x-9=1+x-3+2\sqrt{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad x-7=\sqrt{x-3}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x-7\ge 0 \\ (x-7)^2 = 4(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-14x+49=4x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-18x+61=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 7 \\ x=9\pm\sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=9+\sqrt{20}.$$

Ответ: $x=9+\sqrt{20}$.

· Введение новой переменной в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к рациональному уравнению.

Пример 5. Решить уравнение $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-5}=10$.

Решение. Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально. Поэтому запишем уравнение в виде $x^2+3x-5+4\sqrt{x^2+3x-5}=5$ и введем «новую» переменную:

$$y=\sqrt{x^2+3x-5},\ y\ge 0.$$

Получим $y^2+4y-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \end{array}\right.$.

Вернемся к «старым» переменным $\sqrt{x^2+3x-5}=1$ или $\sqrt{x^2+3x-5}=-5$. Второе из полученных уравнений решений не имеет, а решения первого есть числа $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{2},\ x_2=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

Иногда при решении иррационального уравнения возникает необходимость ввести не одну, а несколько «новых» переменных. Такая ситуация возникает, например, при решении уравнений, содержащих радикалы разных степеней.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{11-x}=1$.

Решение. Пусть $u=\sqrt{x-2}\ge 0$ и $v=\sqrt[3]{1-x}$. Тогда $u+v=1$. С другой стороны $u^2+v^3=x-2+11-x=9$. Получаем систему

$$\begin{cases} u+v=1 \\ u^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ (1-v)^2+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-v \\ v^3+v^2-2v-8=0 \end{cases}.$$

Решим последнее уравнение системы:

$$v^3+v^2-2v-8=0 \Leftrightarrow \left(v^3-8\right)+v(v-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(v-2)\left(v^2+2v+4+v\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v^2+3v+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow v=2.$$

Получим, что $v=2$, а тогда $u=1-v=-1<0$. По условию $u \geq 0$, следовательно исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

· При решении некоторых иррациональных уравнений нахождение области допустимых значений входящих в уравнение неизвестных может существенно облегчить решение уравнения.

Пример. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x^3+\frac{8x^2}{3}-\frac{35x}{3}}+\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{13x-2x^3-x^2-6}=0.$$

Решение. Данное уравнение имеет весьма громоздкий вид и неясно как подойти к его решению. Поэтому найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} x^3+\frac{8x^2}{3}-\frac{35x}{3}\geq 0 \\ x-6\geq 0 \\ 13x-2x^3-x^2-6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+\frac{8x}{3}-\frac{35}{3}\right)\geq 0 \\ x\geq 6 \\ 2x^3+x^2-13x+6\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+5)\left(x-\frac{7}{3}\right)\geq 0 \\ x\geq 6 \\ (x-2)\left(2x^2+5x-3\right)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in[-5;0]\cup\left[\frac{7}{3};+\infty\right) \\ x\in[6;+\infty) \\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[6;+\infty) \\ x\in(-\infty;-3]\cup\left[\frac{1}{2};2\right] \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Получим, что область допустимых значений данного уравнения является пустым множеством и, следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

- При решении иррациональных уравнений бывает полезно воспользоваться монотонностью функций.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2(x+6)} = 6 - \sqrt[3]{x+6}$.

Решение. Один корень данного уравнения $x = 2$ легко найти подбором. Покажем, что других корней нет. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2(x+6)} + \sqrt[3]{x+6} = 6$.

По свойству степенных функций функции $y_1(x) = \sqrt{2(x+6)}$ и $y_2(x) = \sqrt[3]{x+6}$ являются возрастающими на промежутке $[-6;\infty)$, где они обе определены. Поэтому их сумма $y(x) = \sqrt{2(x+6)} + \sqrt[3]{x+6}$ на этом промежутке также возрастает, следовательно, она принимает каждое свое значение (в том числе и 6) только один раз. Поэтому других корней нет.

Ответ: $x = 2$.

- В некоторых случаях можно освободиться от иррациональности в уравнении умножением обеих частей уравнений на некоторое не обращающееся в нуль выражение.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$.

Решение. Умножим обе части заданного уравнения на выражение $\sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}$, являющееся сопряженным к левой части данного уравнения. После приведения подобных членов получим уравнение:

$$7 = \sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1},$$

которое эквивалентно исходному, так как уравнение $\sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1} = 0$ действительных корней не имеет. Складывая заданное уравнение и полученное, получим:

$$\sqrt{3x^2+5x+8} = 4.$$

Возводя обе части в квадрат, получаем квадратное уравнение $3x^2+5x-8=0$, корни которого $x_1=-8/3$, $x_2=1$. Делая проверку, убеждаемся, что оба найденных числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1=-8/3$, $x_2=1$.

$x = \frac{1}{2}$

Решить уравнение:

1. $\sqrt{x^2-3}=1$

2. $\sqrt{x-9}=\sqrt{1-x}$.

3.x = $\sqrt{x+1}$.

4. $\sqrt{x+5}$ + $\sqrt{20-x}$ = 7.

Самостоятельная работа

Вариант 1

Решите уравнения: а) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$

б) $\sqrt{7-\sqrt{x-1}}=2$

в) x-$\sqrt{x+1}=5$

Вариант 2

Решите уравнения: а) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-5}=3$

б) $\sqrt{2x^2-3x+2}=4-x$

в) $\sqrt[3]{x-1}+2\sqrt[6]{x+1}=3$

Вариант 3

Решите уравнения: а) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x-5}=3$

б) $\sqrt{2x^2-3x+2}=4-x$

в) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$

Практическое занятие № 22

Тема: Степень с рациональным показателем
Цель: Научить студентов работать со степенью с рациональным показателем

Теоретический блок

Определение. Степенью числа a>0 с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где *m* - целое число, а *n* - натуральное (n>1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ a>0$$

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Свойства степени с рациональным показателем.

$a > 0$, $b > 0$, $p \in \mathbf{Q}$, $q \in \mathbf{Q}$

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
2. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$;
3. $(a^p)^q = a^{pq}$;
4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$.

Решение упражнений:

1. Вычислить: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

Решение: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5$.

Ответ: 5.

2. Упростить выражения: $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab.$$

Ответ: *ab*.

3. Упростить выражения: $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$.

Решение:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1 - a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1 + a)} =$$

$$= 1 + a - (1 - a) = 2a$$

Ответ: 2*a*.

4. Упростить:

$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$;

$\sqrt[4]{\sqrt[6]{a}}$;

$\sqrt[20]{a^5}$.

$\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^5}$; $\sqrt[4]{x}\sqrt{x}$; $\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}$.

2) 3)

5. Вычислить

$27^{\frac{1}{3}}$;

$81^{-\frac{3}{4}}$;

Домашнее задание:

$\frac{1}{16}^{-\frac{1}{2}}$.

$8x^{\frac{5}{6}}:4x^{-\frac{2}{3}}$;

$\left(x^{1/2}-y^{1/2}\right)\left(x^{1/2}+y^{1/2}\right)$.

Практическое занятие № 23

Тема: Решение показательных уравнений

Цель: Научить решать показательные уравнения

Теоретический блок

Методы решения показательных уравнений

1. Простейшие показательные уравнения

Тип уравнения	Вид уравнения	Метод решения		
1	$a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$	$f_1(x) = f_2$ (x)		
2	$a^{f(x)} = b$	b = a	$b \neq a$ b>0	$b \neq a$ $b \leq 0$
		$a^{f(x)} = a^1$ f(x) = 1	f(x) = $\log_a b$	Решений нет

Примеры.

Пример 1. Решите уравнение: $3^{4x-5} = 3^{x+4}$.

Решение.

$3^{4x-5} = 3^{x+4} \Leftrightarrow 4x - 5 = x+4 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x = 3$.

Ответ:3

Пример 2. Решите уравнение: $2^{x-4} = 3$.

Решение.

$2^{x-4} = 3 \Leftrightarrow x- 4 = \log_2 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3 + 4 \Leftrightarrow x = \log_2 3 + \log_2 16 \Leftrightarrow x = \log_2 48$.

Ответ: $\log_2 48$.

Пример 3. Решите уравнение: $7^{x^2-3x} = -7$.

Решение.

$7^{x^2-3x} = -7$, решений нет, так как $7^{x^2-3x} > 0$ для $x \in R$.

Ответ: $\{\emptyset\}$.

2. Методы преобразования показательных уравнений к простейшим.

А. Метод уравнивания оснований.

Примеры.

Пример 1. Решите уравнение: $27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$.

Решение.

$27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3^3 3^{4x-9} - (3^2)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3^{3+(4x-9)} - 3^{2(x+1)} = 0 \Leftrightarrow 3^{4x-6} - 3^{2x+2} = 0 \Leftrightarrow 3^{4x-6} = 3^{2x+2} \Leftrightarrow 4x-6=2x+2 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x=4$.

Ответ: 4.

Пример 2. Решите уравнение: $2^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x - 60^{4x-15} = 0$.

Решение.

$2^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x - 60^{4x-15} = 0 \Leftrightarrow (2^2)^x \cdot 3^x \cdot 5^x = 60^{4x-15} \Leftrightarrow 4^x 3^x 5^x = 60^{4x-15} \Leftrightarrow (4 \cdot 3 \cdot 5)^x = 60^{4x-15} \Leftrightarrow 60^x = 60^{4x-15} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=4x-15 \Leftrightarrow 3x=15 \Leftrightarrow x=5$.

Ответ: 5.

В. Уравнения, решаемые разложением на множители.

Примеры.

Пример 1. Решите уравнение: $x \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x + 8x-16$.

Решение.

$x \cdot 2^x = 22^x + 8x-16 \Leftrightarrow x2^x - 22^x = 8 \cdot (x-2) \Leftrightarrow 2^x(x-2) - 8 \cdot (x-2) \Leftrightarrow (x-2) \cdot (2^x - 8) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2^x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=2^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{2;3\}$

Пример 2 . Решите уравнение: $5^{2x}-7^{x}+5^{2x}\cdot 35+7^{x}\cdot 35=0$

Решение.

5^{2x} - 7^{x} - $5^{2x}\cdot 35$ +$7^{x}\cdot 35$ = 0 <=> (5^{2x} - 7^{x}) $-(5^{2x}\cdot 35-7^{2x}\cdot 35)=0 \Leftrightarrow (5^{2x}-7^{2x})-35\cdot(5^{2x}-7^{2x})=0 \Leftrightarrow$ $(5^{2x}-7^{2x})\cdot(1-35)=0 \Leftrightarrow (5^{2x}-7^{2x})\cdot(-34)=0 \Leftrightarrow 5^{2x}-7^{2x}=0 \Leftrightarrow (5^2)^x=7^x \Leftrightarrow \frac{10^x}{7^x}=1 \Leftrightarrow (\frac{10}{7})^x=1 \Leftrightarrow (\frac{10}{7})^x=(\frac{10}{7})^0 \Leftrightarrow x=0.$

Ответ: 0.

С. Уравнения, которые с помощью подстановки $\alpha^{f(x)}$ = t, t>0 преобразуются к квадратным уравнениям (или к уравнениям более высоких степеней).

Пусть $\boldsymbol{A\cdot\alpha^{2f(x)}+B\cdot\alpha^{f(x)}+C=0}$, где A, B, C - некоторые числа. Сделаем замену: $\boldsymbol{\alpha^{f(x)}=t}$, $\boldsymbol{t}$ >0, тогда A$\cdot t^2$ + B$\cdot t$ + C = 0

Решаем полученное уравнение, находим значения t, учитываем условие t >0 , возвращаемся к простейшему показательному уравнению $\alpha^{f(x)}$ = t, решаем его и записываем ответ.

Примеры.

Пример 1 . Решите уравнение: 2^{2+x} - 2^{2-x} = 5.

Решение.

2^{2+x} - 2^{2-x} = 5 <=> $2^2 2^x$ - $\frac{2^2}{2^x}$ = 15 <=> $4(2^x)^2$ - 4 = 15$\cdot 2^x$

Делаем замену t = 2^x, t > 0. Получаем уравнение 4$\cdot t^2$ - 4 = 15t <=> $4t^2$ - 15t - 4=0

<=> $\left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$, t = $-\frac{1}{4}$ не удовлетворяет условию t > 0.

Вернемся к переменной x:

2^x = 4<=> $2^x = 2^2$ <=> x=2.

Ответ: 2

Пример 2. Решите уравнение: $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3.$

Решение.

$5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3 \Leftrightarrow 5^{2\cdot(x-2)+1}-2\cdot 5^{x-2}=3 \Leftrightarrow$ $5\cdot(5^{x-2})^2-2\cdot 5^{x-2}-3=0$.

Делаем замену: $5^{x-2}=t,\ t>0$, тогда $(5^{x-2})^2=t^2$. Получаем уравнение:

$5\cdot t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{3}{5} \\ t=1 \end{array}\right.$, t = $-\frac{3}{5}$ не удовлетворяет условию t $>0.$

Вернемся к переменной X: $5^{x-2}=1 \Leftrightarrow 5^{x-2}=5^0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$

Ответ: 2.

Практическое занятие № 24

Тема: Логарифм. Логарифм числа. Правила действий с логарифмами
Цель: Научить вычислять логарифмы
Теоретический блок

Логарифм числа b по основанию a определяется как показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b (Логарифм существует только у положительных чисел).

Логарифм в переводе с греческого буквально означает "число, изменяющее отношение".

Специальные обозначения:

1. Натуральный логарифм $\ln a$ - логарифм по основанию e,
2. Десятичный логарифм $\lg a$ - логарифм по основанию 10.

Свойства логарифмов:

1° $a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество.

2° $\log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$

3° $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$

Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю. Это возможно потому, что из любого действительного числа можно получить 1 только возведя его в нулевую степень.

4° $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

5° $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов сомножителей.

6° $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ -

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания.

7° $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$

8° $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9° $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ - переход к новому основанию.

Примеры:

1. Найдите значение выражения:

$$6 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7}$$

$$6 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7} = 6 \cdot \log_7 7^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_7 7 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 2$$

Использовали:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Ответ: 2

2. Найдите значение выражения $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25$

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \frac{1}{\log_3 0,8} \cdot \log_3 1,25 = \frac{\log_3 1,25}{\log_3 0,8} =$$

$$= \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = \log_{\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}} \frac{5}{4} = \frac{1}{-1} \cdot \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{4} = -1 \cdot 1 = -1$$

Использовали:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Ответ: −1

3.Найдите значение выражения:

$$5^{\log_{25} 49}$$

$$5^{\log_{25} 49} = 5^{\log_{25} 7^2} = 5^{\,2 \cdot \log_{25} 7} = (5^2)^{\log_{25} 7} =$$

$$= 25^{\log_{25} 7} = 7$$

Ответ: 7

4. Найдите значение выражения:

$$8^{2 \cdot \log_8 3}$$

$$8^{2 \cdot \log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Ответ: 9

5.Найдите значение выражения:

$$64^{\log_8 \sqrt{3}}$$

$$64^{\log_8 \sqrt{3}} = (8 \cdot 8)^{\log_8 \sqrt{3}} = 8^{\log_8 \sqrt{3}} \cdot 8^{\log_8 \sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

Ответ: 3

6. Найдите значение выражения:

$$\frac{24}{3^{\log_3 2}}$$

$$\frac{24}{3^{\log_3 2}} = \frac{24}{2} = 12$$

Ответ: 12

7. Найдите значение выражения:

$$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}$$

$$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13} = \log_{13^{-1}} 13^{0,5} = \frac{1}{-1} \cdot \log_{13} 13^{0,5} = -1 \cdot 0,5 = -0,5$$

Ответ: – 0,5

8 . Найдите значение выражения $\log_3 8,1 + \log_3 10$.

$$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3 (8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$$

Ответ: 4

9. Найдите значение выражения:

$$\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13}$$

$$\frac{\log_6 \sqrt{13}}{\log_6 13} = \log_{13} \sqrt{13} = \log_{13} 13^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

10. Вычислите значение выражения:

$$\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2}$$

$$\left(3^{\log_2 3}\right)^{\log_3 2} = \left(3^{\log_3 2}\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$$

Ответ: 3

11. Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = 1/7$.
Преобразуем данное выражение:

$$\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + 3\log_a b$$

Определим значение выражения $\log_a b$. Нам известно, что

$$\log_b a = \frac{1}{7}$$

Используем свойство:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{\log_a b}$$

Следовательно $\log_a b = 7$.
Таким образом:

$$1 + 3\log_a b = 1 + 3 \cdot 7 = 22$$

Ответ: 22
12. Найдите $\log_a(a:b^3)$, если $\log_a b = 5$.

$$\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - \log_a b^3 = 1 - 3\log_a b =$$

$$= 1 - 3 \cdot 5 = -14$$

Ответ: –14

13. Найдите $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_a b = -2$.

$$\log_a(a^2b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2\log_a a + 3\log_a b =$$

$$= 2 \cdot 1 + 3\log_a b = 2 + 3 \cdot (-2) = -4$$

Ответ: –4

14. Найдите значение выражения $\log_a(a^4b^9)$, если $\log_b a = 1/3$.

$$\log_a(a^4b^9) = \log_a a^4 + \log_a b^9 = 4\log_a a + 9\log_a b =$$

$$= 4 \cdot 1 + 9\log_a b$$

$$\log_b a = \frac{1}{3}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{\log_a b} \qquad \log_a b = 3$$

$$4 \cdot 1 + 9\log_a b = 4 + 9 \cdot 3 = 31$$

Ответ: 31

15. Найдите $\log_a(a^7:b^3)$, если $\log_a b = 10$.

$$\log_a \frac{a^7}{b^3} = \log_a a^7 - \log_a b^3 = 7\log_a a - 3\log_a b =$$

$$= 7 \cdot 1 - 3 \cdot 10 = -23$$

Ответ: –23

16. Найдите $\log_a(ab^{10})$, если $\log_a b = 7$.

$$\log_a(ab^{10}) = \log_a a + \log_a b^{10} = 1 + 10\log_a b =$$

$$= 1 + 10 \cdot 7 = 71$$

Ответ: 71

Практическое занятие № 25

Тема: Преобразования алгебраических выражений
Цель: Научить преобразовывать алгебраические выражения

Теоретический блок

Определение. Алгебраическим выражением называется выражение, получаемое из постоянных и переменных при помощи операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня.

Примеры алгебраических выражений:

$$E = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}; \qquad E(x,y) = \left(\frac{x+\sqrt[3]{2xy^2}-1}{3\sqrt{z-x}-\sqrt{y}}\right)^{\frac{5}{4}};$$

$$E(x,y,z) = \frac{x+y}{xy} - z; \qquad E(x,y) = (x+y)^3 - 3xy(x+y).$$

Определение. Областью допустимых значений (сокращенно *ОДЗ*) алгебраического выражения $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ ($D(E)$) называется множество всех наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которых выражение $E(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет смысл.

Например, *ОДЗ* выражения $E(x,y) = \frac{x+y}{xy} - z$ является $D(E)$ = {(x,y) | x Î **R**, y Î **R**, $xy \neq 0$}, *ОДЗ* выражения $E(x,y) = \sqrt{xy} - 2z$, является множество {(x,y,z) | x, y, z Î **R**, $xy \geq 0$}.

Определение. Алгебраические выражения E_1 и E_2 называются тождественно равными на множестве M Ì $D(E_1)$Ç$D(E_2)$, если при любых значениях переменных из Mсоответствующие числовые значения этих выражений равны.

Например, $\sqrt{x^2} = x$ на множестве [0;+¥), $\sqrt{a^2} = -a$, на множестве (-¥;0], $\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$ на множестве **R**\{-1}, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ на множестве {(x,y) | x Î**R**, y Î **R**}.

Определение. Тождественным преобразованием алгебраического выражения на множестве M Í $D(E)$ называется замена этого выражения на тождественно равное ему на множестве M

Замечание. Отметим, что иногда опускают множество, на котором алгебраические выражения тождественно равны, имея при этом ввиду их тождественное равенство на пересечении областей допустимых значений.

Например,

$$\sqrt{a^2} = |a|,\ (M = \mathbf{R}), \qquad \frac{a(a+1)}{a} = \frac{a^2-1}{a-1},\ (M = \mathbf{R} \setminus \{0;1\}).$$

При выполнении тождественных преобразований оказываются полезными следующие формулы.

I. Формулы сокращенного умножения

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$,
3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Эти формулы получаются как следствия из более общих формул:

5. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$ (n Î **N**),
6. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + ... - ab^{2n-1} + b^{2n})$ (n Î **N**),
7. (бином Ньютона)

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^n a^n b^0,$$

где n Î **N**, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

II. Свойства степеней

Следующие свойства справедливы для любых положительных чисел a и b и любых действительных чисел a и b.

1. $a^0 = 1$;
2. $a^{a+b} = a^a \cdot a^b$;
3. $a^{\alpha-\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta}$;
4. $(a^a)^b = a^{ab}$;
5. $(ab)^a = a^a \cdot b^a$;
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$;
7. $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$.

Замечание 1. Отметим, что отрицательные числа также можно возводить в некоторые степени (целые и, более общо, рациональные вида $\frac{m}{2n-1}$ где m - целое, n - натуральное).

Замечание 2. $0^a = 0$, для любого a > 0.

III. Свойства радикалов

1. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n - \text{ нечетное,} \\ |a|, & \text{если } n - \text{ четное.} \end{cases}$
2. $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{a} \cdot \sqrt[2k]{b}$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$, k Î **N**,
3. $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|}\,\sqrt[2k]{|b|}$, если $ab \geq 0$, k Î **N**.
4. $\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a}\,\sqrt[2k+1]{b}, \quad k \in \mathbf{N}$.
5. $(\sqrt[m]{a})^k = \sqrt[m]{a^k}$, где $a \geq 0$, если m - четно, a Î **R**, если m - нечетно.

6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$ где $a \geq 0$, $b > 0$, n - четно или $b \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$, если n - нечетно.
7. $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}, \quad a \geq 0.$
8. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a},$ где $a \geq 0$, если m - четно или n четно, $a \in \mathbf{R}$, если $m \cdot n$ - нечетно.
9. $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, \quad a \in \mathbf{R}.$
10. $\sqrt{a \pm b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - cb^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - cb^2}}{2}},$ где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a^2 \geq b^2c$.

Пример 1. Определить *ОДЗ* алгебраических выражений:

$$a)\ E(x) = \sqrt[6]{x + x^2 - 2x^3};$$
$$b)\ E(x,y) = \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{|x - y|} + \frac{y}{x + y}\right);$$
$$c)\ E(a,b,c,d) = \frac{a}{b + c} + \frac{\sqrt{d}}{b^2c + c^2b}.$$

Решение. а) *ОДЗ* данного выражения определяется из неравенства $x + x^2 - 2x^3 \geq 0$, которое решаем при помощи метода интервалов:

$$x + x^2 - 2x^3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(1 + x - 2x^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2x + 1)(1 - x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -{}^1/_2] \cup [0;1].$$

Таким образом, $D(E) = (-\infty; -{}^1/_2] \cup [0;1]$.

b) Отметим, что выражение имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x^2 + y\text{<sup2< sup="">} \neq 0,\text{</sup2<>} \\ |x - y| \neq 0, \\ x + y \neq 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $D(E) = \{(x,y) \mid x \neq y, \ \ x \neq -y\}$.

c) Так как знаменатель дроби должен быть отличен от нуля, а корень второй степени существует только из неотрицательных выражений, то для определения *ОДЗ* получим систему

$$\begin{cases} b + c \neq 0, \\ b^2c + c^2b \neq 0, \\ d \geq 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b + c \neq 0, \\ bc(b + c) \neq 0, \\ d \geq 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b + c \neq 0, \\ b \neq 0, \\ c \neq 0, \\ d \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, *ОДЗ* исходного выражения равна $\{(a,b,c,d) \mid b + c \neq 0, \ \ b \neq 0, \ \ c \neq 0, \ \ d \geq 0\}$.

Пример 2. Определить, являются ли выражения A и B тождественно равными на множестве M.

$$a)\ A=\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{ab(a-b)},\quad B=\frac{1}{ab},\quad M=\{(a,b)\mid a>b>0\};$$

$$b)\ A=\frac{a-\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}},\quad B=\frac{2a}{a+\sqrt{3}},\quad M=\{a\mid a>\sqrt{3}\}.$$

Решение. a) Так как $a\sqrt{a}=(\sqrt{a})^3,\ \ b\sqrt{b}=(\sqrt{b})^3,\ \ a=(\sqrt{a})^2,\ \ b=(\sqrt{b})^2$ на множестве*M*, то, применив формулу сокращенного умножения, получим:

$$A=\left(\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{ab((\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2)}=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})((\sqrt{a})^2-\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=$$

$$=\left[(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}\frac{1}{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=$$

$$=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\cdot\frac{1}{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Условие $a > b > 0$ влечет $\sqrt{a}>\sqrt{b},$ и, следовательно, $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$ Отсюда получаем, что $A=(\sqrt{a}-\sqrt{b})\frac{1}{ab(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{1}{ab}=B.$ Таким образом, выражения *A* и *B*тождественно равны на множестве *M*.

b) Подобно предыдущему примеру

$$A=\frac{a-\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}=\frac{a-\sqrt{3}}{\sqrt{\dfrac{(a^2+3)^2-4a^2\cdot 3}{4a^2}}}=$$

$$=\frac{(a-\sqrt{3})\cdot 2|a|}{\sqrt{(a^2-3)^2}}=\frac{(a-\sqrt{3})\cdot 2|a|}{|a^2-3|}=\frac{2a}{a+\sqrt{3}}=B.$$

При преобразованиях учитывается, что, если $a>\sqrt{3},$ то $\sqrt{a^2}=a,$ и $\sqrt{(a^2-3)^2}=|a^2-3|=a^2-3.$

Пример 3. Упростить выражения:

$a)\ \dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2};$

$b)\ \left(\dfrac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\dfrac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}};$

$c)\ \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3};$

$d)\ \dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)};$

$e)\ \dfrac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{a^2c^2}{(a-b)(c-b)}+\dfrac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)};$

$f)\ \dfrac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{z-x}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{x-y}{(z-x)(z-y)};$

$g)\ \dfrac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|}.$

Решение. *ОДЗ* выражения определяется из системы $\begin{cases} b^2-4\ge 0, \\ 2b+2\sqrt{b^2-4}\ge 0, \\ \sqrt{b^2-4}+b+2>0, \end{cases}$ решая которую, получим $b \ge 2$.

Выполним равносильные на *ОДЗ* преобразования:

$$\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{b-2})^2+(\sqrt{b+2})^2+2\sqrt{b-2}\sqrt{b+2}}}{\sqrt{b-2}\sqrt{b+2}+(\sqrt{b+2})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})^2}}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})}=\frac{|\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}|}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})}=\frac{1}{\sqrt{b+2}},$$

так как на *ОДЗ* $\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}\ge 2$,
следовательно, $|\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}|=\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}$. Таким образом, при $b \ge 2$ исходное выражение равно $\dfrac{1}{\sqrt{b+2}}$.

b) *ОДЗ* данного выражения является множество $\{(m,n) \mid m\ge 0,\ \ n\ge 0,\ \ m\ne n\}$.
Обозначив $\sqrt[6]{m}=a,\ \ \sqrt[6]{n}=b,$ получим $\sqrt[3]{m}=a^2,\ \ \sqrt[3]{m^2}=a^4$, $m = a^6$ и $\sqrt[3]{n}=b^2,\ \ \sqrt[3]{n^2}=b^4,$ $n = b^6$ выражение принимает вид

$$\left(\frac{a^2b^4+a^4b^2}{a^4+2a^2b^2+b^4}-2b^2+\frac{a^6-b^6}{a^4-b^4}\right)\frac{1}{a+b}=$$

$$=\left(\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}-2b^2+\frac{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\right)\frac{1}{(a+b)}=$$

$$=\frac{a^2b^2-2b^2(a^2+b^2)+a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a+b}=$$

$$=\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a+b}=\frac{(a^2+b^2)(a-b)(a+b)}{(a^2+b^2)(a+b)}=a-b.$$

Таким образом, исходное выражение на *ОДЗ* тождественно равно $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$.

c) На *ОДЗ*: $\{(a,b,c)\ |\ a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a^2 + c^2 \neq 0\}$ выражение преобразуется следующим образом:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3}=\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc}(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3}=$$

$$=\frac{4\sqrt{bc}+bc+3}{\sqrt{bc}+3}=\frac{3\sqrt{bc}+3+\sqrt{bc}+bc}{\sqrt{bc}+3}=\frac{3(\sqrt{bc}+1)+(1+\sqrt{bc})\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}+3}=$$

$$=\frac{(\sqrt{bc}+1)(\sqrt{bc}+3)}{\sqrt{bc}+3}=\sqrt{bc}+1.$$

d) *ОДЗ* данного выражения является множество $\{(a,b,c)\ |\ a \neq b, a \neq c, b \neq c\}$. Приводя выражение к общему знаменателю, получим:

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{(a-b)(a-c)(c-b)}.$$

Учитывая вид знаменателя, разложим на множители числитель:

$a^3(c - b) + b^3(a - c) + c^3(b - a) = c(a^3 - b^3) + ab(b^2 - a^2) + c^3(b - a) =$
$= (a - b)(c(a^2 + ab + b^2) - ab(a + b) - c^3) = (a - b)(c(a^2 - c^2) + ab(c - a) + b^2(c - a)) =$
$= (b - c)(a - b)(-a^2b - a^2c + c^2(a + b)) = (a - b)(b - c)(b(c^2 - a^2) + ac(c - a)) =$
$= (a - b)(b - c)(c - a)(ab + bc + ca).$

Следовательно, на *ОДЗ* исходное выражение тождественно равно $ab + bc + ca$.

f) *ОДЗ* выражения является множество $\{(x,y,z)\ |\ x \neq y, y \neq z, z \neq x\}$. Первое слагаемое выражения преобразуем следующим образом:

$$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}=\frac{x-z-x+y}{(x-y)(x-z)}=\frac{x-z}{(x-y)(x-z)}-\frac{x-y}{(x-y)(x-z)}=\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-z}.$$

Аналогично преобразуются и другие слагаемые:

$$\frac{z-x}{(y-z)(y-x)} = \frac{1}{y-z} - \frac{1}{y-x};$$

$$\frac{x-y}{(z-x)(z-y)} = \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y}.$$

Следовательно,

$$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} =$$

$$= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z} + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y} =$$

$$= \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}.$$

g) *ОДЗ* выражения равна **R**\{-2;0;3}. Учитывая, что выражение содержит |*m*| и |*m* - 3|, рассмотрим три случая:

1. пусть *m* Î (-¥;-2)È(-2;0); тогда |*m*| = -*m*, |*m* - 3| = -(*m* - 3), и выражение принимает вид

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{-m(m-3)}{-(m+2)(m-3)m} = \frac{1}{m+2};$$

2. пусть *m* Î (0;3); тогда |*m*| = *m*, |*m* - 3| = -(*m* - 3), и выражение принимает

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{-m(m-3)}{(m+2)(m-3)m} = -\frac{1}{m+2};$$

3. пусть *m* Î (3;+¥); тогда |*m*| = *m*, |*m* - 3| = *m* - 3 и выражение принимает вид

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \frac{1}{m+2}.$$

Таким образом,

$$\frac{m|m-3|}{(m^2-m-6)|m|} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+2}, & \text{если } m \in (-\infty;-2) \cup (-2;0) \cup (3;+\infty), \\ -\dfrac{1}{m+2}, & \text{если } m \in (0;3). \end{cases}$$

Пример 4. Разложить на множители:

a) $(x + y)(y + z)(z + x) - xyz$;
b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$;
c) $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
d) $x^5 + x + 1$.

Решение. а) Прибавляя и вычитая $z(y + z)(z + x)$, а затем группируя удобным образом, получим:

$$(x + y)(y + z)(z + x) + z(y + z)(z + x) - z(y + z)(z + x) - xyz =$$

$= (y + z)(z + x)(x + y + z) - z((y + z)(z + x) - xy) =$
$= (y + z)(z + x)(x + y + z) - z(z^2 + yz + zx) =$
$= (y + z)(z + x)(x + y + z) - z^2(x + y + z) =$
$= (x + y + z)((y + z)(z + x) - z^2) = (x + y + z)(xy + yz + zx).$

b) Применяется формула суммы кубов и решается подобно предыдущему упражнению

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + z(z^2 - 3xy) =$$
$$= (x + y + z)(x^2 - xy + y^2) + z(z^2 - 3xy - x^2 + xy - y^2) =$$
$$= (x + y + z)(x^2 - xy + y^2) + z(z^2 - (x + y)^2) =$$
$$= (x + y + z)(x^2 - xy + y^2 + z(z - x - y)) =$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

c) Применяя формулы сокращенного умножения, получим:

$$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^9 - 1}{x - 1} = \frac{(x^3)^3 - 1^3}{x - 1} =$$
$$= \frac{(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1)}{x - 1} = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1).$$

d) $x^5 + x + 1 = 1 + x + x^2 - x^2 + x^5 = 1 + x + x^2 - x^2(1 - x^3) = (1 + x + x^2) - x^2(1 - x)(1 + x + x^2) = (1 + x + x^2)(1 - x^2(1 - x)) = (1 + x + x^2)(1 - x^2 + x^3).$

Пример 5. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$a)\ \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}};\quad b)\ \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}};\quad c)\ \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}.$$

Решение. Умножая на выражение сопряженное знаменителю, получим:

a) $$\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6}}{4}.$$

b) Подобно примеру a) получим

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - 7} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{1 + 2\sqrt{15}} =$$
$$= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1)}{(2\sqrt{15})^2 - 1} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1)}{59}.$$

c) Из формулы (см., например, 4 b)):

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

следует

$$x + y + z = \frac{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)}{(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}.$$

На основании последнего соотношения получим

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{1^2+(\sqrt[3]{2})^2+(2\sqrt[3]{4})^2-\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{8}}{1^3+(\sqrt[3]{2})^3+(2\sqrt[3]{4})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt[3]{2}\cdot 2\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{7\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{4}-3}{23}.$$

Пример 6. Доказать, что приведенные выражения представляют собой целые числа. Вычислить эти числа.

$$a)\ \sqrt{|20\sqrt{7}-53|}-\sqrt{20\sqrt{7}+53},$$
$$b)\ \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt{3},$$
$$c)\ \sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}},$$

Решение. a) Выделяя полный квадрат под знаком радикала, получим

$$\sqrt{(5-2\sqrt{7})^2}-\sqrt{(5+2\sqrt{7})^2}=|5-2\sqrt{7}|-|5+2\sqrt{7}|=2\sqrt{7}-5-5-2\sqrt{7}=-10.$$

b) Выделяя полный куб под знаком корня третей степени, получим

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\sqrt[3]{8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}+\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}=2.$$

c) Учитывая, что

$$6\pm 2\sqrt{5}=5\pm 2\sqrt{5}+1=(\sqrt{5}\pm 1)^2,$$
$$\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{8+2\sqrt{5}-2}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1,$$
$$\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}=\sqrt{8-2\sqrt{5}-2}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1,$$
$$\sqrt{13-4(\sqrt{5}+1)}=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+4}=\sqrt{5}-2,$$
$$\sqrt{13+4(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{5}+2,$$
$$\sqrt{26+6(\sqrt{5}-2)}=\sqrt{14+6\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\cdot 3\cdot\sqrt{5}+9}=\sqrt{5}+3,$$
$$\sqrt{26-6\sqrt{\sqrt{5}+2}}=\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=|\sqrt{5}-3|=3-\sqrt{5}$$

получим, что исходное выражение равно

$$\sqrt{5}+3+3-\sqrt{5}=6.$$

Условные тождества.

Пример 7. a) Вычислить $x^2+y^2+z^2$, если $x+y+z=1$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

b) Доказать, что равенство $xyz=1$ влечет

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

c) Доказать, что если $x+y+z=0$, то $x^4+y^4+z^4=2(xy+yz+zx)^2$.

d) Доказать, что для любых трех последовательных членов геометрической прогрессии выполняется равенство

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3).$$

e) Доказать, что, если $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$, и не все числа x_j, $j = \overline{1,3}$ и y_i, $i = \overline{1,3}$ равны нулю, то

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \frac{2}{3}.$$

Решение. а) Из равенства $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ следует $xy + yz + zx = 0$. Отсюда

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 1^2 - 2\cdot 0 = 1.$$

b) Заметим, что условие $xyz = 1$ влечет

$$\frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{xyz+z+zx} = \frac{1}{z(1+x+xy)} = \frac{xy}{1+x+xy},$$
$$\frac{1}{1+y+yz} = \frac{1}{y(1+z+zx)} = \frac{1}{y\cdot z(1+x+xy)} = \frac{x}{1+x+xy}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1.$$

c) Учитывая, что $x + y = -z$, получим

$$2(xy + yz + zx)^2 = 2(xy + z(x + y))^2 = 2(xy - (x + y)^2)^2 =$$
$$= 2(x^2 + xy + y^2)^2 = 2(x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3) =$$
$$= x^4 + y^4 + (y^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4yx^3 + x^4) = x^4 + y^4 + (x + y)^4 =$$
$$= x^4 + y^4 + (-z)^4 = x^4 + y^4 + z^4.$$

d) Так как $a_1a_3 = a_2^2$ (характеристическое свойство геометрической прогрессии), следовательно,

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_2(a_1 + a_2 + a_3).$$

Отсюда получаем:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (a_1 + a_2 + a_3)^2 - 2a_2(a_1 + a_2 + a_3) = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3).$$

e) Рассмотрим векторы (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и $(1,1,1)$. Заметим, что эти векторы попарно ортогональны, так как их скалярные произведения равны нулю. Следовательно, векторы

$$g_1 = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right),$$
$$g_2 = \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}, \frac{y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}\right),$$
$$g_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{R}^3$. Значит, для каждого вектора xÎ $\mathbf{R}^3$ справедливо равенство

$$(x,g_1)^2 + (x,g_2)^2 + (x,g_3)^2 = 1.$$

В частности, для $x = e_1 = (1,0,0)$ получим

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2} + \frac{1}{3} = 1,$$

откуда и следует искомое равенство.

Задачи для решения

1. Определить *ОДЗ* выражений:

$a)\ y = \sqrt{3x - x^2}.$ *Ответ:* $[0;3]$.

$b)\ y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}.$ *Ответ:* $(-\infty;-1) \cup [4;+\infty)$.

$c)\ y = \dfrac{(b+c)(a+c)}{ab + cd + cb + ad}.$ *Ответ:* $\{(a,b,c) \mid a \neq -c,\ b \neq -d\}$.

2. Определить, являются ли выражения A и B тождественно равными на множестве M, если

$$A = \frac{a - \sqrt{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2 + 3^2}{2a} - 3\right)}}, \quad B = \frac{2a}{a + \sqrt{3}}, \quad M = \{a:\ a > \sqrt{3}\}.$$

Ответ: Да.

3. Упростить выражения:

a) $\left(\dfrac{\sqrt{a+1}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a+1}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a+1}-1}{\sqrt{a+1}+1}-\dfrac{\sqrt{a+1}+1}{\sqrt{a+1}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a+1}}{a}.$ *Ответ:* $-1.$

b) $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right):\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$ *Ответ:* $-\dfrac{a^4}{a^2+b^2}.$

c) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$ *Ответ:* $\sqrt{x}(x-1).$

d) $\dfrac{ab}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}.$ *Ответ:* $b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}.$

e) $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\dfrac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}.$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ при $a>1$; $-\dfrac{\sqrt{a+1}}{a+3}$ при $-1<a<1.$

f) $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}.$

Ответ: $\dfrac{1}{a+3}$ при $a>2$; $\dfrac{1}{a+2}$ при $a<2,\ a\neq-3,\ a\neq-1.$

g) $\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$ *Ответ:* $0.$

4. Разложить на множители:

a) x^4+x^2+1; *Ответ:* $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

b) $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$; *Ответ:* $3(x-y)(y-z)(z-x)$.

5. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

a) $\dfrac{9}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}.$ *Ответ:* $\dfrac{9(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}.$

b) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt[12]{5}+\sqrt[12]{3}}.$ *Ответ:* $\dfrac{\sqrt{7}(\sqrt[12]{5}-\sqrt[12]{3})(\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{2}.$

6. Доказать, что приведенные выражения представляют собой целые числа. Вычислить эти числа.

a) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}.$ *Ответ:* $1.$

b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}.$ *Ответ:* $3.$

Практическое занятие № 26

Тема: Преобразование выражений, содержащих радикалы
Цель: Научить выполнять преобразование выражений, содержащих радикалы
Теоретический блок

Определение:

Корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, которое при возведении в степень n дает число a.

Приведем математическую запись определения:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a} = b \\ a \geq 0 \\ n = 2, 3, 4 \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} b^n = a \\ b \geq 0 \end{cases} \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Например: $\sqrt[3]{125} = 5$, т. к. $5^3 = 125$; $\sqrt[4]{81} = 3$, т. к. $3^4 = 81$

Итак, в рассмотренном случае под корнем стоит строго неотрицательное число, но существует также корень из отрицательного числа – это корень нечетной степени, он существует для любых чисел.

$$\begin{cases} \sqrt[2n+1]{a} = b \qquad b^{2n+1} = a \\ a \in R \end{cases}$$

Например: $\sqrt[3]{-8} = -2$, т.к. $(-2)^3 = -8$, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$

Напомним свойства корней n-й степени, которыми мы будем пользоваться при всех преобразованиях:

$(\sqrt[n]{a})^n = a, \sqrt[n]{a^n} = a$ при $a \geq 0, n = 2, 3, 4 \ldots$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, при $a \geq 0, b \geq 0, n = 2, 3, 4 \ldots$ *(теорема 1);*

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, при $a \geq 0, b > 0, n = 2, 3, 4 \ldots$ *(теорема 2);*

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, при $a \geq 0, k = 1,2,3 \ldots, n = 2,3,4 \ldots$ *(теорема 3);*

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, при $a \geq 0, k = 2,3,4 \ldots, n = 2,3,4 \ldots$ *(теорема 4);*

$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$ при $a \geq 0, k = 2,3,4 \ldots, n = 2,3,4 \ldots, p = 1,2,3 \ldots$ *(теорема 5).*

Все дальнейшие преобразования и вычисления базируются на определении и свойствах корня n-й степени.

Пример 1. Вычислить:

$\sqrt{27 * 12}$

Разложим подкоренное выражение на более удобные множители и после этого извлечем корень:

$\sqrt{27 * 12} = \sqrt{3^3 * 3 * 4} = \sqrt{3^4 * 2^2} = 9 * 2 = 18$

Пример 2 Упростить выражение:

$$\left(\sqrt[12]{x^2}\right)^6 = \sqrt[12]{(x^2)^6} = \sqrt[12]{x^{12}} = x, x \geq 0$$

Пример 3 – упростить выражение:

$$\left(\sqrt[8]{y^5}\right)^2 = \sqrt[8]{(y^5)^2} = \sqrt[8]{y^{10}} = \sqrt[8]{y^9 * y} = y^3\sqrt[8]{y}$$

Пример 4:

$$\sqrt[8]{x^8y} = \sqrt[8]{x^8} * \sqrt[8]{y} = |x|\sqrt[8]{y}$$

Пример 5:

$x \geq 0$

$$\sqrt[8]{x^8y} = \sqrt[8]{x^8} * \sqrt[8]{y} = |x|\sqrt[8]{y} = x\sqrt[8]{y}$$

Пример 6:

$x < 0$

$$\sqrt[8]{x^8y} = \sqrt[8]{x^8} * \sqrt[8]{y} = |x|\sqrt[8]{y} = -x\sqrt[8]{y}$$

Пример 7:

$b < 0$

$$\sqrt{a^3b^2} = \sqrt{a^2ab^2} = \sqrt{a^2} * \sqrt{a} * \sqrt{b^2} = |a|\sqrt{a}|b| = -ab\sqrt{a}$$

Комментарий: поскольку а стоит под квадратным корнем в нечетной степени, то данная переменная неотрицательна, имеем право снять с нее модуль.

Пример 8:

$a > 0, b < 0$

$$\sqrt{\frac{4a^2}{b^6}} = \frac{2|a|}{|b^3|} = \frac{2a}{-b^3} = -\frac{2a}{b^3}$$

Пример 9:

$a < 0, b > 0$

$$\sqrt{\frac{25a^{18}}{9b^6}} = \frac{5\sqrt{(a^9)^2}}{3\sqrt{(b^3)^2}} = \frac{5|a^9|}{3|b^3|} = \frac{-5a^9}{3b^3} = -\frac{5a^9}{3b^3}$$

Пример 10:

$a > 0$

$$a\sqrt{2} = |a|\sqrt{2} = \sqrt{a^2}\sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$$

Пример 11:

$a < 0$

$a\sqrt{3} = -|a|\sqrt{3} = -\sqrt{a^2}\sqrt{3} = -\sqrt{3a^2}$

Пример 12:

$a \leq b$

$(a - b)\sqrt{m}$

$a \leq b \to b - a \geq 0$

$(a - b)\sqrt{m} = -(b - a)\sqrt{m} = -|b - a|\sqrt{m} = -\sqrt{(b - a)^2}\sqrt{m} = -\sqrt{(b - a)^2 m} =$

$= -\sqrt{(a - b)^2 m}$

Пример 13:

$a \geq 0, b \leq 0$

$ab\sqrt[4]{3} = -|ab|\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{(ab)^4 3} = -\sqrt[4]{3a^4 b^4}$

Пример 14:

$a \leq 0, b \leq 0$

$-ab\sqrt[4]{3} = -|ab|\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{(ab)^4 3} = -\sqrt[4]{3a^4 b^4}$

Практическое занятие № 27

Тема: Преобразование выражений, содержащих степени и логарифмы
Цель: Научить выполнять преобразование выражений, содержащих степени и логарифмы

Теоретический блок

Пример 1: Вычислить значение выражения:

$$\frac{\log_2^2\left(\sqrt{6}\right) - \log_2^2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\right)}$$

Решение:

$$\frac{\log_2^2\left(\sqrt{6}\right) - \log_2^2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\right)} =$$

Замечание: При решении задач, содержащих логарифмы, в первую очередь не следует сосредотачиваться на них. Никогда нельзя забывать просто про алгебру.

В числителе этой дроби можно применить формулу сокращенного умножения разность квадратов. Общий вид: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Замечание: В абсолютном большинстве задач следует все логарифмы привести к одному основанию.
В знаменателе воспользуемся формулой перехода к новому основанию и перейдем к основанию 2.

$$= \frac{\left(\log_2\left(\sqrt{6}\right) - \log_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)\left(\log_2\left(\sqrt{6}\right) + \log_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)}{\frac{\log_2\left(\sqrt{3}\right)}{\log_2\left(\sqrt{2}\right)}} =$$

В числителе в первой скобке применим свойство «Логарифм разности», а во второй – «Логарифм суммы».

Самый нижний этаж можно вычислить: $\log_2\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$= \frac{\log_2\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)\log_2\left(\sqrt{6}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\frac{\log_2\left(\sqrt{3}\right)}{\frac{1}{2}}} = \frac{\log_2(3)\log_2(2)}{2\log_2\left(\sqrt{3}\right)} =$$

Второй сомножитель в числителе можно вычислить, в знаменателе можно применить свойство «Логарифм степени».

$$= \frac{\log_2(3)}{\log_2\left(\sqrt{3^2}\right)} = \frac{\log_2(3)}{\log_2(3)} = 1$$

Ответ: 1

Пример 2:
Вычислить значение выражения:

$$\log_5(90) - \log_4(18)\cdot\log_7(4)\cdot\log_5(7)$$

Решение:

$$\log_5(90) - \log_4(18)\cdot\log_7(4)\cdot\log_5(7) =$$

Перейдем в каждом логарифме к одному основанию. К основанию 5.

$$=\log_5(90)-\frac{\log_5(18)}{\log_5(4)}\cdot\frac{\log_5(4)}{\log_5(7)}\cdot\log_5(7)=$$

$$=\log_5(90)-\frac{\log_5(18)}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\log_5(90)-\log_5(18)=\log_5\left(\frac{90}{18}\right)=\log_5(5)=1$$

Ответ: 1.

3.Найдите значение выражения $\left(\log_2 16\right)\left(\log_6 36\right)$.

$$\left(\log_2 16\right)\left(\log_6 36\right)=\left(\log_2 2^4\right)\left(\log_6 6^2\right)=\left(4\log_2 2\right)\left(2\log_6 6\right)=4\times 2=8$$

Ответ: 8

2. Задание B10 (№26846) Найдите значение выражения $\log_{0,25} 2$

Запишем число 0,25 в виде обыкновенной дроби:

$$\log_{0,25} 2=\log_{\frac{1}{4}} 2=\log_{2^{-2}} 2=-\frac{1}{2}\log_2 2=-0,5$$

Ответ: -0,5

4.Найдите значение выражения $\log_4 8$

Разложим на простые множители основание логарифма и число, стоящее под знаком логарифма. Затем вынесем степени за знак логарифма.

$$\log_4 8=\log_{2^2} 2^3=\frac{3}{2}\log_2 2=1,5$$

Ответ: 1,5

5.Найдите значение выражения $\log_5 60-\log_5 12$

Поскольку основания логарифмов равны между собой, просто применимсвойство логарифмов:

$$\log_5 60-\log_5 12=\log_5\frac{60}{12}=\log_5 5=1$$

Ответ: 1.

6.Найдите значение выражения $\log_5 0,2+\log_{0,5} 4$

Запишем десятичные дроби в виде обыкновенных и вынесем степени за знак логарифма:

$$\log_5 0,2+\log_{0,5} 4=\log_5 \frac{1}{5}+\log_{\frac{1}{2}} 4=-\log_5 5-\log_2 4=-1-2=-3$$

Ответ: -3

7 Найдите значение выражения $\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13}$

$$\frac{\log_7 13}{\log_{49} 13}=\frac{\log_7 13}{\log_{7^2} 13}=\frac{\log_7 13}{\frac{1}{2}\log_7 13}=2$$

Ответ: 2

7. Найдите значение выражения $\log_5 9\log_3 25$

$$\log_5 9\log_3 25=\log_5 3^2\log_3 5^2=$$

$$4\log_5 3\log_3 5$$

Ответ: 4

8. Найдите значение выражения $\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}$.

Разложим 50 на простые множители и упростим показатель степени в числителе дроби:

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}}=\frac{9^{\log_5 5^2\times 2}}{9^{\log_5 2}}=\frac{9^{\log_5 5^2+\log_5 2}}{9^{\log_5 2}}=\frac{9^{2+\log_5 2}}{9^{\log_5 2}}=\frac{9^2 9^{\log_5 2}}{9^{\log_5 2}}=81$$

9.Найдите значение выражения $\left(1-\log_2 12\right)\left(1-\log_6 12\right)$

Приведем оба логарифма к основанию 2, а затем разложим числа 12 и 6 на простые множители:

$$\left(1-\log_2 12\right)\left(1-\log_6 12\right)=\left(1-\log_2\left(2^2 3\right)\right)\left(1-\frac{\log_2\left(2^2 3\right)}{\log_2(2\times 3)}\right)=$$

$$\left(1-\left(2+\log_2 3\right)\right)\left(1-\frac{2+\log_2 3}{1+\log_2 3}\right)=\left(-1-\log_2 3\right)\left(1-\frac{2+\log_2 3}{1+\log_2 3}\right)$$

Обозначим $t=\log_2 3$, получим:

$$(-1-t)\left(\frac{1+t-2-t}{1+t}\right)=-(1+t)\frac{(-1)}{1+t}=1$$

Замечание. Можно было поступить так: представим число 12 как произведение 2 и 6.

$$\left(1-\log_2 12\right)\left(1-\log_6 12\right)=\left(1-\log_2 2-\log_2 6\right)\left(1-\log_6 2-\log_6 6\right)=\left(-\log_2 6\right)\left(-\log_6 2\right)=1$$

Ответ: 1

Практическое занятие № 28

Тема: Решение логарифмических уравнений
Цель: Научить решать простейшие логарифмические уравнения
Теоретический блок

Решение любого логарифмического уравнения также сводится к решению одного или нескольких простейших логарифмических уравнений:

1) $\log_a f(x)=\log_a g(x)$; 2) $\log_a f(x)=b$.

Уравнение (2) сводится к уравнению вида (1): $\log_a f(x)=\log_a a^b$.

Уравнения вида (1) сводятся к решению уравнений $f(x)=g(x)$ (потенцирование). При этом необходимо помнить, что уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ и $f(x)=g(x)$ не равносильны. При потенцировании происходит расширение области определения, а значит имеется опасность появления посторонних корней. Проверка – наилучшее средство против такой опасности.

1 тип – по определению логарифма:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=-2$.

Решение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=2x-1$; $2x–1=9$; $x=5$.

Проверка: $\log_{\frac{1}{3}}(10-1)=-2$; $\log_{\frac{1}{3}}9=-2$; $-2\log_3 3=-2$; $–2=–2$ – верно.

Ответ: $x=5$.

б) $\log_3(x^2+4x+12)=2$.

Решение: $3^2=x^2+4x+12$; $x^2+4x+12-9=0$; $x^2+4x+3=0$;

$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm1$; $x_1=–1$ и $x_2=–3$.

Проверка: $x=–1$, $\log_3(1–4+12)=2$; $\log_3 9=2$; $2\log_3 3=2$; $2=2$ – верно;

x=–3, $\log_3(9–12+12)=2$; $\log_3 9=2$; $2\log_3 3=2$; 2=2 – верно.

Ответ: x=–1, x=–3.

в) $\log_2\left(\frac{8}{2^x}-1\right)=x-2$.

Решение: $2^{x-2}=\frac{8}{2^x}-1$; $2^x\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{2^x}-1$. Пусть $2^x=y$, тогда уравнение запишем в виде $\frac{y}{4}-\frac{8}{y}+1=0$; $y^2+4y-32=0$;

$y_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+32}=-2\pm 6$; $y_1=4$; $y_2=-8$; $2^x=4$; $2^x=2^2$; x=2; $2^x\neq-8$.

Проверка: $\log_2\left(\frac{8}{4}-1\right)=2-2$; $\log_2 1=0$ – верно.

Ответ: x=2.

2 тип – уравнения, которые с помощью логарифмических тождеств сводятся к простейшим уравнениям:

а) lg(x–3)+lg(x–2)=1–lg5.

Решение: lg[(x–3)(x–2)]=lg10–lg5; $\lg(x^2–5x+6)=\lg 2$;

$x^2–5x+6=2$; $x^2–5x+4=0$; $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$; x=4 и x=1.

Проверка: x=4; lg(4–3)+ lg(4–2)=1– lg5; lg1+ lg2= lg2; lg2= lg2 – верно;

x=1; lg(1–3)+ lg(1–2)≠1– lg5, так как выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть всегда положительным.

Ответ: x=4;

б) $\frac{2\lg 2+\lg(x-3)}{\lg(7x+1)+\lg(x-6)+\lg 3}=\frac{1}{2}$.

Решение: $\frac{\lg 4+\lg(x-3)}{\lg(3(7x+1)(x-6))}=\frac{1}{2}$; $\frac{\lg(4(x-3))}{\lg(3(7x+1)(x-6))}=\frac{1}{2}$;

2 lg(4(x–3))= lg(3(7x+1)(x–6)); $\lg(4(x–3))^2=\lg(3(7x+1)(x–6))$.

Потенцируем: $16x^2–96x+144=21x^2–123x–18$; $–5x^2+27x+162=0$;

$5x^2–27x–162=0$; $x_{1,2}=\frac{27\pm\sqrt{3869}}{10}=\frac{27\pm 63}{10}$; $x_1=9$; $x_2=-\frac{36}{10}=-\frac{18}{5}$.

Проверка: $x=9$; $\frac{2\lg 2+\lg 6,}{\lg 64+\lg 3+\lg 3}=\frac{1}{2}$; $\frac{\lg 24}{2\lg 8+2\lg 3}=\frac{1}{2}$;

$\frac{\lg 24}{2\cdot\lg 24}=\frac{1}{2}$ – верно;

$x=-\frac{18}{5}$; $\frac{2\lg 2+\lg\left(-\frac{18}{5}-3\right)}{\lg\left(-\frac{126}{5}+1\right)+\lg\left(-\frac{18}{5}-6\right)+\lg 3}=\frac{1}{2}$ – ложно, так как подлогарифмическое выражение не может быть отрицательным.

Ответ: $x=9$;

в) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5,5$.

Решение. Воспользуемся формулой $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$;

$\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x=5,5$; $\frac{11}{6}\log_3 x=5,5$; $\log_3 x=3$; $x=27$.

Проверка: $\log_3 27+\log_9 27+\log_{27} 27=5,5$; $\log_3 3^3+\log_{3^2} 3^3+1=5,5$;

$3+\frac{3}{2}+1=5,5$ – верно.

Ответ: $x=27$;

г) $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$.

Решение: $\log_5((3x-11)(x-27))=\log_5(5^3\cdot 8)$.

Потенцируем: $(3x–11)(x–27)=1000$; $3x^2–92x–703=0$. $x_{1,2}=\frac{46\pm\sqrt{2116+2109}}{3}=\frac{46\pm 65}{3}$; $x_1=37$ и $x_2=-\frac{19}{3}$.

Проверка: 1. $\log_5(111-11)+\log_5(37-27)=3+\log_5 8$;

$\log_5 100+\log_5 10=\log_5 1000$; $\log_5 1000=\log_5 1000$ – верно.

2. $\log_5(-19-11)+\log_5\left(-\frac{19}{3}-27\right)\neq 3+\log_5 8$, так как выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительное.

Ответ: x=37.

3 тип – уравнения вида $P(\log_a x)=0$, где P(y) – многочлен 2 или 3 степени, или уравнения, сводящиеся к ним. Эти уравнения решаются с помощью подстановки: $y=\log_a x$.

а) $\log_3^2 x-\log_3 x^2-3=0$.

Решение: $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$. Пусть $\log_3 x=y$; $y^2-2y-3=0$. Решаем уравнение и получаем $y_1=3$ и $y_2=-1$; $y=3 \Rightarrow \log_3 x=3 \Rightarrow x=27$; $y=-1 \Rightarrow \log_3 x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$.

Проверка: x=27; $\log_3^2 27-\log_3 27-3=0$; $(\log_3 27)^2-\log_3 3^6-3=0$;

9–6–3=0 – верно;

$x=\frac{1}{3}$; $\log_3^2\frac{1}{3}-\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^2-3=0$; $(\log_3 3^{-1})^2-\log_3 3^{-2}-3=0$;

1+2–3=0 – верно.

Ответ: x=27; $x=\frac{1}{3}$;

б) $\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1$.

Решение. Прежде всего надо иметь в виду, что если в уравнениях встречаются логарифмы с разными основаниями, то их надо привести к одному основанию с помощью формулы: $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

В данном случае переходим к основанию 5. $\frac{\log_5(5x^2)}{\log_5 x}\cdot\log_5^2 x=1$;

$(\log_5 5+2\log_5 x)\log_5 x=1$. Обозначим $\log_5 x=y$; (1+2y)y=1;

$2y^2+y-1=0$; $y_1=-1$, $y_2=\frac{1}{2}$; $\log_5 x=-1$ или $\log_5 x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{5}$; $x=\sqrt{5}$.

Проверка: 1) $\log_{\frac{1}{5}}\left(5\cdot\frac{1}{25}\right)\cdot\log_5^2\frac{1}{5}=1$; $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}\cdot(-1)^2=1$; 1=1 – верно;

2) $\log_{\sqrt{5}}(5\cdot5)\cdot\log_5^2\sqrt{5}=1$; $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^4\cdot\left(\log_{(\sqrt{5})^2}\sqrt{5}\right)^2=1$;

$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$; 1=1 – верно.

Ответ: x=$\frac{1}{5}$; x=$\sqrt{5}$.

5 тип – логарифмирование обеих частей уравнения.

Пример: $x^{\lg x+1}=\frac{1000}{x}$.

Решение: $\lg x^{\lg x+1}=\lg\frac{1000}{x}$; (lgx+1)lgx=3–lgx; $\lg^2x$+lgx=3–lgx; y=lgx;

$y^2+2y-3=0$. Решаем уравнение: $y_1=-3$; $y_2=1$; lgx=–3 или lgx=1,

$x=10^{-3}$; x=10.

Проверка: 1) $(10^{-3})^{\lg 10^{-3}+1}=\frac{1000}{10^{-3}}$; $(10^{-3})^{-3+1}=10^6$; $(10^{-3})^{-2}=10^6$;

$10^6=10^6$ – верно;

2) $10^{\lg 10+1}=\frac{1000}{10}$; $10^2=100$; $10^2=10^2$ – верно.

Ответ: $x=10^{-3}$; x=10.

Практическое занятие № 29

Тема: Решение упражнений
Цель: Закрепить и систематизировать материал по данной теме
Теоретический блок

Логарифмическая функция

Пусть a — положительное число, не равное 1. Функцию, заданную формулой y =logax, называют логарифмической функцией с основанием a.

Основные свойства логарифмической функции.

1. Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел R+, т. е. D(loga)=R
2. Область значений логарифмической функции — множество всех действительных чисел.
3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при a>1) или убывает (при 0<a1 функция возрастает (в случае 0<ax1.

Логарифмическим уравнением называют уравнение, в котором неизвестная входит только в аргументы логарифмических функций при некоторых постоянных основаниях.

При решении логарифмических неравенств необходимо учитывать монотонность логарифмической функции $\log a\ x$: При 0 < a < 1 эта функция убывает, при a > 1 – возрастает.

Решение упражнений

1. Вычислите: а) $\log_{\sqrt{5}} 25\sqrt{5}$; б) $4^{2-\log_2 3}$; в) $\log_9 \log_4 64$; г) $4^{\log_2 5+\log_{0,25} 9}$.

2. Решить уравнения: а) $\log_{3x-1}(3x+1)=2$; б) $2x^2+5^{\log_5 x}=25^{\log_5 \sqrt{10}}$.

3. Вычислите: а) $\log_{\sqrt{8}} 4\sqrt{2}$; б) $25^{1+\log_5 3}$; в) $\log_4 \log_9 81$; г) $3^{\log_9 16-\log_{27} 8}$.

4. Найти x, если известно, что $\log_{0,1} x = 4\log_{0,1} 3 - \frac{2}{3}\log_{0,1} 27 - 2\log_{0,1} 6$.

5. Найти x, если известно, что $\log_{0,1} x = 2\log_{0,1} 6 - 0{,}5\log_{0,1} 100 + 3\log_{0,1} \sqrt[3]{20}$.

6. Вычислить: а) $\dfrac{\log_4 45 + \log_4 \frac{1}{3}}{\log_4 75 + \log_4 3}$; б) $\dfrac{\log_5 2 - \log_5 4}{\log_5 16 - \log_5 0{,}5}$.

7. Найдите область определения каждой из функций:
1) $y=\sqrt{9-x^2}\cdot \ln x^2$; 2) $y=\sqrt{\ln(x+2)}$; 3) $y=\log_{0,5}(x^2-2x)+\sqrt{9-x^2}$.
8. Найдите область определения каждой из функций:
1) $y=\sqrt{4-x^2}\cdot \ln(x-1)^2$; 2) $y=\sqrt{\ln(x-3)}$; 3) $y=\log_{0,3}(x^2+3x)+\sqrt{49-x^2}$.

Домашнее задание:
1. Вычислить: а) $\dfrac{3\log_7 3 - \log_7 27}{\log_7 3 + \log_7 9}$; б) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 7 - \lg 14}$.

2. Решить уравнения: а) $\log_{2x-1} 4{,}5x = 2$; б) $3x^2 + 0{,}5^{\log_{0,5} x} = 36^{\log_6 \sqrt{30}}$.

Практическая работа № 30

Тема: Контрольная работа
Цель: Проверить уровень усвоения данной темы

1 вариант

Преобразуйте выражение:

1. $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$

2. $\frac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1}\cdot c^{\frac{1}{4}}+1$

3. $\frac{lg8+lg18}{2lg2+lg3}$

Решите уравнение

1. $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$

2. $cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$

3. $0{,}2^{x^2-16x-37{,}5}=5\sqrt{5}$

4. $log_3\sqrt{x-5}+log_3\sqrt{2x-3}=1$

2 вариант

Преобразуйте выражение:

1. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+2}\right)^2$

2. $\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$

3. $\frac{3lg2+3lg5}{lg13-lg130}$

Решите уравнение

1. $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$

2. $sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$

3. $2^{x^2-6x+0{,}5}=\frac{1}{16\sqrt{2}}$

4. $\frac{1}{2}lg(2x-1)=1-lg\sqrt{x-9}$

Практическая работа № 31

Тема: Числовая последовательность, способы её задания, вычисления членов последовательности.

Цель: Научить вычислять

Решение упражнений

I. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену:

1. $u_n = \frac{n}{n+1}$
2. $u_n = \frac{2n}{2n-1}$
3. $u_n = \frac{2^n+3}{2^{n+1}}$
4. $u_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$

II. Найдите первые четыре члена по его заданному общему члену:

1. $u_n = \frac{(n+1)!}{2n}$
2. $u_n = \frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$
3. $u_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$
4. $u_n = (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{2n}$
5. $u_n = \frac{1}{(2n+1)2^{n-1}}$
6. $u_n = \frac{n+1}{(2n-1)3^{n-1}}$

III. Найдите формулу общего члена ряда по его данным первым членам

1.

2.
3.

IY. Вычислите сумму членов ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Y. Найдите n-й член ряда по его данным первым членам:

1.
2.
3.

YI. Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак и один из признаков сравнения:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Исследуйте сходимость ряда, использую признак Даламбера.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$

Практическая работа № 32

Тема: Предел последовательности

Цель: Научить вычислять пределы

Теоретическая часть

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Определение предела функции можно сформулировать и так: Число b называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки a, что для любого $x \neq a$ из этой окрестности. Предел обозначается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Пример 1. Предел постоянной функции в любой точке равен этой же постоянной.

Решение. Пусть для всех x. Очевидно, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и для всех $x \in (a-\delta, a+\delta)$ справедливы соотношения

Значит, по определению предела

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k.$

Пример 2. Дана функции. Доказать, что

$\lim_{x \to a} f(x) = a.$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ - любое число. Положив $\delta = \varepsilon$, для всех $x \in (a-\delta, a+\delta)$ получим $|f(x)-a| = |x-a| < \delta$, т. е. $|f(x)-a| < \varepsilon$, значит

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

Теорема. Если функция имеет предел при x, стремящемся к a, то этот предел единственен.

1. Теоремы о пределах функции

Теорема 1. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и пределы их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

Теорема 2. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.

Действительно,

$$\lim_{x \to a} kf(x) = \lim_{x \to a} k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

Теорема 3. Если при $x \to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ и предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то существует также и предел их отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$, равный отношению пределов:

$$\lim_{x\to a}(\square]\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю, то она называется бесконечно малой величиной.
Если предел функции равен бесконечности, т.е. величине обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной. Следовательно, выполняются равенства:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{0}=\infty, \qquad \lim_{x\to a}\frac{1}{\infty}=0$$

Вычислите пределы

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3)=\lim_{x\to 7}x+\lim_{x\to 7}3=7+3=10.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x)+\lim\limits_{x\to 1}2}{\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 1}(-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3\cdot\lim\limits_{x\to 1}x+2}{\lim\limits_{x\to 1}2\cdot\lim\limits_{x\to 1}x-7}=$$

$$=\frac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7}=5/(-5)=-1.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=$$

$$=2+2=4.$$

Решение упражнений

1. $\lim\limits_{x \to 2}[(x^2 - 1)(x - 3)(x - 5)]$

2. $\lim\limits_{x \to 0}[(2x - 4)(x - 1)(x + 2)]$

3. $\lim\limits_{x \to -1}\dfrac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2}$

4. $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{3}{2x - 6}$

5. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{4}{3x^2 + 2x}$

6. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$

7. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{3x^3 + x}{x}$

8. $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

9. $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

10. $\lim\limits_{x \to 5}\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 25}$

11. $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$

12. $\lim\limits_{x \to 5}\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$

13. $\lim\limits_{x \to 6}\dfrac{x - 6}{\sqrt{x + 3} - 3}$

14. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

15. $\lim\limits_{x \to 9}\dfrac{3 - \sqrt{x}}{4 - \sqrt{2x - 2}}$

16. $\lim\limits_{x \to \infty}[(x]^2 - 5x + 6)$

17. $\lim\limits_{x \to \infty}[(x]^3 + 3x^2)$

18. $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{3x}{x - 2}$

19. $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x - 8}{2x - 2}$

20. $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{5x^3 - 4x^2 + 2x}$

21. $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{2x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x + 3}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty}\sqrt{x^2 - x} - x$

23. $\lim\limits_{x \to \infty}\sqrt{x^2 + 5x} - x$

24. $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 11x + 2}$

25. $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9x}$

26. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}$

27. $\lim\limits_{x \to 4}\dfrac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}$

28. $\lim\limits_{x \to 5}\dfrac{2 - x}{3 - \sqrt{2x - 1}}$

Практическая работа № 33

Тема: Контрольная работа за первый семестр

Цель: Проверить уровень усвоения материала за первый семестр

1 вариант

Упростите выражение

1. $(\sin x + \cos x)^2 - 1$

2. $\left(\cos^2 x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right)^2 - \sin^2 x$

3. $\frac{\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

Преобразуйте выражение:

1. $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$

2. $\frac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1} \cdot c^{\frac{1}{4}} + 1$

3. $\frac{lg8+lg18}{2lg2+lg3}$

Решите уравнение

1. $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$

2. $cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$

3. $0{,}2^{x^2-16x-37{,}5}=5\sqrt{5}$

4. $log_3\sqrt{x-5} + log_3\sqrt{2x-3}=1$

2 вариант

Упростите выражение

1. $(\cos 2x+1)\,tg^2 x-1$

2. $\dfrac{1-ctg^2(-x)}{tg^2(x-\pi)} : \dfrac{ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}{ctg(\pi+x)}$

3. $\dfrac{\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x}{\cos^2 x}$

Преобразуйте выражение:

1. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+2}\right)^2$

2. $\dfrac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$

3. $\dfrac{3lg2+3lg5}{lg13-lg130}$

Решите уравнение

1. $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$

2. $sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$

3. $2^{x^2-6x+0{,}5}=\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$

4. $\frac{1}{2}lg(2x-1)=1-lg\sqrt{x-9}$

Практическая работа № 33

Тема: Правила вычисления производных

Цель: Научить учащихся правилам вычисления производных

Теоретический блок

- $C'=0$
- $x'=1$
- $(f+g)'=f'+g'$

- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(Cf)' = Cf'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ …(g ≠ 0)
- $\left(\dfrac{C}{g}\right)' = -\dfrac{Cg'}{g^2}$ (g ≠ 0)

Вычислите производную:

1. $f(x) = x^3 + 2x^5 + 4$
2. $f(x) = 2x^2 + x^3 + 10$
3. $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{6}{7}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{5}$
5. $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x^5$
6. $f(x) = \sqrt{x} + 5x^4$
7. $f(x) = x(x+1)$
8. $f(x) = x(x+5)$
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$
10. $f(x) = \dfrac{x^3}{x-4}$
11. $f(x) = x(x+3)$
12. $f(x) = (x^2+4)(x-1)$
13. $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$
14. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$

Домашнее задание:

1) $f(x) = 7x^7 + 13x^3 + 18$

2) $f(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{4}{x^3} + \sqrt{x}$

3) $f(x) = x(x+2)$

4) $f(x) = (x+5)(x^2+7)$

5) $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$

6) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

Практическое занятие № 34

Тема: Производные тригонометрических функций

Цель: Научить вычислять производные тригонометрических функций

Теоретический блок

Все тригонометрические функции непрерывно и неограниченно дифференцируемы на всей области определения:

$$(\sin x)' = \cos x\,,$$
$$(\cos x)' = -\sin x\,,$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

Решение упражнений

1. Найдите производную функции:

1) $y = \cos x + x^2$;	2) $y = tg\,x + \sqrt{x}$;	3) $y = \sin 2x$;
4) $y = ctg\,3x + 5$;	5) $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$;	6) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$;
7) $y = \sin(\frac{\pi}{6} - 2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$;	8) $y = \cos^2 x$;	7) $y = tg^3 x$.

2. Найдите производную функции:

1) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;	2) $y = (\sin x + \cos x)^2$;	3) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;
4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$;		5) $y = \sin 2x \cdot \sin 3x + \cos 2x \cdot \cos 3x - 1$;

3. Найти производную функции:

A:	1) $y = \sin x^5$;	$Б$:	1) $y = \frac{1}{\pi} \cdot x^2 \sin x$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$;
	2) $y = \cos^7(\frac{\pi}{6} - 3x)$;		2) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
	3) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$;		3) $y = \sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{5\pi}{12}$;
	4) $y = \frac{tg\,x}{x}$;		4) $y = \sqrt{1 + \sin x}$, $x_0 = 0$;
	5) $y = \frac{1 + tg\,x}{tg\,x}$;		5) $y = tg^7 2x$;
	6) $y = \frac{1}{tg\,3x}$;		6) $y = \cos^2(2x + 1)$, $x_0 = 0$;
	7) $y = \frac{2}{tg\,3x} + \frac{1}{x}$;		7) $y = \sqrt{1 + 5\cos\frac{x}{5}}$;
	8) $y = ctg\sqrt{7x}$;		8) $y = \sin^3(2x^3)$;
	9) $y = \sqrt{x \sin x}$.		9) $y = \cos^2(\pi - 3x^2)$.

Практическая работа № 35

Тема: Вычисление производной сложной функции

Цель: Научить учащихся вычислять производную сложной функции

Теоретический блок

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной

Решение упражнений

Вычислите производную сложной функции:

1) $f(x) = \cos 5x$

2) $f(x) = 3\sin\frac{x}{3}$

3) $f(x) = (8x+4)^3$

4) $f(x) = \frac{2}{(3-4x)^2}$

5) $f(x) = (3-2x)^{-3} + \frac{1}{(x+4)^3}$

6) $f(x) = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$

7) $f(x) = tg\,4x$

8) $f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{5}$

9) $f(x) = (3x+5)^4$

10) $f(x) = \frac{3}{(2x+4)^3}$

11) $f(x) = (5x+4)^{-4} + \left(\frac{x}{2}+8\right)^2$

12) $f(x) = \frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{8} - 3x)$

13) $f(x) = \sin 8x$

14) $f(x) = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$

15) $f(x) = (4x-5)^2$

16) $f(x) = \frac{8}{(1-5x)^3}$

17) $f(x) = (2x-3)^{-4} + \left(\frac{2}{3}x+4\right)^3$

18) $f(x) = 8tg(2x + \frac{\pi}{4})$

Домашнее задание

2) $f(x) = \frac{1}{7}\sin 7x$

3) $f(x) = (2x+10)^2$

4) $f(x) = \frac{4}{(5-x)^3}$

5) $f(x) = (4x+8)^{-5} + \left(\frac{1}{3}x+13\right)^2$

6) $f(x) = 4ctg(\frac{\pi}{6} - 2x)$

7) $f(x) = ctg\,2x$

Практическая работа № 36

Тема: Решение упражнений.

Цель: Закрепить и систематизировать знания учащихся по данной теме

Теоретический блок

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(Cf)' = Cf'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ …(g ≠ 0)
- $\left(\frac{C}{g}\right)' = -\frac{Cg'}{g^2}$ (g ≠ 0)

Карточка № 1

Найдите производную функций

1) $f(x) = 7x^7 + 13x^3 + 18$

2) $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{4}{x^3} + \sqrt{x}$

3) $f(x) = x(x+2)$

4) $f(x) = (x+5)(x^2+7)$

5) $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$

6) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Карточка № 2

Найдите производную функций

1) $f(x) = 6x^6 + 5x^6 + 78$

2) $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{8}{x^2} + 2\sqrt{x}$

3) $f(x) = x(x+3)$

4) $f(x) = (x^2+4)(x-1)$

5) $f(x) = \frac{x}{3x-1}$

6) $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$

Карточка № 3

Найдите производную функций

1) $f(x)=4x^5+3x^8+2x^9$

2) $f(x)=\frac{x}{10}+\frac{5}{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{2}$

3) $f(x)=x(x+10)$

4) $f(x)=(x+4)(x+2)$

5) $f(x)=\frac{x}{4x+1}$

6) $f(x)=\frac{x+8}{x+1}$

Карточка № 4

Найдите производную функций

1) $f(x)=7x^5+8x^4+\frac{1}{x}$

2) $f(x)=\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^5}+\sqrt{x}$

3) $f(x)=(x+4)x$

4) $f(x)=(x+5)(x^2-7)$

5) $f(x)=\frac{x}{x+8}$

6) $f(x)=\frac{x-3}{x+4}$

Карточка № 1

Найдите производные сложных функций

1) $f(x)=\cos 5x$

2) $f(x)=3\sin\frac{x}{3}$

3) $f(x)=(8x+4)^3$

4) $f(x)=\frac{2}{(3-4x)^2}$

5) $f(x)=(3-2x)^{-3}+\frac{1}{(x+4)^3}$

6) $f(x)=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$

Карточка № 2

Найдите производные сложных функций

1) $f(x) = tg\,4x$

2) $f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{5}$

3) $f(x) = (3x+5)^4$

4) $f(x) = \frac{3}{(2x+4)^3}$

5) $f(x) = (5x+4)^{-4} + \left(\frac{x}{2}+8\right)^2$

6) $f(x) = \frac{1}{4}\cos(\frac{\pi}{8} - 3x)$

Карточка № 3

Найдите производные сложных функций

1) $f(x) = \sin 8x$

2) $f(x) = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$

3) $f(x) = (4x-5)^2$

4) $f(x) = \frac{8}{(1-5x)^3}$

5) $f(x) = (2x-3)^{-4} + \left(\frac{2}{3}x+4\right)^3$

6) $f(x) = 8tg(2x + \frac{\pi}{4})$

Карточка № 4

Найдите производные сложных функций

1) $f(x) = ctg\,2x$

2) $f(x) = \frac{1}{7}\sin 7x$

3) $f(x) = (2x+10)^2$

4) $f(x) = \frac{4}{(5-x)^3}$

5) $f(x) = (4x+8)^{-5} + \left(\frac{1}{3}x+13\right)^2$

6) $f(x) = 4ctg(\frac{\pi}{6} - 2x)$

Практическая работа № 37

Тема: Механический смысл производной

Цель: Закрепить и систематизировать знания учащихся по данной теме

Теоретический бло

Пусть задан путь $s = f(t)$ движения материальной точки. Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t:

$v(t) = s'(t)$

Пример

Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (м). Определить скорость его движения в момент $t = 10$ с.

Решение. Искомая скорость - это производная от пути, то есть

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = \left(\frac{2}{3}t^3\right)' - (2t^2)' + (4t)' =$$

$$= \frac{2}{3}(t^3)' - 2(t^2)' + 4(t)' = \frac{2}{3} \cdot 3t^2 - 2 \cdot 2t + 4 \cdot 1 = 2t^2 - 4t + 4$$

В заданный момент времени

$v(10) = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 4 = 200 - 40 + 4 = 164$ (м/с).

Ответ. $v(10) = 164$ (м/с).

Упражнения:

1.Материальная точка движется прямолинейно по закону x (t) = $6t^2 - 48t + 17$, где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени t = 9 с.

2.Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = (1/6)\, t^2 + 5t + 28$$

где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 6 м/с?

3.Материальная точка движется прямолинейно по закону x (t) = $t^2 - 13t + 23$, где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

4.Точка движется по закону $s(t)=2t^3-3t$ (s – путь в метрах, t – время в секундах). Вычислите скорость движения точки, ее ускорение в момент времени 2с

5.Маховик вращается вокруг оси по закону $\varphi(t)= t^4-5t$. Найдите его угловую скорость ω в момент времени 2с (φ – угол вращения в радианах, ω – угловая скорость рад/с)

6.Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t)=2-3t+2t^2$

Найдите скорость тела и его кинетическую энергию через 3с после начала движения. Какая сила действует на тело в этот момент времени? (t измеряется в секундах, x – в метрах)

Практическая работа № 38

Тема: Решение упражнений. Самостоятельная работа

Цель: Закрепить и систематизировать материал по данной теме

1 вариант

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 4x^2 - 6x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$
2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2x^3 - x^2 + 3x - 6$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$
3. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = sinx - cosx$ в его точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$
4. Найдите координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $y = 10x^2 + 5x - 1$ имеют угловой коэффициент, равный 2
5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$
6. Координата материально точки изменяется с течением времени по закону $x(t) = 6t^2 - 8t + 6$. Найдите скорость точки в момент времени $t = 6$
7. Координата материально точки изменяется с течением времени по закону $x(t) = t^5 - 4t^4 + 5$. Найдите скорость точки в момент времени $t = 2$
8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 5t^2 - 2t + 1$. Через сколько секунд после начала движения точка остановится?
9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^3 - 13t$. Найдите ускорение точки в момент времени $t = 2$

2 вариант

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 7x^2 - 5x + 12$ в его точке с абсциссой $x_0 = 3$
2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 6x^3 - x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1$
3. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x}$ в его точке с абсциссой $x_0 = -1$
4. Найдите координаты точек касания, в которых касательные к графику функции $y = 8x^2 + 4x + 4$ имеют угловой коэффициент, равный 1
5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 4x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$
6. Координата материально точки изменяется с течением времени по закону $x(t) = 3t^2 - 8t + 8$. Найдите скорость точки в момент времени $t = 3$
7. Координата материально точки изменяется с течением времени по закону $x(t) = t^3 - 4t^2 + 8$. Найдите скорость точки в момент времени $t = 4$

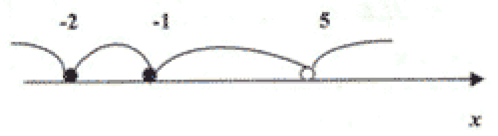
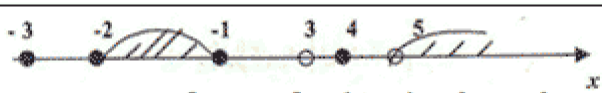
8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 8t + 10$. Через сколько секунд после начала движения тока остановится?
9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 8t^2 - 2t^3$. Найдите ускорение точки в момент времени $t = 1$ с

Практическая работа № 39

Тема: Применение непрерывности. Метод интервалов

Цель: Научить учащихся решать неравенства, используя метод интервалов

Теоретический блок

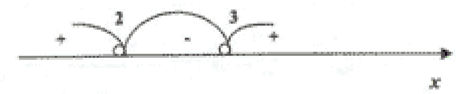
Алгоритм	Пример
1. Разложим выражение в числителе и знаменателе на линейные множители.	$\frac{(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)^2(x-4)^4}{(x-1)(x-3)^4(x-5)} \geq 0$
2. Выделим особые случаи(если они есть) – четные степени и сокращающиеся множители.	$(x-3)^4 \neq 0$ при $x \neq 3$ $(x+3)^2 \geq 0$ при $x = 3$ $(x-4)^4 \geq 0$ при $x = 4$ $(x-1) \neq 0$ при $x \neq 1$
3. Перепишем неравенство, исключив особые случаи.	$\frac{(x+1)(x+2)}{x-5} \geq 0$
4. Приравняем к нулю каждый множитель числителя и знаменателя и найдем все x из данных равенств(«контрольные точки»).	$\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+2=0 \\ x-5=0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \\ x=5 \end{array}\right.$
5. Отметим на координатной прямой точки из п. 4, учитывая знак неравенства(строгий или нестрогий).	
6. Проверим знак в одном из интервалов, а в остальных – прочередуем.	
7. Запишем ответ, учитывая знак неравенства и особые случаи.	 **Ответ:** $x \in [-2;-1] \cup (5;\infty) \cup \{-3;4\}$.

Решение упражнений

$$\frac{(x^2-4x+6)(x-2)(x-3)}{(x-1)^4(x-2)^2} < 0$$

$x^2 - 4x + 6 > 0$ при $x \in R$, так как $D < 0$
$(x-2)^2 \geq 0$ при $x \in R$, так как точка $x \neq 2$
$(x-1)^4 \geq 0$ при $x \in R$, так как точка $x \neq 1$

$(x-2)(x-3) \geq 0$ $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

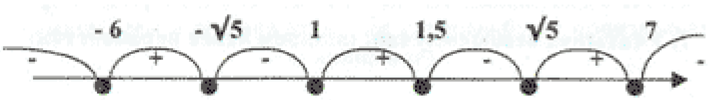


Ответ: $x \in (-2; 3)$

2. $\frac{(x^2-5)(x-7)(2x-3)}{-x^2-5x+6} \leq 0$

$$\frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-7)(2x-3)}{-(x+6)(x-1)} \leq 0$$

$\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \\ x = 7 \\ x = 1{,}5 \\ x = 6 \\ x = 1 \end{array}\right.$



Ответ: $(-\infty; -6) \cup [-\sqrt{5}; 1) \cup [1{,}5; \sqrt{5}] \cup [7; \infty)$.

Примеры на самостоятельное решение:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} \leqslant \frac{1}{2}.$$

$$\frac{x + 17}{x^2 - x - 6} \geqslant 0.$$

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 2} > 0.$$

$$\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3} > 0.$$

Домашнее задание:

$(x-3)(x-9) > 0$

$(x+7)(x-4) < 0$

$(2 + x)(14 - x) < 0$

$(6 - x)(x + 7) > 0$

$x(8 - x)(12 + x) > 0$

$(14x + 28)(9 - x)x < 0$

$2x(7x - 14)(4 - x)(x + 24) > 0$

$-5x(9x - 27)(x + 28)(9 - x) < 0$

$(x - 4)(2 + x)(x + 1)(x - 2) < 0$

$(x + 8)(3x - 30)(16 - x)(-6 - 2x) < 0$

Практическая работа № 40

Тема: Возрастание и убывание функции
Цель: Научить исследовать функцию на промежутки монотонности
Теоретический блок

1.Если в некотором промежутке первая производная функции больше нуля, то функция возрастает на этом промежутке;

2.Если в некотором промежутке первая производная функции меньше нуля, то функция убывает на этом промежутке.

Промежутки, на которых функция только возрастает или только убывает, называются **промежутками монотонности.**

Порядок нахождения промежутков монотонности:

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную функции.

Рассмотрим несколько примеров исследования функции на возрастание и убывание.

Найти промежутки монотонности функций:

1) $y = x^3 - 3x^2$

а) область определения $D(y):\ x \in R$,

б) найдем первую производную: $y' = 3x^2 - 6x$,

: $y' = 0$; $3x^2 - 6x = 0$, $x = 0$ и $x = 2$

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$((2;+\infty)$
$y'(x)$	+	0	-	0	+
$y(x)$	↑		↓		↑

Итак, в промежутках $x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$ функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает, в промежутке $x \in (0;2)$ убывает.

2) $y=-x^3$

а) область определения $D(y):\ x\in R$,

б) найдем первую производную: $y'=-3x^2$,

:$y'=0$; $-3x^2=0$, $x=0$

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$y'(x)$	-	0	-
$y(x)$	$\downarrow$		$\downarrow$

Функция $y=-x^3$ убывает на всей области определения.

3) $y=x^2-5x+6$.

а) область определения $D(y):\ x\in R$,

б) найдем первую производную: $y'=2x-5$,

:$y'=0$; $2x-5=0$; $x=2{,}5$

Исследуем знак производной в полученных промежутках, решение представим в виде таблицы.

x	$(-\infty;2{,}5)$	2,5	$(2{,}5;+\infty)$
$y'(x)$	-	0	+
$y(x)$	$\downarrow$		$\uparrow$

Функция $y=x^2-5x+6$ возрастает на промежутке $x\in(2{,}5;+\infty)$, убывает на промежутке $x\in(-\infty;2{,}5)$

Примеры:

Найти промежутки монотонности функции

1. $y=x^3-27x$.
2. $f(x)=x^3+2x^5+4$
3. $f(x)=2x^2+x^3+10$
4. $f(x)=2\sqrt{x}+4x^5$
5. $f(x)=\sqrt{x}+5x^4$
6. $f(x)=7x^7+13x^3+18$

Домашнее задание:

1. $f(x)=x(x+1)$
2. $f(x)=x(x+5)$
3. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$

4. $f(x) = \dfrac{x^3}{x-4}$

Практическая работа № 41

Тема: Критические точки функции, максимумы и минимумы
Цель: Научить находить экстремумы функции.
Теоретический блок

Необходимое условие экстремума: Если точка x является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f ′, то она равна нулю: f′(x°) =0.

Признак максимума функции: Если функция f непрерывна в точке x, а f ′ (x)> 0 на интервале (a; x°) и f ′ (x)< 0 на интервале (x°; в) , то точка x является точкой максимума функции f .

Признак минимума функции: Если функция f непрерывна в точке x°, а f ′ (x)< 0 на интервале (a;x°) и f ′ (x)> 0 на интервале (x°; в) , то точка x° является точкой максимума функции f .

Теперь коснемся вопроса последовательности операций, которые нужно выполнить при отыскании экстремумов функции.(3-4 минуты)

1. найти область определения функции
2. найти производную функции
3. найти точки, в которых выполняется равенство f(x)=0
4. найти точки, в которых производная не существует
Отметить на координатной прямой все критические точки и область определения
5. определить знак производной на каждом из промежутков
6. сделать вывод о наличии или отсутствии экстремумов

Найдите критические точки функции

а) $2x\uparrow 2 + x - 1 = 0$;

б).

в) $4x\uparrow 2 + 3x - 6 = 0$;

г).

2. Найдите точки максимума и минимума функции:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

б).

в) $12x^4 - 3x^2 - 5 = 0$;

г).

3. Постройте эскиз графика функции, обладающей следующими свойствами:

1. $D(f) = [-3; 5]$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-3; 1)$, $f'(x) < 0$ при $x \in (1; 5)$ и $f'(1) = 0$.

2. $D(f) = [-4; 6]$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-4; 2)$, $f'(x) < 0$ при

$x \in (2; 6)$ и $f'(2) = 0$.

Домашнее задание:

1. Найдите критические точки функции:
   а) $6x^{\uparrow}2 + 3x + 10 = 0$;
   б).

2. Найдите точки максимума и минимума функции:

   а) $\frac{x^5}{8} - 8\frac{x^3}{3} + 9 = 0$;

   б).

3.Постройте эскиз графика функции, обладающей следующими свойствами:
$D(f) = [1; 6]$; $f'(x) > 0$ при $x \in (1; 3)$, $f'(x) < 0$ при

$x \in (3; 6)$ и $f'(3) = 0$.

Практическая работа № 42

Тема: Применение производной к исследованию функций
Цель: Научить учащихся исследовать функции с помощью производной

Теоретический блок

Схема исследования функции:

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической.
3. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции. Иногда для уточнения построения графика следует найти две три дополнительные точки.
4. Найти производную функции и ее критические точки.
5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
6. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Рассмотрим пример:

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

1. Область определения

$x^3 - 1 \neq 0;\ \ x \neq 1$, поэтому $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$

2. Пересечение с осями координат: точка (0;0).

3. Ввиду того, что область определения несимметрична относительно начала координат, проверка на четность невозможна.

4. Интервалы знакопостоянства

Так как $x^4 \geq 0\ \ \forall x \in R$, то знак дроби $\frac{x^4}{x^3 - 1}$ будет зависеть только от знака знаменателя, т.е. от знака $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Поэтому при $x \in (-\infty;0) \cup (0;1)\ \ y < 0$, а при $x \in (1;+\infty)\ \ \ y > 0$.

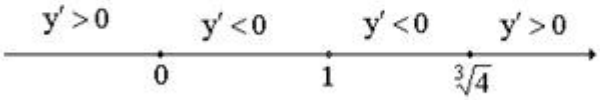
5. Интервалы монотонности

$$y' = \frac{4x^3(x^3 - 1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{4x^6 - 4x^3 - 3x^6}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3 - 1)^2};$$

$$x^6 - 4x^3 = 0;$$

$$x^3(x^3 - 4) = 0;$$

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = \sqrt[3]{4}$$



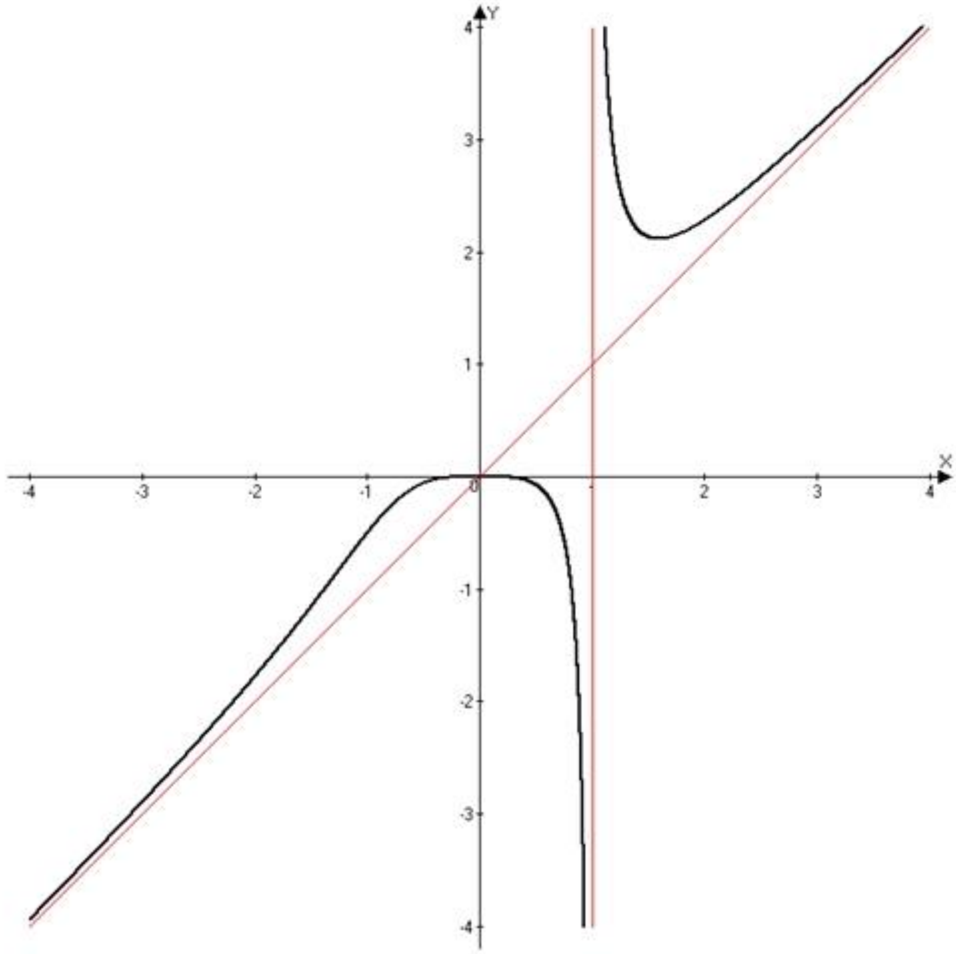
При $x \in (-\infty;0) \cup (\sqrt[3]{4};+\infty)$ функция возрастает,

При $x \in (0;1) \cup (1;\sqrt[3]{4})$ функция убывает.

(0;0) - точка максимума, $\left(\sqrt[3]{4};\ \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ - точка минимума.

$x \in (-\infty;-\sqrt[3]{2}) \cup (1;+\infty)$ график функции вогнутый,

$x \in \left(-\sqrt[3]{2};\ 1\right)$ график функции выпуклый. - точка перегиба.



Исследуйте и постройте графики функций:

1. $h(x) = -3x^2 + 12$.
2. $h(x) = 2x^2 + 3x + 1$
3. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
4. $h(x) = 0{,}5x^2 + 5x + 8$
5. $h(x) = 0{,}5\,x^2 - 5x + 8$

Домашнее задание:

1. $h(x) = 2x^2 + 1$
2. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

Практическая работа № 43

Тема: Контрольная работа по теме: «Производная»
Цель: Проверить уровень усвоения материала

Вариант 1.

Теоретический вопрос

1. Приращение аргумента и приращение функции

Практические задания

2. Найти производную функции $y = x^2$
3. Найти промежуток возрастания функции $y = x^2 – 2x + 3$
4. Найти экстремумы функции $y = x^3 + 3/x$
5. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = (x^2 +1)/x$ в точке с абсциссой $x_0=2$
6. Исследовать функцию $f(x) = x^2 - 5x + 6$ и построить её график

Вариант 2.

Теоретический вопрос

1. Понятие производной

Практические задания

2. Вычислить значение производной функции $g(x) = 6x^2$ в точке $x=4$
3. Найти промежутки, на которых функция $y = (x – 2)^2 \cdot (x + 4)^2$ возрастает
4. Найти экстремумы функции $y = – 48/x – x^3$
5. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = (x^2 -1)/x$ в точке с абсциссой $x_0=-2$
6. Исследовать функцию $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$ и построить её график

Вариант 3.

Теоретический вопрос

1. Таблица производных

Практические задания

2. Вычислить значение производной функции $y = x^3$ в точке $x=1$
3. Найти критическую точку функции $f(x) = x^2 - 4$
4. Найти промежуток возрастания функции $y = x^2 – 2x + 3$
5. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = -x^3/3 - x^2/2 + 3x + 13$ в точке $x_0=-3$
6. Исследовать функцию $g(x) = x^2 - 1$ и построить её график

Вариант 4.

Теоретический вопрос

1. Правила вычисления производных

Практические задания

2. Найти производную функции $g(x) = x^4$
3. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = x^2 - x$
4. Найти промежуток убывания функции $y = x^2 - 6x + 8$
5. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = x^3/3 - x^2/2 - 3x + 13$ в точке $x_0=3$

6. Исследовать функцию $h(x) = x^2 - 4$ и построить её график

Вариант 5.

Теоретический вопрос

1. Касательная к графику функции

Практические задания

2. Найти производную функции $\varphi(x) = x + \cos x$
3. Решить неравенство $f'(x) \geq 0$, если $f(x) = 2x^2 - 4x$
4. Найти промежутки, на которых функция $y = 2 - 2x^2 + 4x^3/3 - \frac{1}{4}x^4$ возрастает.
5. Найти критические точки функции $y = (x^2 + 3x) / (x + 4)$
6. Исследовать функцию $g(x) = -x^2 - 5x - 6$ и построить её график.

Вариант 6.

Теоретический вопрос

1. Производная в физике.

Практические задания

2. Найти производную функции $f(x) = (2x + 1)^4$
3. Найти критические точки функции $y = 6 + 12x - x^3$
4. Найти промежутки, на которых функция убывает.
5. Найти производную функции $y = 2\sqrt{x} + 27/x - x^2/9$
6. Исследовать функцию $h(x) = x^2 - x - 6$ и построить её график.

Вариант 7.

Теоретический вопрос

1. Признак возрастания (убывания) функции.

Практические задания

2. Вычислить $f'(3)$, если $f(x) = x^2$
3. Найти производную функции $y = 2\sin x$
4. Найти промежутки, на которых функция $y = 0{,}5x^4 - 5x^3/3 - 1{,}5x^2 + 2$ возрастает
5. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 9$
6. Исследовать функцию $g(x) = x^2 - 9$ и построить её график.

Вариант 8.

Теоретический вопрос

1. Признак максимума (минимума) функции.

Практические задания

2. Найти производную функции $f(x) = x^5$
3. Решить неравенство $g'(x) \leq 0$, если $g(x) = x^2 - 4x$
4. Найти промежутки, на которых функция $y = \frac{3}{4}x^4 - 5x^3/3 - x^2 - 1$ убывает.
5. Найти тангенс угла наклона касательной графику функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ в точке $x_0 = -2$
6. Исследовать функцию $h(x) = -x^2 + 1$ и построить её график.

Вариант 9.

Теоретический вопрос

1. Исследование функций.

Практические задания

2. Найти производную функции $h(x) = \sin(2 - 3x)$
3. Найти промежутки, на которых функция $y = (x^2 + 8x) / (x - 1)$ возрастает.

4. Найти производную функции $y = x^4/8 - x^3/3 + \sqrt{x}$ и вычислить ее значение, если $x = 4$.
5. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = (x-1)/(x+1)$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$
6. Исследовать функцию $f(x) = x^2 + x - 6$ и построить ее график.

Вариант 10.

Теоретический вопрос

1. Приращение аргумента и приращение функции.

Практические задания

2. Найти $f'(x)$, если $f(x) = 4(x-5)^3$
3. Найти производную функции $g(x) = x^5/5 - \frac{1}{2}x^2 - 9\sqrt{x} - 2$ и вычислите ее значение, если $x = 1$
4. Найти промежутки, на которых функция $y = (x^2 - 8x)/(x+1)$ убывает.
5. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = (x+1)/(x-1)$ в точке с абсциссой $x_0=2$
6. Исследовать функцию $h(x) = -x^2 + 5x - 6$ и построить ее график.

Вариант 11.

Теоретический вопрос

1. Понятие производной.

Практические задания

2. Решить уравнение $g'(x) = 0;$ *если* $g(x) = 2x - x^2$
3. Найти промежутки, на которых функция $y = (x - 3)^3/(x+1)$ возрастает.
4. Найти критические точки функции $y = x + \cos 2x$
5. Написать уравнение касательной к графику функции $y = (x^2+8)/(x+1)$ в точке $x_0 = 0$
6. Исследовать функцию $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ и построить её график.

Вариант 12.

Теоретический вопрос

1. Таблица производных.

Практические задания

2. Найти производную функции $f(x) = 4x^5$
3. Найти промежутки возрастания функции $y = 5x^2 - 3x + 1$
4. Найти минимум функции $y = x^2 - x$
5. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y(x) = (x^2+8)/(x - 1)$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$
6. Исследовать функцию $g(x) = -x^2 + 4$ и построить ее график.

Вариант 13.

Теоретический вопрос

1. Правила вычисления производных.

Практические задания

2. Найти $f'(x)$, если $f(x) = 7x$
3. Найти производную функции $g(x) = 4\sin x - \cos x$ и вычислить ее значение, если $x = \pi$
4. Определить, возрастает или убывает функция $y = -x^3$
5. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = x^4$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$

6. Исследовать функцию $h(x) = - x^2 + 1$ и построить ее график.

Вариант 14.

Теоретический вопрос

1. Касательная к графику функции.

Практические задания

2. Решить уравнение $f\,'(x) = 0$, если $f(x) = x^3 – 12x = 7$
3. Найти производную функции $h(x) = 14\,x$
4. Найти производную функцию $y = 3\cos x/3 + 2\sin 4x$ и вычислить ее значение, если $x = \pi/2$
5. Найти уравнение касательной к графику функции $f\,(x) = -x^4 + 4\,x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.
6. Исследовать функцию $g(x) = x^2 + 5x + 6$ и построить ее график.

Вариант 15.

Теоретический вопрос

1. Производная в физике.

Практические задания

2. Найти производную функции $g(x) = x^8 / 8$
3. Решить неравенство $y' > 0$, если $y = x^2 - 4x$
4. Найти промежутки, на которых функция $y = ¼\,(x^2-2)\,x^2 - 3$ возрастает.
5. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$
6. Исследовать функцию $h(x) = -x^2 + x + 6$ и построить ее график.

Вариант 16.

Теоретический вопрос

1. Признак возрастания (убывания) функции.

Практические задания

2. Найти производную функции $f(x) = 2x+1$
3. Решить неравенство $y' \le 0$, если $y = x^2 - 6x + 18$
4. Найти производную функции $g(x) = 4x^2$ и вычислите ее значение, если $x=2$
5. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0=9$
6. Исследовать функцию $h\,(x) = -x^2+9$ и построить ее график.

Вариант 17.

Теоретический вопрос

1. Признак максимума (минимума) функции.

Практические задания

2. Найти производную функции $f\;(x) = 5\,x^4$.
3. Вычислить значение производной функции $g\,(x) = \cos x$ в точке $x = \pi/4$.
4. Решить неравенство $y' \ge 0$, если $y = 4x^2 - 8x + 15$.
5. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $f\;(x) = 2x + \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0=9$.
6. Исследовать функцию $k\,(x) = 4x^2 - 1$ и построить её график.

Вариант 18.

Теоретический вопрос

1. Исследование функций

Практические задания

2. Найти производную функции $y = 1 + \sin x$.
3. Найти производную функции $g(x) = (x^2 + 1)^3$ и вычислить её значение, если $x = 1$.
4. Найти промежутки, на которых функция $y = \frac{3}{4} x^7 + 7x^3/3 - 3x^2 - 4$ убывает.
5. Написать уравнения касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$
6. Исследовать функцию $h(x) = -4x^2 + 1$ и построить её график.

Вариант 19.

Теоретический вопрос

1. Понятие производной.

Практические задания

2. Найти производную функции $\varphi(x) = 2 \sin 5x$
3. Найти производную функции $y = (3x^2 - 2) / (x^2 - 3)$ и вычислить её значение, если $x = -2$
4. Найти экстремумы функции $y = (x^2 - 2x + 1) / (x^2 - x + 2)$
5. Записать уравнение касательной к графику функции $g(x) = x^3 + x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$
6. Исследовать функцию $y = 9x^5 + 3x^3$ и построить её график

Вариант 20.

Теоретический вопрос

1. Правила вычисления производных.

Практические задания

2. Найти производную функции $\varphi(x) = 7x + 8$
3. Вычислить $f'(\pi/4)$, если $f(x) = 2\cos x$
4. Найти промежуток возрастания функции $y = x^2 - 6x + 9$
5. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$
6. Исследовать функцию $g(x) = -x^2 - x + 6$ и построить её график.

Практическая работа № 44

Тема: Контрольная работа по теме: «Производная»

Цель: Проверить уровень усвоения материала по данной теме

1 вариант

1.Вычислите производную:

1. $f(x) = 2x^2 + 4x^4 + 6x + 3$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$
3. $f(x) = (3x - 10)^3$
4. $f(x) = \cos\frac{x}{5}$
5. $f(x) = \frac{1}{(6 - 4x)^5}$

2.Найдите производные сложных функций

1) $f(x) = \sin 8x$

2) $f(x) = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$

3) $f(x) = (4x-5)^2$

4) $f(x) = \frac{8}{(1-5x)^3}$

5) $f(x) = (2x-3)^{-4} + \left(\frac{2}{3}x+4\right)^3$

6) $f(x) = 8tg(2x+\frac{\pi}{4})$

3.Найдите критические точки функции:

а) $6x^2 + 3x + 10 = 0$;

б).

4.Найдите точки максимума и минимума функции:

а) $\frac{x^5}{8} - 8\frac{x^3}{3} + 9 = 0$;

б).

5.Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

а) $f(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1$ на промежутке $[-1; 3]$;

б) $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{2}$ на промежутке $[0; 2{,}5]$;

2 Вариант

1.Вычислите производную:

1. $f(x) = 3x^2 + 6x^4 + 8x + 100$
2. $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^8}$
3. $f(x) = (4x-5)^6$
4. $f(x) = \sin 10x$
5. $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$

2.Найдите производные сложных функций

1) $f(x) = ctg 2x$

2) $f(x)=\dfrac{1}{7}\sin 7x$

3) $f(x)=(2x+10)^2$

4) $f(x)=\dfrac{4}{(5-x)^3}$

5) $f(x)=(4x+8)^{-5}+\left(\dfrac{1}{3}x+13\right)^2$

6) $f(x)=4ctg(\dfrac{\pi}{6}-2x)$

3.Найдите критические точки функции:

а) $1/2\, x\uparrow 2 + 4/5\, x + 15 = 0$;

б).

4. Найдите точки максимума и минимума функции:

а) $\dfrac{x^4}{4}+x^3-9\dfrac{x^2}{2}=0$;

$\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2x^3}{3}$

б)

5.Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

а) $f(x)=6{,}75x\uparrow 4-x+2$ на промежутке $[0;2]$;

б) $f(x)=x+4/(x-1)$ на промежутке $[-2;0]$;

Практическое занятие № 45

Тема: Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Цель: Научить решать интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница

Теоретический блок

Пусть функция *f* (*x*) непрерывна на замкнутом интервале [*a, b*]. Определенный интеграл от функции *f* (*x*) в пределах от *a* до *b* вводится как предел суммы бесконечно большого числа слагаемых, каждое из которых стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta_i x\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i x = f(x_1)\Delta_1 x + f(x_2)\Delta_2 x + \ldots + f(x_k)\Delta_k x + \ldots + f(x_n)\Delta_n x.$$

Свойства определенного интеграла

Ниже предполагается, что *f* (*x*) и *g* (*x*) - непрерывные функции на замкнутом интервале [*a, b*].

1. $\int_a^b 1dx = b - a$

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где *k* - константа;

3. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ где $a < c < b;$

5. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$

7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

8. Если $f(x) \ge 0$ в интервале [*a, b*], то $\int_a^b f(x)dx \ge 0.$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция *f* (*x*) непрерывна на замкнутом интервале [*a*, *b*]. Если *F* (*x*) - *первообразная* функции *f* (*x*) на[*a*, *b*], то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 1

Вычислить интеграл $\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right)dx$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}\right)dt$.

Решение.

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{t} - \sqrt{t}\right)dt = \int_0^1 \left(t^{1/3} - t^{1/2}\right)dt = \left(\frac{t^{1/3+1}}{1/3+1} - \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3t^{4/3}}{4} - \frac{2t^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{12}.$$

Пример 3

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение.

Сначала определим точки пересечения двух кривых (рисунок 3).

$$x^2 = \sqrt{x},$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \sqrt{x} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x}\left(x^{3/2} - 1\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \;\; x_2 = 1.$$

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках (0,0) и (1,1). Следовательно, площадь фигуры равна

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{x^3}-x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

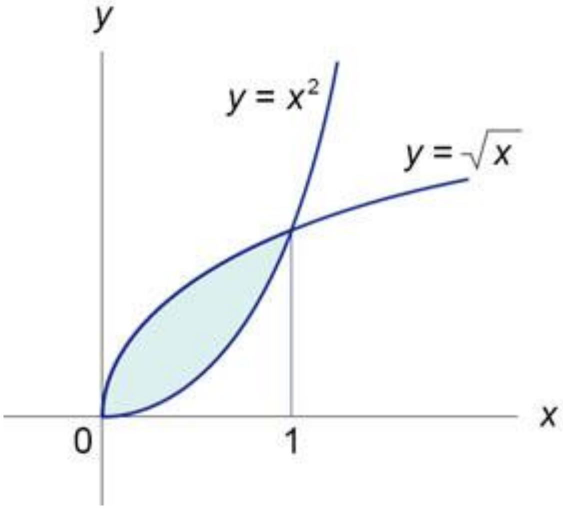


Рис.3

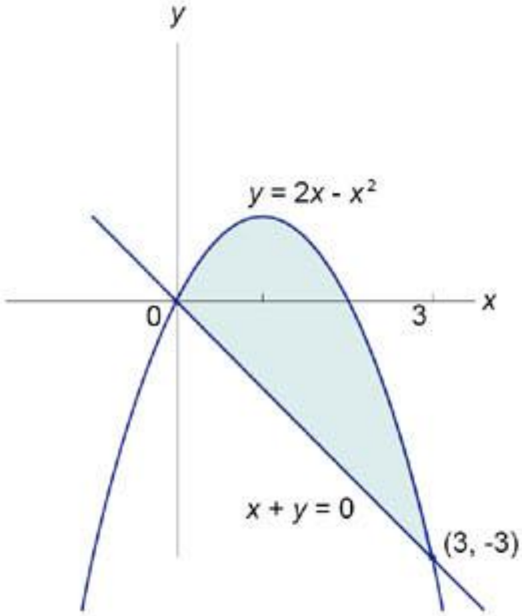


Рис.4

Пример 4

Найти площадь фигуры, ограниченную графиками функций $y=2x-x^2$ и $x+y=0$.

Решение.

Найдем координаты точек пересечения кривых (рисунок 4).

$$2x-x^2=-x,$$

$$\Rightarrow\quad x^2-3x=0,$$

$$\Rightarrow\quad x(x-3)=0,$$

$$\Rightarrow\quad x_1=0,\ \ x_2=3.$$

Данная область ограничивается сверху параболой $y=2x-x^2$, а снизу - прямой линией $y=-x$. Следовательно, площадь этой области равна

$$S=\int_0^3\left(2x-x^2-(-x)\right)dx=\int_0^3\left(2x-x^2+x\right)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{9}{2}.$$

Вычислите интегралы:

$1.\int_{-1}^{1} x^3 dx$

$2.\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

$3.\int_{1}^{2} (+ 2x)d$

$1.\int_{-1}^{1} x^5 dx$

$2.\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

$3.\int_{1}^{2} (4 + 2x)dx$

Практическое занятие № 46

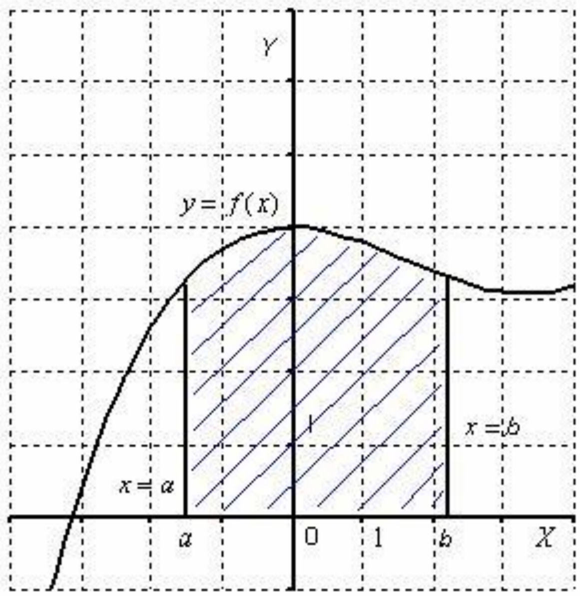
Тема: Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей

Цель: Научить применять интегралы к вычислению физических величин и площадей

Теоретический блок

Геометрические приложения определенного интеграла

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная осью OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, которая не меняет знак на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена *не ниже* оси абсцисс:



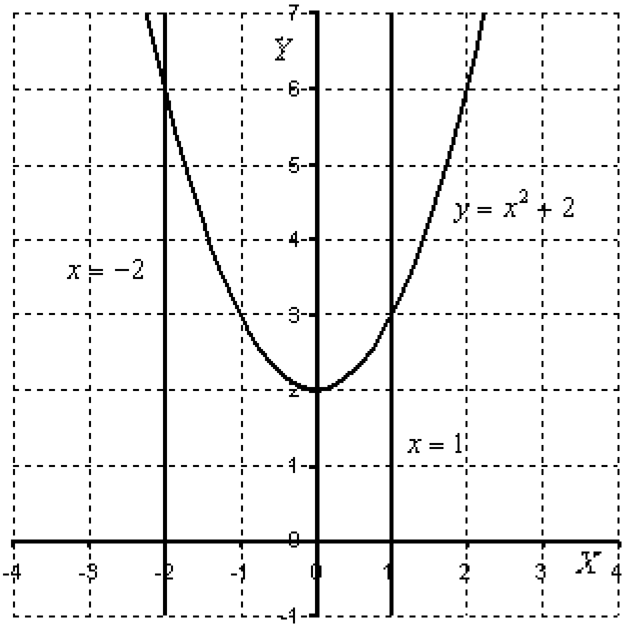
Тогда площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx$. С точки зрения геометрии определенный интеграл – это ПЛОЩАДЬ.

То есть, определенному интегралу (если он существует) геометрически соответствует площадь некоторой фигуры. Например, рассмотрим определенный интеграл $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$. Подынтегральная функция $y = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ задает на плоскости кривую, располагающуюся выше оси OX, а сам определенный интеграл $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$ численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

<u>Пример 1</u>

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение $y = 0$ задает ось OX):



На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен над осью OX, поэтому:

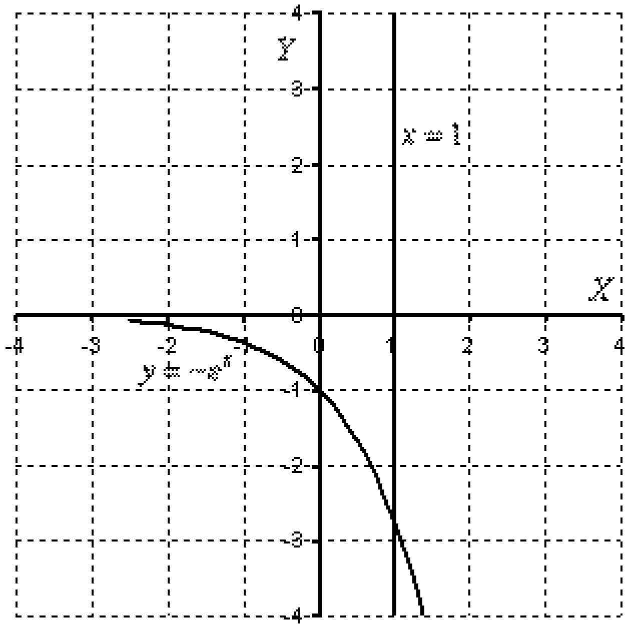
$$S = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9$ $ед^2$

<u>Пример 2</u>

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-e^x$, $x=1$ и координатными осями.

Решение: Выполним чертеж:



Если криволинейная трапеция расположена под осью OX (или, по крайней мере, *не выше*данной оси), то её площадь можно найти по формуле: $S=-\int_a^b f(x)dx$

В данном случае:

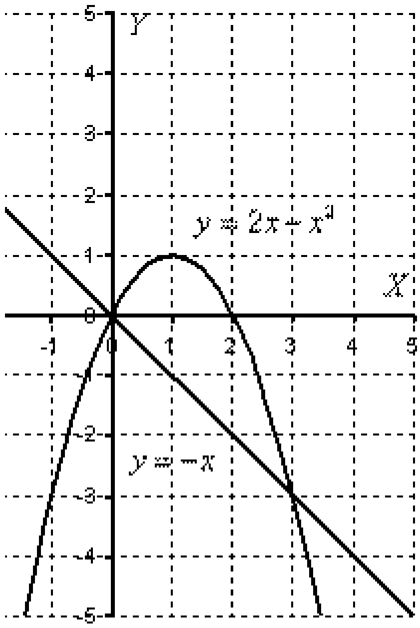
$$S=-\int_0^1(-e^x)dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$$

Ответ: $S=(e-1)\ ед^2\approx 1{,}72\ ед^2$

<u>Пример 3</u>

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.

Решение: Сначала нужно выполнить чертеж.



Если на отрезке $[a;b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ больше либо равна некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми $x = a$, $x = b$, можно найти по формуле: $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x - x^2$ необходимо вычесть $-x$

Искомая фигура ограничена параболой $y = 2x - x^2$ сверху и прямой $y = -x$ снизу.
На отрезке $[0;3]$ $2x - x^2 \geq -x$, по соответствующей формуле:

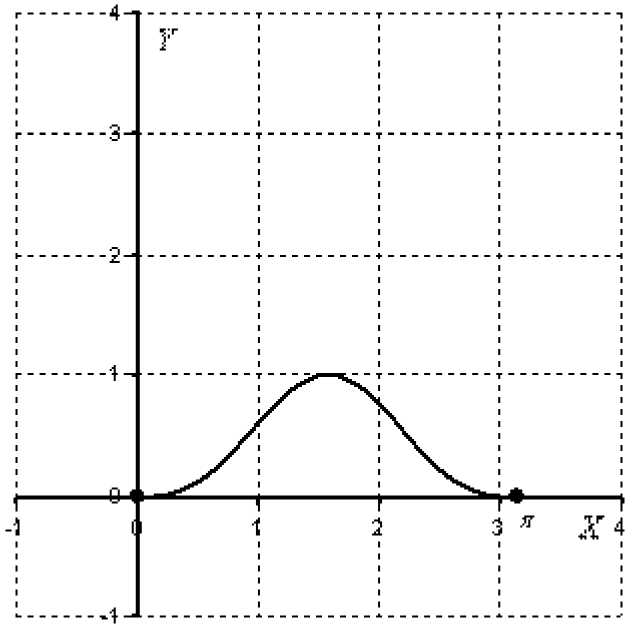
$$S = \int\limits_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int\limits_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Ответ: $S = 4\frac{1}{2}$ $ед^2$

Пример 9

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin^3 x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi$

Решение: Изобразим данную фигуру на чертеже.



На отрезке $[0;\pi]$ график функции $y=\sin^3 x$ расположен над осью OX, поэтому:

$$S=\int_0^{\pi}\sin^3 x dx\overset{(1)}{=}\int_0^{\pi}\sin^2 x\sin xdx\overset{(2)}{=}\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin xdx\overset{(3)}{=}(*)$$

(2) Используем основное тригонометрическое тождество в виде $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

(3) Проведем замену переменной $t=\cos x$, тогда:
$dt=d(\cos x)=-\sin xdx\Rightarrow \sin xdx=-dt$

Новые переделы интегрирования:
$t_1=\cos 0=1;$
$t_2=\cos\pi=-1$

$$(*)=-\int_1^{-1}(1-t^2)dt\overset{(4)}{=}\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

(4) Здесь мы использовали свойство определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$, расположив пределы интегрирования в «привычном» порядке

Ответ: $S=1\frac{1}{3}$ $ед^2$

Практическая работа № 47

Тема: Контрольная работа по теме: «Первообразная»
Цель: Проверить уровень усвоения материала по данной теме

1 Вариант

1. Найдите общий вид первообразных для функции:

1. $f(x) = 3x + 5x^5 + 6x^6 - 2$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} - \sqrt{x}$
3. $f(x) = (6x - 3)^5$
4. $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{2}{(4x + 3)^4}$

2.Вычислите интегралы:

1. $\int_{-1}^{1} x^4 dx$
2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\sin^2 x}$
3. $\int_{1}^{2} (1 + 3x)dx$
4. $\int_0^3 \dfrac{dx}{9 - x^2}$
5.

2-Вариант

1..Найдите общий вид первообразных для функции:

1. $f(x) = 6x + 3x^3 + 2x^4 - 9$
2. $f(x) = \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{8}{x^5} - 2\sqrt{x}$
3. $f(x) = (4x - 13)^6$
4. $f(x) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{4}{(2x + 10)^6}$

2.Вычислите интегралы:

1. $\int_{-1}^{1} x^5 dx$

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

3. $\int_{1}^{2} (4 + 2x)dx$

4. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$

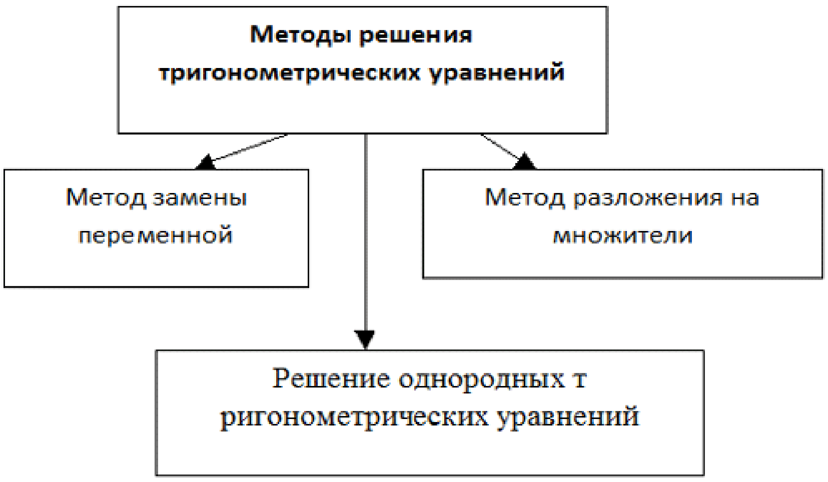
5. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

Практическая работа № 48

Тема: Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

Цель: Научить учащихся решать тригонометрические уравнения методом разложения на множители

Теоретический блок



Метод разложения на множители

$f(x) = 0$

Приводим исходное уравнение к виду

$f_1(x)\, f_2(x) = 0$

Задача сводится к решению совокупности уравнений

$f_1(x) = 0$ или $f_2(x) = 0$

ПРИМЕР

Решите уравнение: $\sin 4x + \sin 4x \cos x = 0$

Решение:

$\sin 4x + \sin 4x \cos x = 0$

$\sin 4x\,(1 + \cos x) = 0$

Уравнение равносильно совокупности уравнений:

$\sin 4x = 0$	или	$1 + \cos x = 0$
$4x = \pi n,\ n \in Z$		$\cos x = -1$
$x = \pi n/4,\ n \in Z$		$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $x = \pi n/4,\ n \in Z$ $\quad x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

1. Решить уравнение: $\sin x + \cos x = 1$.

Р е ш е н и е . Перенесём все члены уравнения влево:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0 ,$$

преобразуем и разложим на множители выражени в левой части уравнения:

$$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

1). $\sin(x/2) = 0,$ 2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0,$

$x/2 = \pi k,$ $\tan(x/2) = 1,$

$x_1 = 2\pi k;$ $x/2 = \arctan 1 + \pi n,$

$x/2 = \pi/4 + \pi n,$

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$

2. Решить уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

Р е ш е н и е . $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0,$

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0,$$

1). $\sin x = 0,$ 2). $\cos x - \sin x = 0,$

$x_1 = \pi k;$ $\tan x = 1,$

$x_2 = \pi/4 + \pi n,$

3. Решить уравнение: $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

Р е ш е н и е . $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x,$

$$2\cos 4x \cos 2x = 2\cos^2 4x,$$

$$\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0,$$

$$\cos 4x \cdot 2\sin 3x \cdot \sin x = 0,$$

1). $\cos 4x = 0,$ 2). $\sin 3x = 0,$ 3). $\sin x = 0,$

$4x = \pi/2 + \pi k,$ $3x = \pi n,$ $x_3 = \pi m.$

$x_1 = \pi/8 + \pi k/4;$ $x_2 = \pi n/3;$

1. Решить уравнение:

Решение:

$$\sin x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = 0,$$

$$\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Домашнее задание:

1. 2 sin x/2 cos 5x – cos 5x = 0.

Ответ:

$x = \pi/10 + \pi n/5$

$x = (-1)^n\, \pi/3 + 2\pi n,$

Практическая работа № 49

Тема: Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной

Цель: Научить учащихся решать тригонометрические уравнения методом введения новой переменной

Теоретический блок

Тригонометрические уравнения, приводимые к уравнениям от одной тригонометрической функции одной переменной, решаются (как правило)

методом замены переменной

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$
введем новую переменную
$\sin x = t$, $\|\le 1$
уравнение примет вид
$at^2 + bt + c = 0$
Решая квадратное уравнение, находим t_1; t_2
Вернемся к переменной x
$\sin x = t_1$ $\quad$ $\sin x = t_2$

$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$
введем новую переменную
$\cos x = t$, $|t| \le 1$
уравнение примет вид
$at^2 + bt + c = 0$
Решая квадратное уравнение, находим t_1; t_2
Вернемся к переменной x
$\cos x = t_1$ $\quad$ $\cos x = t_2$

$a\,tg^2 x + b\,tgx + c = 0$
введем новую переменную
$tgx = t$, $t \in R$
уравнение примет вид
$at^2 + bt + c = 0$
Решая квадратное уравнение, находим t_1; t_2
Вернемся к переменной x
$tgx = t_1$ $\quad$ $tgx = t_2$

Пример:

$\sin^2 x + 5\sin x - 6 = 0.$

делаем замену $\sin x = t, t \in [-1,1]$,получаем квадратное уравнение: $t^2 + 5t - 6 = 0$,

находим корни $t_1 = 1,\ t_2 = -6$,замечаем, что $t_2 = -6$ посторонний корень, поскольку $t \in [-1,1]$, делаем обратную замену, т.е. решаем уравнение $\sin x = 1$, у которого корнями будут числа $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Решите уравнения:

1.) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$.

2) $tgx = 3ctgx$.

3) $cos2x = 2cosx - 1$.

4) $2sin^2x - sinx - 1 = 0$

5) $2cos^2x + 3sinx = 3$

6) $\sqrt{3}tgx - \sqrt{3}ctgx = 2$

7) $2sin^2x + sinx - 1 = 0$

8) $5sin^2x + 6cosx - 6 = 0$

9) $2ctgx - 3tgx + 5 = 0$

Практическая работа № 50

Тема: Решение логарифмических уравнений

Цель: Научить учащихся решать логарифмические уравнения

Теоретический блок

Решение любого логарифмического уравнения также сводится к решению одного или нескольких простейших логарифмических уравнений:

1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$; 2) $\log_a f(x) = b$.

Уравнение (2) сводится к уравнению вида (1): $\log_a f(x) = \log_a a^b$.

Уравнения вида (1) сводятся к решению уравнений f(x)= g(x) (потенцирование). При этом необходимо помнить, что уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ и f(x)= g(x) не равносильны. При потенцировании происходит расширение области определения, а значит имеется опасность появления посторонних корней. Проверка – наилучшее средство против такой опасности.

1 тип – по определению логарифма:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) = -2$.

Решение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 2x-1$; 2x–1=9; x=5.

Проверка: $\log_{\frac{1}{3}}(10-1) = -2$; $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; $-2\log_3 3 = -2$; –2=–2 – верно.

Ответ: x=5.

б) $\log_3(x^2+4x+12) = 2$.

Решение: $3^2 = x^2 + 4x + 12$; $x^2 + 4x + 12 - 9 = 0$; $x^2 + 4x + 3 = 0$;

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1$; $x_1=-1$ и $x_2=-3$.

Проверка: x=–1, $\log_3(1-4+12)=2$; $\log_3 9=2$; $2\log_3 3=2$; 2=2 – верно;

x=–3, $\log_3(9-12+12)=2$; $\log_3 9=2$; $2\log_3 3=2$; 2=2 – верно.

Ответ: x=–1, x=–3.

в) $\log_2\left(\frac{8}{2^x}-1\right) = x-2$.

Решение: $2^{x-2} = \frac{8}{2^x}-1$; $2^x \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{2^x}-1$. Пусть $2^x = y$, тогда уравнение запишем в виде $\frac{y}{4}-\frac{8}{y}+1=0$; $y^2+4y-32=0$;

$y_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+32} = -2 \pm 6$; $y_1 = 4$; $y_2 = -8$; $2^x = 4$; $2^x = 2^2$; x=2; $2^x \neq -8$.

Проверка: $\log_2\left(\frac{8}{4}-1\right) = 2-2$; $\log_2 1 = 0$ – верно.

Ответ: x=2.

2 тип – уравнения, которые с помощью логарифмических тождеств сводятся к простейшим уравнениям:

а) lg(x–3)+lg(x–2)=1–lg5.

Решение: lg[(x–3)(x–2)]=lg10–lg5; $\lg(x^2-5x+6)=\lg 2$;

$x^2-5x+6=2$; $x^2-5x+4=0$; $x_{1,2}=\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$; x=4 и x=1.

Проверка: x=4; lg(4–3)+ lg(4–2)=1– lg5; lg1+ lg2= lg2; lg2= lg2 – верно;

x=1; lg(1–3)+ lg(1–2)≠1– lg5, так как выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть всегда положительным.

Ответ: x=4;

б) $\frac{2\lg 2 + \lg(x-3)}{\lg(7x+1)+\lg(x-6)+\lg 3} = \frac{1}{2}$.

Решение: $\frac{\lg 4+\lg(x-3)}{\lg(3(7x+1)(x-6))}=\frac{1}{2}$; $\frac{\lg(4(x-3))}{\lg(3(7x+1)(x-6))}=\frac{1}{2}$;

2 lg(4(x–3))= lg(3(7x+1)(x–6)); $\lg(4(x-3))^2=\lg(3(7x+1)(x-6))$.

Потенцируем: $16x^2-96x+144=21x^2-123x-18$; $-5x^2+27x+162=0$;

$5x^2-27x-162=0$; $x_{1,2}=\frac{27\pm\sqrt{3869}}{10}=\frac{27\pm 63}{10}$; $x_1=9$; $x_2=-\frac{36}{10}=-\frac{18}{5}$.

Проверка: x=9; $\frac{2\lg 2+\lg 6,}{\lg 64+\lg 3+\lg 3}=\frac{1}{2}$; $\frac{\lg 24}{2\lg 8+2\lg 3}=\frac{1}{2}$;

$\frac{\lg 24}{2\cdot\lg 24}=\frac{1}{2}$ – верно;

x= $-\frac{18}{5}$; $\frac{2\lg 2+\lg\left(-\frac{18}{5}-3\right)}{\lg\left(-\frac{126}{5}+1\right)+\lg\left(-\frac{18}{5}-6\right)+\lg 3}=\frac{1}{2}$ – ложно, так как подлогарифмическое выражение не может быть отрицательным.

Ответ: x=9;

в) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27}x=5{,}5$.

Решение. Воспользуемся формулой $\log_{a^m}b=\frac{1}{m}\log_a b$;

$\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x=5{,}5$; $\frac{11}{6}\log_3 x=5{,}5$; $\log_3 x=3$; x=27.

Проверка: $\log_3 27+\log_9 27+\log_{27}27=5{,}5$; $\log_3 3^3+\log_{3^2}3^3+1=5{,}5$;

$3+\frac{3}{2}+1=5{,}5$ – верно.

Ответ: x=27;

г) $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$.

Решение: $\log_5((3x-11)(x-27))=\log_5(5^3\cdot 8)$.

Потенцируем: (3x–11)(x–27)=1000; $3x^2-92x-703=0$. $x_{1,2}=\frac{46\pm\sqrt{2116+2109}}{3}=\frac{46\pm 65}{3}$; $x_1=37$ и

$x_2=-\frac{19}{3}$.

Проверка: 1. $\log_5(111-11)+\log_5(37-27)=3+\log_5 8$;

$\log_5 100+\log_5 10=\log_5 1000$; $\log_5 1000=\log_5 1000$ – верно.

2. $\log_5(-19-11)+\log_5\left(-\frac{19}{3}-27\right)\neq 3+\log_5 8$, так как выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительное.

Ответ: x=37.

3 тип – уравнения вида $P(\log_a x)=0$, где $P(y)$ – многочлен 2 или 3 степени, или уравнения, сводящиеся к ним. Эти уравнения решаются с помощью подстановки: $y=\log_a x$.

а) $\log_3^2 x-\log_3 x^2-3=0$.

Решение: $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$. Пусть $\log_3 x=y$; $y^2-2y-3=0$. Решаем уравнение и получаем $y_1=3$ и $y_2=-1$; $y=3\Rightarrow\log_3 x=3\Rightarrow x=27$; $y=-1\Rightarrow\log_3 x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{3}$.

Проверка: x=27; $\log_3^2 27-\log_3 27-3=0$; $(\log_3 27)^2-\log_3 3^6-3=0$;

9–6–3=0 – верно;

$x=\frac{1}{3}$; $\log_3^2\frac{1}{3}-\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^2-3=0$; $(\log_3 3^{-1})^2-\log_3 3^{-2}-3=0$;

1+2–3=0 – верно.

Ответ: x=27; $x=\frac{1}{3}$;

б) $\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1$.

Решение. Прежде всего надо иметь в виду, что если в уравнениях встречаются логарифмы с разными основаниями, то их надо привести к одному основанию с помощью формулы: $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

В данном случае переходим к основанию 5. $\frac{\log_5(5x^2)}{\log_5 x}\cdot\log_5^2 x=1$;

$(\log_5 5+2\log_5 x)\log_5 x=1$. Обозначим $\log_5 x=y$; $(1+2y)y=1$;

$2y^2+y-1=0$; $y_1=-1$, $y_2=\frac{1}{2}$; $\log_5 x=-1$ или $\log_5 x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{5}$; $x=\sqrt{5}$.

Проверка: 1) $\log_{\frac{1}{5}}\left(5\cdot\frac{1}{25}\right)\cdot\log_5^2\frac{1}{5}=1$; $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5}\cdot(-1)^2=1$; 1=1 – верно;

2) $\log_{\sqrt{5}}(5\cdot 5)\cdot\log_5^2\sqrt{5}=1$; $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^4\cdot\left(\log_{(\sqrt{5})^2}\sqrt{5}\right)^2=1$;

$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$; 1=1 – верно.

Ответ: $x=\frac{1}{5}$; $x=\sqrt{5}$.

5 тип – логарифмирование обеих частей уравнения.

Пример: $x^{\lg x+1}=\frac{1000}{x}$.

Решение: $\lg x^{\lg x+1}=\lg\frac{1000}{x}$; $(\lg x+1)\lg x=3-\lg x$; $\lg^2x+\lg x=3-\lg x$; $y=\lg x$;

$y^2+2y-3=0$. Решаем уравнение: $y_1=-3$; $y_2=1$; $\lg x=-3$ или $\lg x=1$,

$x=10^{-3}$; $x=10$.

Проверка: 1) $(10^{-3})^{\lg 10^{-3}+1}=\frac{1000}{10^{-3}}$; $(10^{-3})^{-3+1}=10^6$; $(10^{-3})^{-2}=10^6$;

$10^6=10^6$ – верно;

2) $10^{\lg 10+1}=\frac{1000}{10}$; $10^2=100$; $10^2=10^2$ – верно.

Ответ: $x=10^{-3}$; $x=10$.

Практическая работа № 50

Тема: Решение логарифмических неравенств

Цель: Научить учащихся решать логарифмические неравенства

Теоретический блок

Неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании, называются логарифмическими.

Решение логарифмических неравенств основывается на свойстве монотонности логарифмической функции.

Так же некоторые логарифмические неравенства можно решить методом замены переменной.
Упражнения:

1.Решить неравенство $\log_2\left(x^2+4x+3\right)>3$
По определению логарифма, область допустимых значений:

$$x^2+4x+3>0$$

Решение данного неравенства найдем с помощью метода интервалов, для этого левую часть разложим на множители. Решим квадратное уравнение $x^2+4x+3=0$.

$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4\pm 2}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 2}{2}=\{-3;-1\}$$

Таким образом, получили корни $x_1=-3,\ x_2=-1$. Значит, левую часть неравенства можно представить в виде:

$$1\cdot(x-(-3))\,(x-(-1))>0\Leftrightarrow(x+3)(x+1)>0$$

Отметим нули каждого множителя (а это будут значения $x_1=-3,\ x_2=-1$) на числовой прямой и определим знаки неравенства в полученных интервалах:

Учитывая знак неравенства, определим ОДЗ:

$$x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$$

ОДЗ определили, теперь приступим к решению исходного логарифмического неравенства:

$$\log_2\left(x^2+4x+3\right)>3$$

Представим правую часть неравенства как логарифм по основанию 2:

$$\log_2\left(x^2+4x+3\right)>\log_2 2^3$$

Перейдем от неравенства относительно логарифмов к неравенству для подлогарифмических функций: так как основание логарифма больше единицы (2 > 1), то знак неравенства не изменится

$$x^2+4x+3>2^3$$
$$x^2+4x+3>8$$
$$x^2+4x-5>0$$

Приравняем к нулю левую часть неравенства и решим полученное квадратное уравнение $x^2+4x-5=0$.

$$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot 1\cdot(-5)=16+20=36$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{36}=6$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4\pm 6}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 6}{2}=\{-5;1\}$$

Таким образом, получили корни $x_1=-5,\ x_2=1$. Отметим точки на числовой оси и определим знаки неравенства в полученных интервалах.

Учитывая, что нас интересуют все значения x, при которых данное неравенство принимает положительные значения, то получаем следующие интервалы: $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$. Это ответ, так как данные интервалы полностью принадлежат ОДЗ.

2.Решить неравенство $\log_{0,5}(2x-4) < \log_{0,5}(x+1)$

Находим ОДЗ по определению логарифма. ОДЗ

$$\begin{cases} 2x-4>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>4 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; +\infty)$$

Перейдем в неравенства от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, при этом, так как основание логарифма меньше единицы ($0,5 < 1$), знак неравенства поменяем на противоположный:

$$2x-4 > x+1$$

$$2x-x > 1+4$$

$$x > 5$$

С учетом ОДЗ, окончательно имеем, что $x \in (5; +\infty)$.

3.Решить неравенство $\log_{0,5} x + \log_{0,5}(x+1) \geq 1$

$$x \in \left(0\ ;\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$$

4.Решить неравенство $\log_3 x + \log_x 9 > 2$

5.Решить неравенство $log_8(x^2\text{-}4x+3)<1$.

Практическая работа № 51

Тема: Решение показательных уравнений
Цель: Научить решать показательные уравнения
Теоретический блок
Показательным уравнением называется уравнение содержащее переменную в показателе, то есть это уравнение вида:

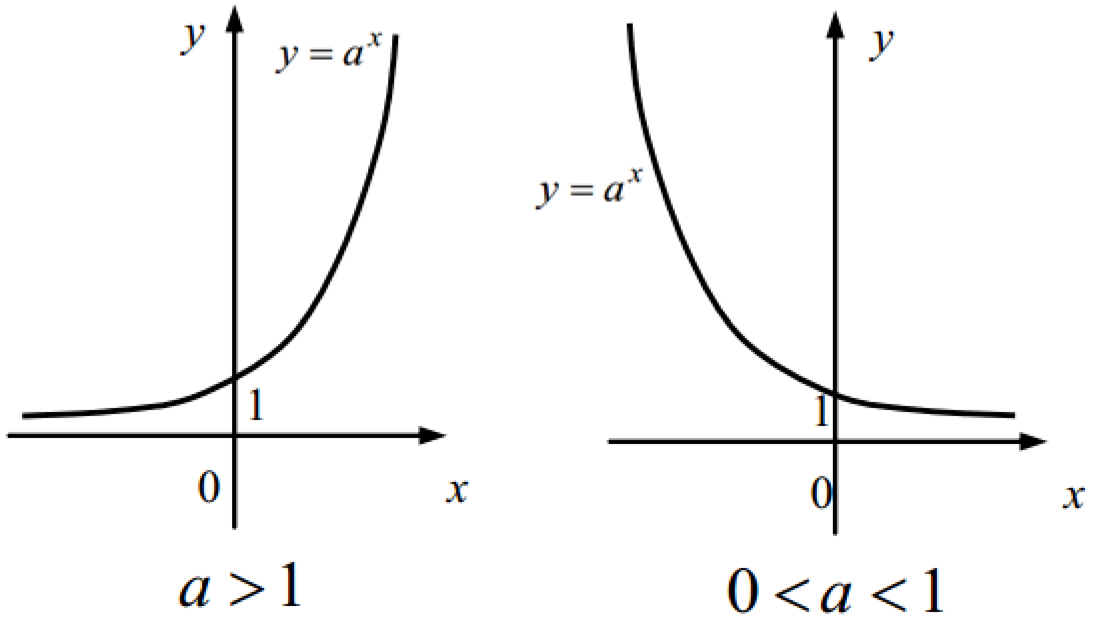
$a^{f(x)} = b$, где $a > 0$ $a \neq 1$ $b > 0$

Самое простейшее показательное уравнение:

$$a^x = b$$

$$a > 0 \quad a \neq 1 \quad b > 0$$

При данных условиях уравнение всегда имеет решение, при том единственное. Действительно, при $a > 1$ показательная функция монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает. В любом случае, она принимает каждое своё значение ровно один раз (видно по графику):



А вот если $b < 0$, то уравнение не имеет решений, ведь показательная функция может принимать только положительные значения.

Методы решения показательных уравнений

1. В результате преобразований уравнение можно привести к виду:

$$a^{f(x)} = a^c$$

Тогда применяем свойство:

$$a^{f(x)} = a^c \quad \Rightarrow \quad f(x) = c$$

2. При получении уравнения вида $a^{f(x)} = b$ используется определение логарифма, получим:

$$f(x) = log_a b$$

3. В результате преобразований можно получить уравнение вида:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

Применяется логарифмирование:

$$log_c a^{f(x)} = log_c b^{g(x)}$$

Далее применяем свойство логарифма степени:

$$f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b$$

Выражаем и находим x.

Упражнения

1. $6^x = 216$

2. $8^{x+1} = 0,125$

3. $2^{x+3} - 2^{x+2} - 2^x = 48$

4. $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$

5. $2^x - 2^{0,5x+1} - 8 = 0$

6. $4^{1-2x} = 64$.

7. $3^{x-18} = 1/9$.

8. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-19} = \frac{1}{64}$

9. $\left(\frac{1}{3}\right)^{8-2x} = 9$

10. $16^{x-9} = \frac{1}{2}$

Практическая работа № 52

Тема: Решение показательных неравенств

Цель: Научить решать показательные неравенства

Теоретический блок

Показательными называются неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

При решение показательных неравенств пользуемся следующими свойствами показательной функции:

1) $a^x > 0$ при всех $a > 0$ и $x \in \boldsymbol{R}$;

2) при $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, т.е. если $a>1$ и $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$;

3) при 0< a < 1 функция $y = a^x$ убывает, т.е. если $0 < a < 1$ и $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Упражнения:

Пример 1**.** Решите неравенство:

$$16^x - 2 \cdot 12^x \leqslant 3^{2x+1}.$$

Решение: представим исходное неравенство в виде:

$$4^{2x} - 2 \cdot 4^x \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{2x} \leqslant 0.$$

Разделим обе части этого неравенства на 3^{2x}, при этом (в силу положительности функции $y = 3^{2x}$) знак неравенства не изменится:

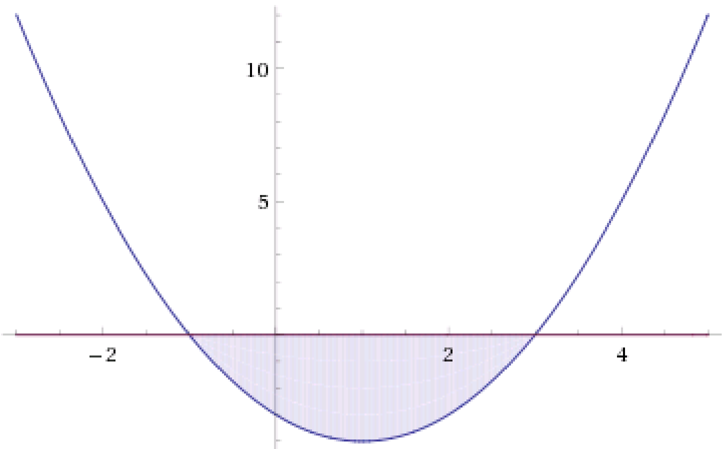
$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - 3 \leqslant 0.$$

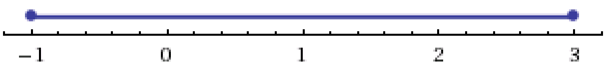
Воспользуемся подстановкой:

$$t = \left(\frac{4}{3}\right)^x.$$

Тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 2t - 3 \leqslant 0.$$





Итак, решением неравенства является промежуток:

$$-1 \leqslant t \leqslant 3,$$

переходя к обратной подстановке, получаем:

Итак, решением неравенства является промежуток:

$$-1 \leqslant t \leqslant 3,$$

переходя к обратной подстановке, получаем:

$$-1 \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^x \leqslant 3.$$

Левое неравенства в силу положительности показательной функции выполняется автоматически. Воспользовавшись известным свойством логарифма, переходим к эквивалентному неравенству:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{4}{3}} 3}.$$

Поскольку в основании степени стоит число, большее единицы, эквивалентным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству:

$$x \leqslant \log_{\frac{4}{3}} 3.$$

Итак, окончательно получаем **ответ:**

$$x \in (-\infty; \log_{\frac{4}{3}} 3].$$

$4^{3-2x} = 4^{2x}$

1.

2.

$4 \quad + 2^x - 24 = 0$

3.

4.

.4 $-3 \cdot 2^{x} = 40$

5

$2x$

6.

7.$16^{x} + 4 \cdot 4^{x} - 5 = 0$

8.

$2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^{x} + 6 = 0$

9.

Практическая работа № 53

Тема: Решение систем уравнений
Цель: Научить решать системы уравнений

Теоретический блок

При решении систем уравнений, содержащих неизвестные в показателе степени и в её основании или под знаком логарифма и в его основании , применяются методы решения систем алгебраических уравнений, а также методы решения показательных и логарифмических уравнений.

Пример 1**.** Решить систему

$$\begin{cases} 3^{x} - 4^{y} = 65, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{y} = 5. \end{cases}$$

Решение: Полагая $3^{\frac{x}{2}} = u$, $2^{y} = v$, заменим исходную систему алгебраической системой

$$\begin{cases} u^{2} - v^{2} = 65, \\ u - v = 5, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} u + v = 13, \\ u - v = 5, \end{cases}$$

имеющей решение $u=9$, $v=4$. Следовательно, $3^{\frac{x}{2}}=9$, $2^{y}=4$, откуда находим $x=4$, $y=2$.

Ответ: (2; 4).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x}+2y=1, \\ 3y-6y^{2}=2^{x-1}. \end{cases}$$

Решение. Обозначив $2^{x}=u$, u>0, получим алгебраическую систему:

$$\begin{cases} u+2y=1, \\ 3y-6y^{2}=\frac{1}{2}u; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-2y, \\ 3y-6y^{2}=\frac{1-2y}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1-2y, \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{6}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0, (*) \\ y=\frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{1}{6}, \\ u=\frac{2}{3} \end{cases} \end{array} \right.$$

(*) не удовлетворяет условию u>0.

Вернёмся к переменной x: $\begin{cases} y=\frac{1}{6}, \\ 2^{x}=\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{6}, \\ x=\log_{2}\frac{2}{3}. \end{cases}$

Ответ: (1-$\log_{2}3$; $\frac{1}{6}$).

Упражнения:

Решить систему уравнений:

1. $\begin{cases} 4^{x}\cdot 2^{y}=32, \\ 3^{8x+1}=3^{3y}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 16^{2x}+16^{2y}=24, \\ 16^{x+y}=256. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3^{x}\cdot 2^{x+y+1}=5, \\ 3^{x+1}-2^{x+y}=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^{y}=9, \\ \sqrt[y]{324}=6x. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \sqrt[x]{x+7y}=3, \\ (2x+14y)2^{x}=72. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x^{x+y}=y^{24}, \\ y^{x+y}=x^{6}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y^{x^{2}-3x-4}=1, \\ \log_{a}x=y. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \log_{5}x+3^{\log_{3}y}=7, \\ x^{y}=5^{12}. \end{cases}$ 9. $\begin{array}{l} \lg^{2}x+\lg^{2}y=5, \\ \lg x-\lg y=1. \end{array}$

10. $\begin{cases} \lg(x^{2}+y^{2})=1+2\lg 2, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 2. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2^{x-y}=4^{x+y}, \\ x^{4}-5=4^{\log_{\sqrt{2}}y}. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2^{x}\cdot 3^{-y}=1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y+=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 5, \\ \log_4 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$

14. $3^x \cdot 9^y = 27,$
$\lg(2x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3.$

Практическая работа № 54

Тема: Контрольная работа

Цель: Проконтролировать уровень усвоения материала по данной теме

1 вариант

Решите уравнения:

1.$4sin^2x + 11sinx - 3 = 0$

2.$6cos^2x + cosx - 1 = 0$

3.$9^x + 4 \cdot 3^x - 45 = 0$
$7^x + 7^{x+2} = 350$

4.

5.$log_2(x^2 - x - 4) = 3$

6.$log_3^2 x = 4 - 3log_3 x$

7.

Решите неравенства:

1.$\frac{16}{\sqrt{32}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$

$4 \qquad < 5^{log_5 4}$

2.

$0{,}04^x - 26 \cdot 0{,}2^x + 25 \leq 0$

3.

4.2$log_2 x < 2 + log_2(x+3) = 3$

5.

Решите системы уравнений

1. $\begin{cases} \lg^2 \dfrac{x}{y} = 3\lg^2 x + \lg^2 y, \\ \lg^2 (y-3x) + \lg x \lg y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^{2\log_2 x} + 3^{2\log_3 y} = 8, \\ 2^{2\log_{\frac{1}{2}} x} + 3^{2\log_{\frac{1}{3}} y} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2 Вариант

Решите уравнения:

1. $tgx - 2ctgx + 1 = 0$

2.

3

4.

5.

6.$3lg^2(x-1) - 10\lg(x-1) + 3 = 0$

7.$log_3\sqrt{x-5} + log_3\sqrt{2x-3} = 1$

Решите неравенства:

$3^{x^2+x} < 10^{lg9}$

1.

2.

$4 \quad - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

3.

4.2$log_2 x < 2 + log_2(x+3) = 3$

5.

Решите системы уравнений

1. $\begin{cases} 3 \cdot 2^{\frac{y-x}{2}\,y} = (\frac{1}{2})^{x-3}, \\ \log_3 (y-2x) = 3 - \log_3 (2x+3y). \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 7, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 6. \end{cases}$

Практическая работа№ 55

Тема: Решение комбинаторных задач. Контрольная работа

Цель: Закрепить умения студентов решать задачи
Теоретический блок

Основными элементами комбинаторики являются *размещения, перестановки, сочетания*.

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. *Размещением* из n элементов по m элементов называется упорядоченное множество, содержащее m различных элементов данного множества. Из определения вытекает, что размещения из n элементов по m элементов - это все m –элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования. Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов обозначают A_n^m и вычисляют по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) \quad \text{или} \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1)$$

Здесь $n! = 1\cdot 2\cdot 3 ... (n-1)n$ и $(n-m)! = 1\cdot 2\cdot 3 ... (n-m-1)(n-m)$. Условимся считать 0! = 1, поэтому $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$.

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают P_n . Из определения перестановок следует

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \text{ , т.е } \quad P_n = n! \qquad (2)$$

Сочетанием из n элементов по m $(0 \le m \le n)$ элементов называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов данного множества. Следовательно, сочетания из n элементов по m элементов - это все m - элементные подмножества n - элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m и вычисляют по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...(n-m+1)}{m!}. \qquad (3)$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (4)$$

Пример **1.** В группе из 30 учащихся нужно выбрать комсорга, профорга, физорга. Сколькими способами это можно сделать, если каждый из 30 учащихся комсомолец, член профсоюза и спортсмен?

Решение: искомое число способов равно числу размещений из 30 элементов по 3 элемента, т.е. A_{30}^3. Положив по формуле (1) $n=30$, $m=3$, получаем $A_{30}^3 = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$.

Ответ: 24360 способов. Пример 2. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение: Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ: 720 способов расстановки.

Пример 3. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: т.к. порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами. По формуле (4) находим $C_{25}^4 = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$.

Ответ: 12650 способов.

1. Сколькими способами можно выбрать 4 детали из ящика, в котором 12 деталей?
2. Сколько можно изготовить различных трёхцветных флажков, если использовать следующие цвета: белый, синий, красный, жёлтый, чёрный, зелёный?
3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5,6?
4. В вазе 5 красных и 7 белых роз. Сколькими способами можно составить букет из 5 роз, если в нем должно быть две красных и три белых розы?
5. Решить уравнения: $\dfrac{(x+1)!}{20} = (x-1)!$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 56.$$

6.Вычислить: $(A_9^3 + A_9^2) : P_8$.

$$(A_{15}^7 - A_{15}^6) : C_{16}^7$$

7. Сколькими способами можно увезти со склада 10 ящиков на двух машинах, если на каждую из машин грузят по 5 ящиков?
8. Из восьми цифр 1,2,3,4,5,6,7,8 нужно составить четырехзначный код. Сколько вариантов кода существует, если повторения цифр в нем быть не должно?
9. В школе четыре выпускных класса. Сколько способов распределения экзаменаторов существует для проведения экзамена по химии, если на одном экзамене присутствует только один экзаменатор?
10. В вазе 5 апельсинов и 8 яблок. Сколькими способами можно выбрать 6 фруктов, чтобы среди них было 3 апельсина

Контрольная работа

.Вариант 1

1. Группа из 28 студентов обменялась фотокарточками. Сколько фотокарточек было роздано?

2. Для участия группы, в составе 30 человек в спортивных состязаниях нужно выбрать команду из 4-х человек. Сколькими способами можно выбрать участников состязания?

3. Сколькими способами можно составить список из 8-ми человек?

4. В ящике с детскими кубиками 8 зеленых и 5 красных кубиков. Сколько способов выбора 7 кубиков существует, если среди них должно быть 5 зеленых кубиков?

5.Решить уравнения: $2C_{x+2}^{x-2} = A_x^2$.

$$2C_{x+5}^2 - 15C_x^1 = 75$$

Вариант 2

1.Вычислить: $A_{20}^8 : (P_8 \cdot C_{20}^{12})$..

$$P_5 \cdot C_9^4 - A_8^3.$$

2. Сколько аккордов можно составить на 10-ти клавишах рояля, если каждый аккорд содержит три звука?

3. На коллектив из 25-ти человек выделено три путевки: в санаторий, в дом отдыха и на турбазу. Сколько способов распределения путевок существует?

4. Сколькими способами можно рассадить 7 человек на 7-ми стульях?

5. На столе лежит стопка карт, в которой 10 карт черной масти и 8 карт – красной. Сколькими способами можно выбрать 8 карт, чтобы среди них было 5 карт черной масти?

Практическое занятие № 56

Тема: Классическое определение вероятности случайного события

Цель: Закрепить умения студентов решать задачи на классическое определение вероятности случайного события

Теоретический блок

Классическое определение вероятности Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу, всех исходов (несовместных, единственно возможных, равновозможных), т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы. Невозможному событию соответствует вероятность равная 0, а достоверному – вероятность равна единице.

Пример

Из урны в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.
Решение: Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через А. Общее число случаев равно 8. Число случаев благоприятствующих появлению события А, равно3. Получим

$$P(A)=\frac{3}{8}$$

Упражнения:

1. Герман из повести А.С. Пушкина «Пиковая дама» вынимает 3 карты из колоды в 52 листа. Найдите вероятность того, что это будут: тройка, семерка, туз.
2. В ящике лежат 15 красных, 9 синих, и 6 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 синих, 3 красных шара.
3. Владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (6из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже.
4. В урне 10 шаров, из которых 2 белых,3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета.
5. В партии из 10 деталей имеются 4 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 5 деталей окажутся 2 бракованные.
6. Коллектив, включающий четырех женщин и троих мужчин, разыгрывает 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины.
7. В группе из 25 студентов, среди которых 10 девушек, разыгрываются 5 билетов. Найдите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.
8. В урне 6 белых, 4 черных и 5 красных шаров. Из урны наугад вынимают 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них окажутся 2 белых и 1 черный шар.
9. Юноша забыл две последние цифры телефонного номера своей знакомой и помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер будет набран правильно?
10. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников;

Практическая работа № 57

Тема: Теоремы о сумме и об умножении вероятности
Цель: Научиться вычислять вероятности событий с помощью теорем умножения вероятностей

Теоретический блок

Произведением или пересечением двух событий А и В называется событие С, состоящее в одновременном наступлении А и В. Символически произведение записывают так: С=АВ или $C=A\bigcap B$. Если А и В — несовместные события, то $A\bigcap B=V$, т. е. их пересечение пусто (невозможное событие).

Два случайных события называются *противоположными,* если одно из них происходит в том и только в том случае, когда не происходит другое. Событие, противоположное событию А, обозначают через $\overline{A}$ (читают «не А»). Противоположные события образуют полную систему попарно несовместных событий, т. е. $A \bigcup \overline{A} = U, \quad A \bigcap \overline{A} = V$.

Теоремы умножения вероятностей

Произведение двух событий состоит из тех элементарных событий, которые благоприятствуют и первому, и второму событию, то есть принадлежат их пересечению $AB = A \cap B$. Вероятность произведения событий зависит от того, являются ли эти события зависимыми или независимыми. События A и B называются *независимыми,* если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие. *Вероятности* независимых событий A и B называются *безусловными;* и вероятность произведения таких событий равна произведению их вероятностей

$$P(AB) = P(A)\,P(B) \qquad (1)$$

Вероятность совместного появления нескольких *независимых событий* в совокупности равна *произведению вероятностей этих*:

$$P(A_1\ A_2\ ..\ A_n) = P(A_1)\ P(A_2)\ \ldots \cdot P(A_n) \qquad (1.1)$$

События А и В *зависимые*, если вероятность одного из событий зависит от появления или непоявления другого. Вероятность события *B,* вычисленная в предположении, что *A* уже осуществилось, называется *условной вероятностью* и обозначается $P_A(B)$.

Вероятность *произведения двух зависимых событий* равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \quad \text{или} \quad P(AB) = P(B)P_B(A). \qquad (2)$$

Вероятность *совместного появления нескольких зависимых событий* (произведения событий) равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что предыдущие события уже произошли (теорема умножения вероятностей для зависимых событий):

$$P(A_1 A_2\ \ldots..\ A_n) = P(A_1)\ P_{A1}\ (A_2)P_{\ A1\ A2}\ (A_3)\ \ldots..\ P_{\ A1\ A2\ \ldots.\ An\text{-}1}\ (A_n) \qquad (2.1)$$

Упражнения:

Пример 1. Имеется три ящика, содержащих по 10 деталей, причем в первом ящике - 8, во втором – 7 и в третьем – 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали будут стандартные.

Решение: вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие *A*) равна $P(A) = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$. Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B) равна $P(B)=\frac{7}{10}=0{,}7$.Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C) равна $P(C)=\frac{9}{10}=0{,}9$. Событие «все три вынутые детали будут стандартные» -есть произведение событий *A, B,C.* Т.к. события *A, B, C* – попарно независимы , то по теореме умножения вероятностей для независимых событий имеем:

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504 .$$

Пример 2. В вазе лежит 3 шоколадных и 7 вафельных конфет. Наудачу берется одна конфета, затем другая. Найти вероятность того, что первая конфета была шоколадной, а вторая – вафельной?

Решение: вероятность того, что первая конфета - шоколадная (событие А) $P(A)=\frac{3}{10}$.

Вероятность того, что вторая конфета – вафельная, вычисленная в предположении, что первая конфета была шоколадной, т.е. условная вероятность равна $P_A(B)=\frac{7}{9}$. Т.е. по теореме умножения для зависимых событий имеем: $P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

Пример 3. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании извлечен белый шар (событие А), при втором - черный шар (событие В), при третьем – синий (событие С)?

Решение: Вероятность появления белого шара в первом испытании равна $P(A)=\frac{5}{12}$.

Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании вынут белый шар, т.е. условная вероятность равна $P_A(B)=\frac{4}{11}$. Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании вынут белый шар, а при втором – черный, т.е. условная вероятность равна $P_{AB}(C)=\frac{3}{10}$.Окончательно имеем:

$$P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}$$

Операции над событиями

Суммой или объединением двух событий A и В называется событие С, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий А или В. Символически это записывают так: $C=A+B$ *или* $C=A\cup B$.

Теорема сложения вероятностей

В общем случае *вероятность суммы двух событий* равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления и определяется по формуле:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (3)$$

Очевидно, что *если события несовместны,* то вероятность их совместного наступления равна нулю. Поэтому для двух несовместных событий вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (4)$$

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+....+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n) \qquad (4.1)$$

Формулы для определения вероятности суммы большего числа совместных событий достаточно громоздки. Если число событий возрастает, то часто бывает удобнее использовать вероятность противоположных событий. В самом деле, событие, состоящее в том, что наступит *хотя бы одно* из нескольких элементарных событий, *противоположно* событию - *«не наступит ни одно* из них», поэтому можно использовать формулу:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\bar{A}_1\ \bar{A}_2\ ...\ \bar{A}_n) \qquad (5)$$

Упражнения:

Пример 1. На стеллаже в библиотеке в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь наудачу берет три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников будет в переплете (событие А).

Решение: событие А - «хотя бы один из взятых учебников будет в переплете» будут осуществлено, если произойдет любое из трех несовместных событий: В – «один учебник в переплете», С- «два учебника в переплете» , В - «три учебника в переплете». Т.е. событие А=В+С+D. Тогда по теореме сложения вероятностей для несовместных событий имеем:

$P(A)=P(B)+P(C)+P(D)$. Вычислим отдельно вероятности событий B, C, D:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91} \qquad P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91} \qquad P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Используя эти результаты, получим: $P(A)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}$.

Пример 2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1=0{,}8,\quad p_2=0{,}7,\quad p_3=0{,}9.$ Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение: вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия), A_3 (попадание третьего орудия) – независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, A_3 (т.е. вероятности промахов) соответственно равны $q_1=0{,}2,\quad q_2=0{,}3,\quad q_3=0{,}1.$

Тогда искомая вероятность $p(A) = 1 - q_1\ q_2\ q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994$.

1. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.
2. В корзине 4 яблока, 3 лимона и 6 персиков. Каждое испытание состоит в том, что из корзины случайным образом падает один фрукт. Найти вероятность того, что из корзины при первом испытании выпадет яблоко, при втором – лимон, при третьем – персик.
3. В двух ящиках находятся детали: в первом - 12 (из 4 стандартных), во втором -10 (из них 7 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что они обе будут стандартные.
4. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
5. В ящике 4 белых, 7 синих и 3 красных мяча. Каждое испытание состоит в том, что из ящика случайным образом выкатывается один мяч. Найти вероятность того, что из ящика при первом испытании выкатится синий мяч, при втором – красный, а при третьем – белый;
6. В первой вазе находится 5 красных и 3 белых гвоздики, во второй – 4 красных и 8 белых гвоздики. Из каждой вазы наудачу берут по одной гвоздике. Какова вероятность того, что будут выбраны красные гвоздики.
7. Из урны, содержащей 10 белых, 8 черных и 1 оранжевых шаров, наугад извлекают три шара. Найти вероятность того, что это будут шары одного цвета.
8. На тактических занятиях зенитная батарея стреляет по двум беспилотным самолетам. Найти вероятность того, что самолеты не будут сбиты, если вероятность сбить один самолет равна 1/2 , а два самолета – 1/8;
9. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартное, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное;
10. В коробке находится 6 синих, 4 красных и 6 зеленых флажков. Каждое испытание состоит в том, что из корзины случайным образом выбирается один флажок. Найти вероятность того, что при первом испытании будет выбран зеленый флажок, при втором – красный, а при третьем – синий.

Домашнее задание

1. В ящике 10 деталей, среди которых четыре окрашены. Сборщик наудачу берет три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окрашена;
2. Во время учебных маневров два танка пытаются прорваться в расположение противотанковой батареи «противника». Какова вероятность того, что будет подбит хотя бы один танк, если вероятность того, что будет подбит один танк равна 2/3, а два танка 2/5.

3. На полке в случайном порядке расставлено семь учебников, причем четыре из них - по математике. Студент наудачу берет два из них. Найти вероятность того, что хотя бы один из них – по математике.

Практическое занятие№ 58

Тема: Контрольная работа

Цель: Проконтролировать уровень усвоения материала

1 Вариант

1. Электронный прибор состоит из двух последовательно включенных блоков. Вероятность выхода из строя за 1 месяц работы первого блока равна 1/3, второго -1/4, а обоих – 1/6. Найдите вероятность бесперебойной работы прибора в течение месяца.

2. В двух ящиках находятся детали: в первом 10 деталей (из них 7 окрашенных), во втором- 8 деталей (из них 5 окрашенных). Из каждого ящика наудачу выбирают по одной детали. Какова вероятность того, что обе будут окрашенные.

3. В ящике 12 деталей, среди них 9 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2-х деталей окажется не более одной нестандартной детали.

4.В ящике в случайном порядке положены 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролер взял наудачу 3 детали. Вычислите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей оказалась стандартной.

5.Студент сдает экзамен по теории вероятностей. Вероятность получить на экзамен «неуд.» равна 0,1; «уд.» - 0,6; «хор.» - 0,2; «отл.» - 0,1. Какова вероятность того, что студент получит на экзамене положительную оценку?

6Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку – 0,2, в восьмерку – 0,5. Сделан один выстрел. Какова вероятность следующих событий:

а) выбито не менее 8 очков;
б) выбито менее 8 очков;
в) выбито более 8 очков;
г) выбито не более 8 очков.

7.Производится два выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна 0,6, при втором – 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

8.Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

2 Вариант

1. Из чисел 1, 2,3,4…100 выбирают число. Найти вероятность того, что выбранное число делится хотя бы на одно из чисел: 4 и 6.

2. Вероятность того, что при измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая некоторую заданную точность, равна 0,4. Произведено два независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

3. На полке вперемежку расставлено 4 учебника по геометрии, 5 учебников по географии и 3 учебника по астрономии. Каждое испытание состоит в том, что библиотекарь случайным образом выбирает один учебник. Найти вероятность того, что при первом испытании будет выбран учебник по астрономии, при втором – по геометрии, а в третьем – по географии;

4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой из них вероятность того, что она включена в данный момент равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент ни одна из них не включена

5.В урне находятся 7 белых и 3 черных шара. Подряд извлекают два шара. Какова вероятность того, что они оба черные?

6.Монету подбросили два раз. Найти вероятность того,что оба раза выпадет герб.

7. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из каждой урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что оба вынутых шара белые?

8.Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым -0,8; третьим – 0,9. Найти вероятность того, что :

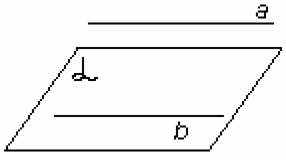
а) все три стрелка попадут в цель;
б) все три стрелка промахнуться;
в) только один стрелок попадет в цель;
г) только два стрелка попадут в цель;
д) не более двух стрелков попадут в цель;
е) хотя бы один стрелок попадет в цель.

Практическое занятие№ 59

Тема: Свойства параллельных плоскостей
Цель: Научить решать задачи, используя свойства параллельных плоскостей
Теоретический блок
Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек ($a \parallel \alpha$)

Признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна самой плоскости.



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset \alpha \\ a \not\subset \alpha \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel \alpha$$

рис. 1

Замечания.

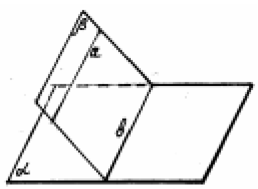


рис. 2

Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, а другая прямая имеет с плоскостью общую точку, то эта прямая лежит в данной плоскости.

Выводы.

Случаи взаимного расположения прямой и плоскости:
а) прямая лежит в плоскости;
б) прямая и плоскость имеют только одну общую точку;
в) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

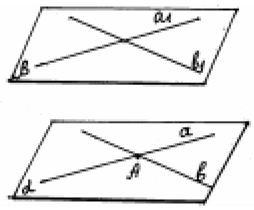


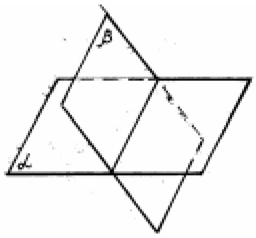
рис. 3

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

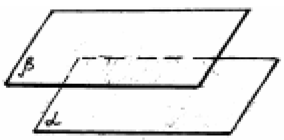
Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Случаи взаимного расположения плоскостей:



плоскости α и β пересекаются.

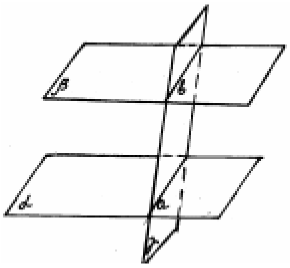
рис. 4



плоскости α и β параллельны.

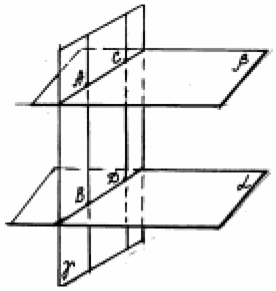
рис. 5

Свойства параллельных плоскостей:



1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

рис. 6

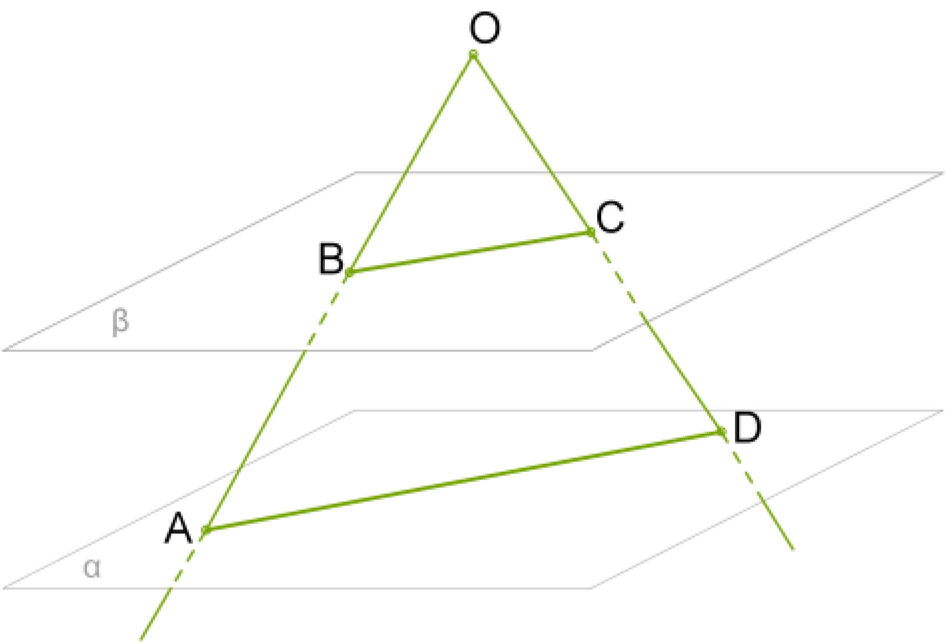


2. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

рис. 7

Решение задач:

Дан угол AOD и две параллельные плоскости α и β.



Плоскость α пересекает стороны угла OA и OD соответственно в точках A и D, плоскость β эти стороны пересекает соответственно в точках B и C.

Дано:

OB= 8

AB= 6

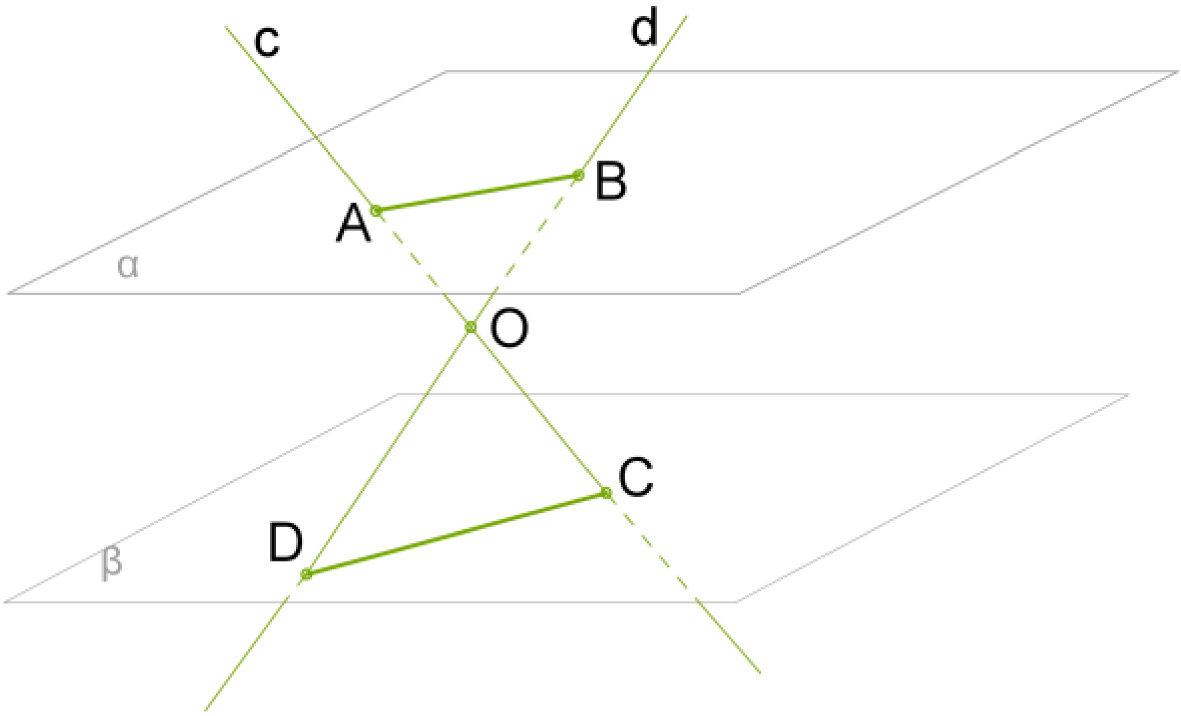
BC= 9

CD= 2

Найти AD, OD

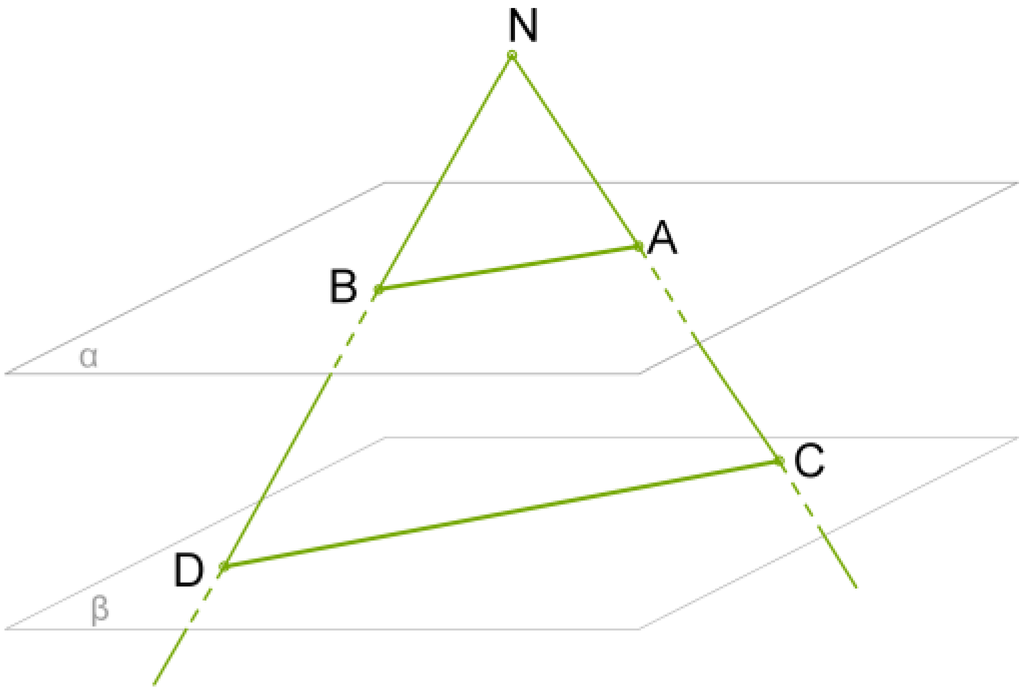
Через точку O, которая находится между параллельными плоскостями α и β, проведены прямые c и d, пересекающие плоскости так, что точки A и B находятся в плоскости α, а точки C и D - в плоскости β AB=18 см, DO=26 см и AC=3·AO

Вычислить: BD;CD



Параллельные плоскости α и β пересечены прямыми c и d

Стороны ∡N пересекают параллельные плоскости β и α в точках C,D и A,B. Вычисли длину отрезка AB, если NA=13 см, NC=20 см и CD=55 см.

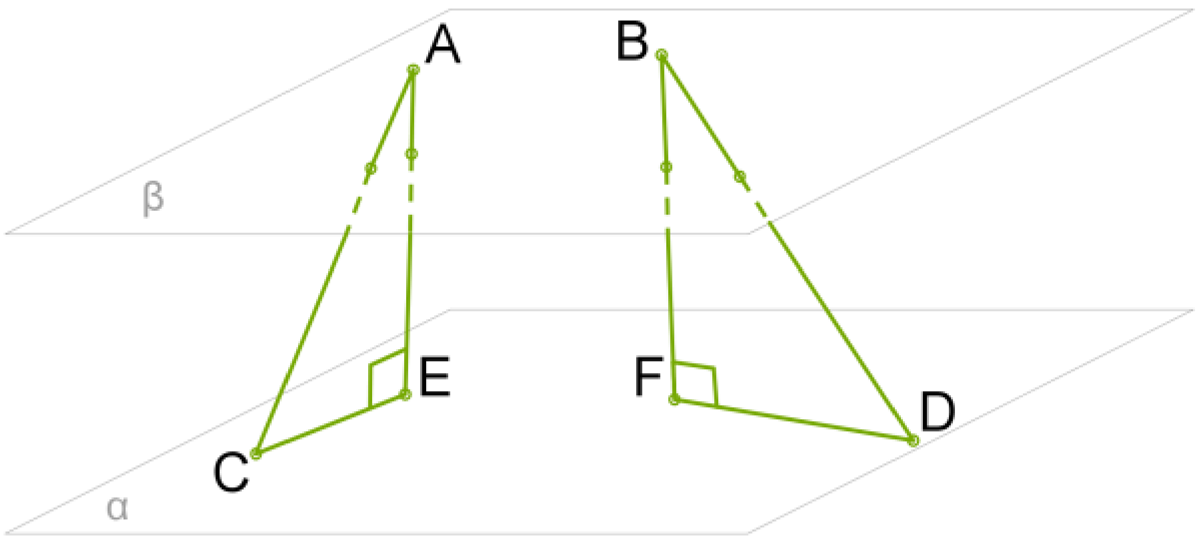


Стороны ∡N пересекают параллельные плоскости β и α

Даны параллельные плоскости α и β. Точки A и B находятся в плоскости α, а точки C и D в плоскостиβ. Длина отрезка AC=7, длина отрезка BD=12.

Сумма проекций этих отрезков в плоскости β равна 8.

Найти длину проекций обоих отрезков.



Практическое занятие№ 60

Тема: Повторение. Проверочная работа

Цель: Обобщить и закрепить знания и навыки учащихся по данной теме

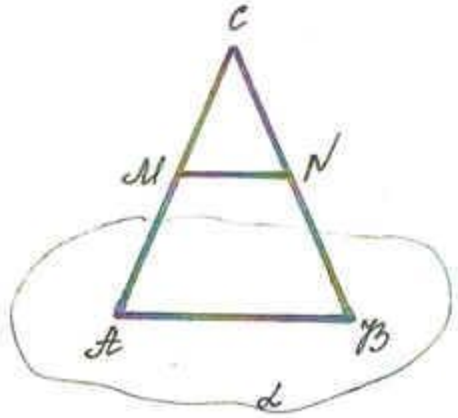
Теоретический блок

1. Какие две прямые в пространстве называются параллельными?
2. Сформулируйте теорему о параллельных прямых.
3. Какие возможны случаи взаимного расположение прямой и плоскости?
4. Какие прямая и плоскость называются параллельными?
5. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
6. Дан куб A... D_1. Назовите четыре пары параллельных прямых и четыре пары пересекающихся прямых
7. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

Верно ли утверждение: если одна из двух прямых параллельна плоскости, а вторая пересекает эту плоскость, то прямые параллельны.

Решение задач

1). Задача 1



Дано:

Δ ABC,

AB $\in \alpha$, C $\notin \alpha$,

AM = MC,

CN = NB.

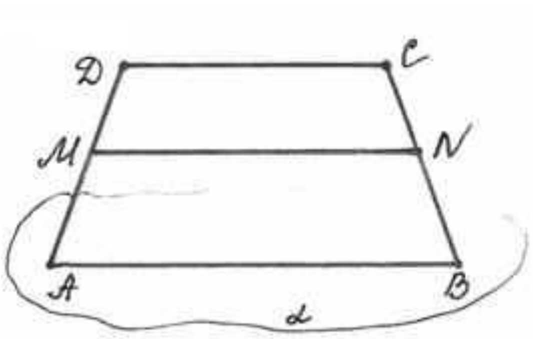
Доказать: MN $\parallel \alpha$.

Доказательство

MN - средняя линия треугольника ABC, значит MN || AB, AB ∈ a .

Таким образом, MN || a (по признаку параллельности прямой и плоскости).

2). Задача 2



Дано:

ABCD - тралеция,

AB ∈ α, CD ∉ α,

AM=MD, CN=NB.

Доказать: MN ∥ α.

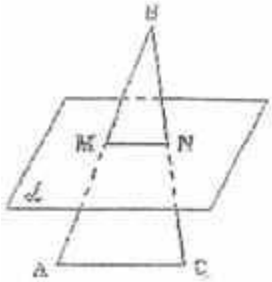
Доказательство

MN - средняя линия трапеции ABCD, значит MN || AB; AB ∈ a (по условию),

Таким образом, MN || a (по признаку параллельности прямой и плоскости).

3)Задача 3**.** Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости a , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

Перед решением данной задачи необходимо вспомнить признаки подобия треугольников.



Дано:

Δ ABC, AC ∥ α,

AB ∩ α = M,

BC ∩ α = N.

Доказать: Δ ABC подобен Δ MBN

Доказательство

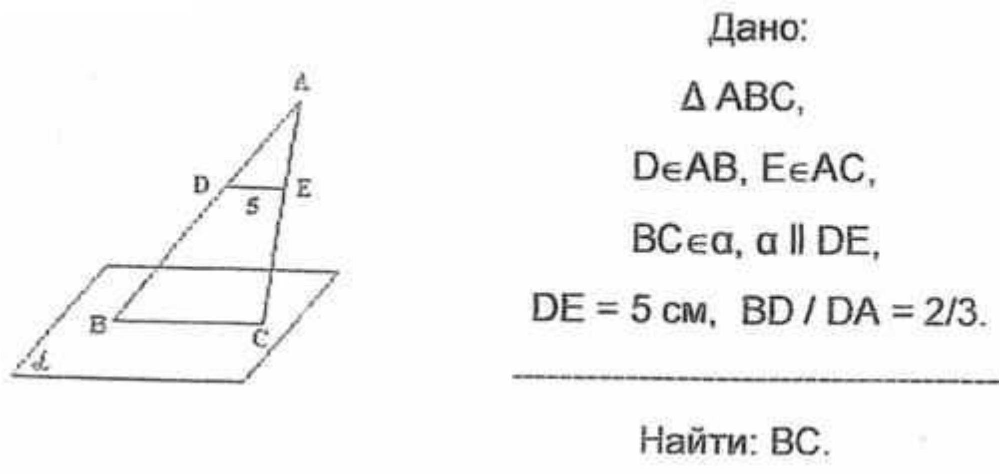
1. По утверждению 1° : MN || AC. Тогда угол A = углу BMN (как односторонние при параллельных прямых).

2. угол B - общий.

3. Таким образом, по двум углам треугольник ABC подобен треугольнику MBN.

4). Задача 4

На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что OE = 5 см и BD = 2/3. Плоскость a проходит через точки B и C и параллельна отрезку OE. Найдите длину отрезка BC.



Решение:

треугольник ABC подобен треугольнику ADE.

Тогда AB/AD = BC/DE, 5/3 = x/5, x = 25/3, x = $8^{1}/_{3.}$

Ответ: $8^{1}/_{3.}$

Домашнее задание:

Прямая AB пересекает плоскость α. Через концы отрезка AB и его середину C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A1, B1 и C1. Рассмотрите случаи: 1) отрезок AB не пересекает плоскость α ; 2) отрезок AB пересекает α. В каждом случае найдите: а) длину отрезка CC1, если: AA1 = 3, BB1 = 6; б) длину отрезка AA1, если BB1 = 13, CC1= 1

Проверочная работа

1 вариант

1. Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через середину отрезка C и концы отрезка A и B проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость α в точках , . Вычислить длину отрезка CC_1 если AA_1 = 5, BB_1 = 7
2. Через точку *O*, не лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены

A_1

прямые *l* и *m*. Прямая *l* пересекает плоскости α и β в точках

A_2

и соответственно, прямая *m* – в точках и Найдите длину

отрезка , если = 15 см,

O : O = 3: 5.

3. Прямая АВ пересекает плоскость α. Через концы отрезка АВ и его середину С проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках А1, В1 и С1. Рассмотрите случаи: 1) отрезок АВ не пересекает плоскость α ; 2) отрезок АВ пересекает α. В каждом случае найдите: а) длину отрезка СС1, если: АА1 = 7, ВВ1 = 5; б) длину отрезка АА1, если ВВ1 = 7, СС1= 11.

2 вариант

1. Точка М лежит на отрезке АВ. Отрезок АВ пересекается с плоскостью α в точке В.

   Через А и М проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках и .

   Найдите длину отрезка АВ, если А : М = 3 : 2, АМ = 6.

2. Через точку O, лежащую между параллельными плоскостями α и β, проведены

   прямые l и m. Прямая l пересекает плоскости α и β в точках и

   соответственно, прямая m – в точках и . Найдите длину отрезка ,

   если = 12 см, O : O = 3 : 4.

3. Дан ΔМКР. Плоскость, параллельная прямой МК, пересекает МР в точке , РК - в

   точке. Найдите , если МР : Р = 12 : 5, МК = 18 см.

Практическое занятие№ 61

Тема: Признак перпендикулярности прямой и плоскости
Цель: Обобщить и систематизировать материал по данной теме

Теоретический блок

Определение. Прямая *a* называется перпендикулярной к плоскости α, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Пример 1. Точки *A, M, O* лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки *O, B, C* и *D* лежат в плоскости α (рис. 3). Какие из следующих углов являются прямыми: $\angle AOB, \angle MOC, \angle DAM, \angle DOA, \angle BMO$?

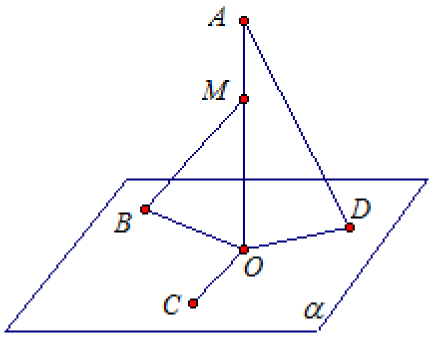


Рис. 3.
Решение

Рассмотрим угол $\angle AOB$. Прямая *AO* перпендикулярна плоскости α, а значит, прямая *AO* перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости α, в том числе прямой *BO*. Значит, $\angle AOB = 90^{\circ}$.

Рассмотрим угол $\angle MOC$. Прямая *AO* перпендикулярна прямой *OC*, значит, $\angle MOC = 90^{\circ}$.

Рассмотрим угол $\angle DAM$. Прямая *AO* перпендикулярна прямой *OD*, значит, $\angle DOA = 90^{\circ}$. Рассмотрим треугольник *DAO*. В треугольнике может быть только один прямой угол. Значит, угол *DAM* – не является прямым.

Рассмотрим угол $\angle DOA$. Прямая *AO* перпендикулярна прямой *OD*, значит, $\angle DOA = 90^{\circ}$.

Рассмотрим угол $\angle BMO$. Это угол в прямоугольном треугольнике *BMO*, он не может быть прямым, так как угол *MOB* – прямой.

Ответ: $\angle AOB = \angle MOC = \angle DOA = 90^{\circ}$.

Пример 2. В треугольнике *ABC* дано: $\angle C = 90^\circ$, *AC* = 6 см, *BC* = 8 см, *CM* – медиана (рис. 4). Через вершину *C* проведена прямая *CK*, перпендикулярная к плоскости треугольника *ABC*, причем *CK* = 12 см. Найдите *KM*.

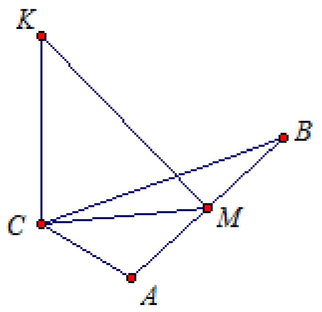


Рис. 4.

Решение:

Найдем длину *AB* по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см).

По свойству прямоугольного треугольника середина гипотенузы *M* равноудалена от вершин треугольника. То есть *CM* = *AM* = *BM*, $CM = \frac{1}{2}AB = 5$ (см).

Рассмотрим треугольник *KCM*. Прямая *KC* перпендикулярна плоскости *ABC*, а значит, *KC* перпендикулярна *CM*. Значит, треугольник *KCM* – прямоугольный. Найдем гипотенузу *KM* из теоремы Пифагора: $KM = \sqrt{KC^2 + CM^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (см).

Ответ: 13 см.

Практическое занятие № 62

Тема: Признак перпендикулярности плоскостей. Углы между прямыми и плоскостями.
Цель: Обобщить и систематизировать материал по данной теме

Теоретический блок

Угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.
В качестве угла между прямой и плоскостью выбираем острый угол.
Если прямая параллельна плоскости, значит, угол между прямой и плоскостью равен нулю.
Если прямая перпендикулярна плоскости, ее проекцией на плоскость окажется точка. Очевидно, в этом случае угол между прямой и плоскостью равен 90°.
Примеры:
1.Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости а, а точки B, C и D лежат в плоскости а. Какие из следующих уг лов являются прямыми: ∠AOB, ∠MOC, ∠DAM, ∠DOA, ∠BMO?
Решение: а ⊥ α, поэтому а перпендикулярна любой прямой, лежащей в пл. α. Чтобы прямая принадлежала пл. α, достаточно, чтобы 2 точки прямой принадлежали пл. α.
Ответ: прямые углы

2**.** Прямая ОА перпендикулярна к плоскости ОВС, и точка О является серединой отрезка AD. Докажите, что: а) АВ = DB; б) АВ=АС, если ОВ=ОС; в) ОВ = ОС, если АВ=АС.

Решение:
а) Рассмотрим ΔABD.
поэтому
- по двум катетам,
б) Рассмотрим ΔAOB и ΔAOC.
- по определению;
- по условию; - общая.
Треугольники АОВ и АОС равны по двум катетам. Отсюда:
в) Т.к. АВ = АС, то прямоугольные треугольники АОВ и АОС равны по гипотенузе и катету (АО —общий катет), поэтому
Что и требовалось доказать.
3.Через точку О пересечения диагоналей квадрата со стороной а проведена прямая ОК, перпендикулярная к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки К до вершин квадрата, если ОК = b.

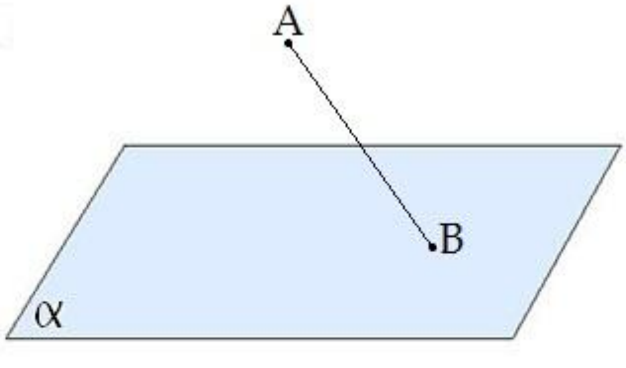
Практическое занятие № 63

Тема: Перпендикуляры и наклонные
Цель: Обобщить и систематизировать материал по данной теме

Теоретический блок

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

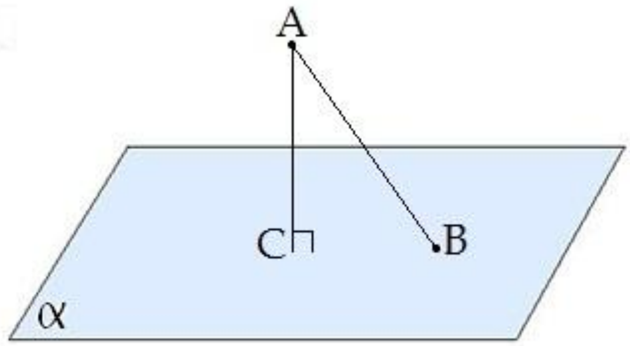
Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием наклонной.



АВ - наклонная.
В - основание наклонной.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра.

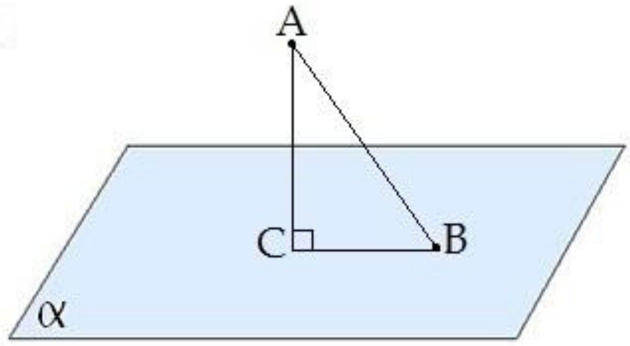


AC - перпендикуляр.

C - основание перпендикуляра.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

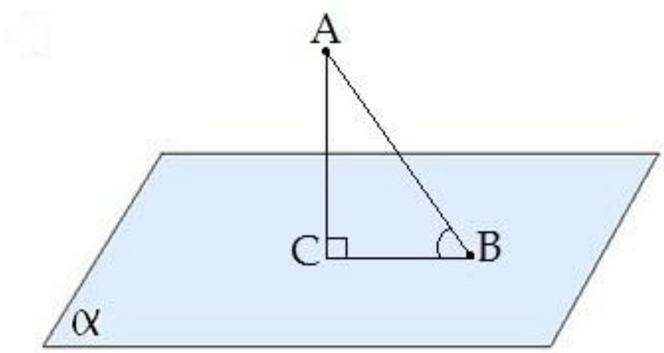
Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется проекцией наклонной.



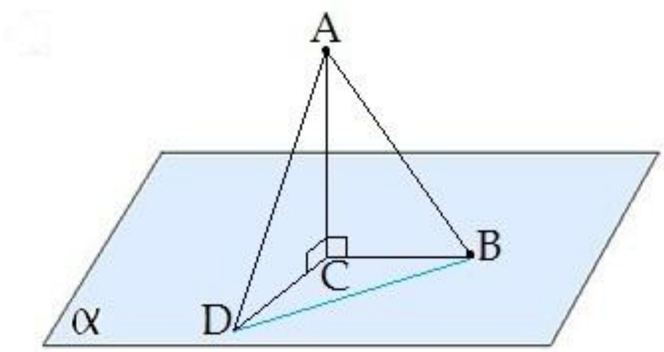
CB - проеция наклонной AB на плоскость α.

Треугольник ABC прямоугольный.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и её проекцией на плоскость.



∢CBA - угол между наклонной AB и плоскостью α.



Если AD>AB, то DC>BC

Если из данной точки к данной плоскости провести несколько наклонных, то большей наклонной соответствует большая проекция.

∢DAB - угол между наклонными
∢DCB - угол между проекциями
Отрезок DB - расстояние между основаниями наклонных.

Решение упражнений:

1) Прямая CM перпендикулярна к плоскости прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Найдите расстояние от точки M до стороны AB, если AC=3см, BC=4см, CM=1 см

—
2)В равнобедренном треугольнике MHK, MH=NK=5см, MK=6см. Точка D находится на расстоянии √10 см от плоскости треугольника MNK и на одинаковом расстоянии от его сторон. Найдите это расстояние.

3) В треугольнике ABC дано: AB=5см, AC=7см, BC=6см. Прямая AD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если

AD=5см.

4)Через катет АВ прямоугольного равнобедренного треугольника АВС проведена плоскость а (альфа), образующая с плоскостью треугольника угол в 45 градусов. Найдите расстояние от точки С до плоскости а (альфа), если АС=2см

5)Точка М находится на расстоянии 6 см от плоскости равностороннего треугольника АВС и на 10см от вершин этого треугольника. Найдите длину стороны треугольника АВС

Домашнее задание

Точка *A* равноудалена от вершим параллелограмма. Докажите, что этот параллелограмм является прямоугольником.

Основания трапеции равняются 14 см и 8 см соответственно. Через большее основание трапеции проведена плоскость, которая находится на расстоянии 8 см от меньшего основания трапеции. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до проведенной плоскости.

С точки *A* на плоскость α проведены две наклонные длиной 15 см и 20 см. Длина проекции одной из этих наклонных равна 16 см. Найдите синус угла, образованного другой наклонной и плоскостью α.

Точка *K* находится на одинаковых расстояниях *KA* и *KB* от сторон прямого угла с вершиной *C*. *O* – проекция точки *K* на плоскость этого угла. Докажите, что *OACB* – квадрат.

Практическое занятие № 64

Тема: Контрольная работа по теме: «Прямые и плоскости в пространстве»

Цель: Проверить уровень усвоения знаний по теме: «Прямые и плоскости в пространстве»

1 вариант

1. Сторона правильного треугольника АВС равна $2\sqrt{3}$ см. К его плоскости проведен перпендикуляр АК, равный 4см. Найдите расстояние от точки К до стороны ВС.
2. Через сторону АВ прямоугольника ABCD проведена плоскость α. Сторона CD удалена от этой плоскости на 3 см, СВ=6см, CD=8см. Найдите:1)угол между прямой DA и плоскостью α ,2)синус угла между прямой BD и плоскостью α.
3. Катет АС прямоугольного ΔАВС с прямым углом С лежит в плоскости α., а угол между плоскостями α и ΔАВС равен 60^0 . Найдите расстояние от точки В до плоскости α, если АС=5см, АВ=13см.
4. . Плоскости прямоугольных треугольников АВС и АВК перпендикулярны. АВ=8см, АК=10см, ∠АВК=∠АВС=90^0 , ∠ВАС=45^0 . Вычислите расстояние между точками К и С.

2 вариант

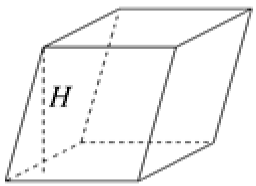
1. Отрезок AM, равный 12 см, перпендикулярен плоскости треугольника ABC. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если AB=AC=20см, BC=24см.
2. Стороны прямоугольника ABCD равны 6см и $6\sqrt{3}$ см. К плоскости прямоугольника через точку пересечения его диагоналей проведен перпендикуляр OK, равный 6см. Найдите угол между плоскостью прямоугольника и прямыми KA, KB, KC и KD.
3. Через вершину D квадрата ABCD проведен к его плоскости перпендикуляр DK, равный 10 см. Угол между плоскостями ABC и KBC равен 45^0 . Найдите площадь квадрата ABCD.
4. Плоскости равностороннего ΔABC и прямоугольного равнобедренного ΔADC перпендикулярны. AB=a, $\angle ADC=90^0$. Вычислите расстояние между вершинами B и D данных треугольников.

Практическое занятие № 65

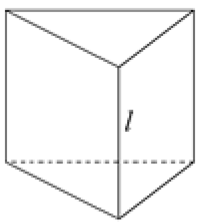
Тема: Площадь боковой и полной поверхности призмы, параллелепипеда, куба
Цель: Научить вычислять боковую и полную поверхность призмы, параллелепипеда, куба

Теоретический блок

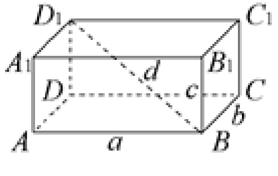
Призма



Площадь поверхности: $S=2S_{осн}+S_{бок}$, где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности, равная сумме площадей всех граней.



Прямая призма – призма, боковое ребро которой перпендикулярно основанию.
Объем: $V=S_{осн}\cdot l$.
Площадь боковой поверхности: $S_{бок}=P\cdot l$, где P – периметр основания.
Правильная призма – прямая призма, основание которой – правильный многоугольник.



Параллелепипед – призма, основание которой – параллелограмм. Все грани параллелепипеда являются параллелограммами.
Прямоугольный параллелепипед – призма, все грани которой – прямоугольники.
Свойства диагоналей: $AC_1=BD_1=CA_1=DB_1=d$; d2=$a^2+b^2+c^2$.

Площадь поверхности: S=2·(ab+ac+bc).

Куб – призма, все грани которой – квадраты (a=b=c). Куб является параллелепипедом и обладает всеми его свойствами.
$d=\sqrt{3}a$; S=6a^2.

Пример 1. Чему равна полная поверхность прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50, а стороны основания 13, 37 и 40?

Решение:

Периметр основания призмы равен P=13+17+40=90. Площадь боковой поверхности $S_{бок}$= 90·50=4500.

Площадь основания найдем по формуле Герона. Его полупериметр p=45 и $S_{осн}=\sqrt{45(45-13)(45-37)(45-40)}=\sqrt{45\cdot 32\cdot 8\cdot 5}=240$.

Осталось вычислить полную поверхность призмы: S=2·240+4500=4980.

Ответ: 4980.

Пример 2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной 2. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{2}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью треугольника AB_1C и плоскостью основания призмы.

Решение:

Плоскость AB_1C пересекает плоскость основания про прямой AC. Построим линейный угол, соответствующий углу между этими плоскостями. Т.к. ABCD – квадрат, то его диагонали пересекаются под прямым углом, т.е. $BO\perp AC$. Далее, т.к. призма правильная, то $B_1A=B_1C$. Треугольник AB_1C – равнобедренный. Его медиана B_1O является также его высотой, т.е. $B_1O\perp AC$. Следовательно, линейный $\angle B_1OB$ равен углу между плоскостями.

Рассмотрим треугольник B_1OB. Поскольку призма – прямая, то угол B в треугольнике – прямой. $B_1B=\sqrt{2}$ по условию задачи. $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Т.к. катеты в прямоугольном треугольнике B_1OB равны, то $\angle B_1OB=45^0$.

Ответ: 45^0.

Решение упражнений

1.В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

2.Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

3.Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

4.В правильной n-угольной призме сторона основания равна a и высота равна h. Вычислите площади боковой и полной поверхности призмы, если: а) n = 3, a = 10 см, h = 15 см; б) n = 4, a = 12 дм, h = 8 дм; в) n = 6, a = 23 см, h = 5 дм; г) n = 5, a = 0,4 м, h = 10 см.

Домашнее задание:

1.Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2.Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60°. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 см2. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

Практическое занятие № 66

Тема: Площадь боковой и полной поверхности пирамиды

Цель: Научить решать задачи на вычисление площади боковой и полной поверхности пирамиды

Теоретический блок

1. Сколько граней, боковых ребер у n- угольной пирамиды?

2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида?

3. Высота пирамиды равна 3 см. Чему равно расстояние от

вершины пирамиды до плоскости основания ?

4. Боковые ребра треугольной пирамиды 7см, 12см, 5см. Одно из них

перпендикулярно к плоскости основания. Чему равна высота пирамиды.

Решение задач.

1. Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 2 см и высотой боковой грани 6 см. Найдите площадь

боковой поверхности пирамиды.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды 7см, сторона основания 8см. Определите боковое ребро.

3. Дано: SO = 4 - высота пирамиды. ABCD - прямоугольник, AD = BC = 6; AB = DC = 8 Найти: Sполн., Sбок., V.

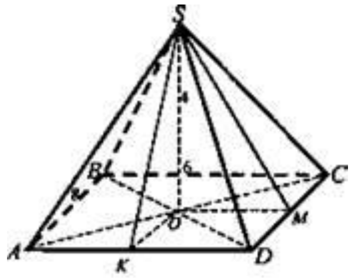


Рис. 7

Решение: $S_{\Delta DSC}=\frac{1}{2}DC\cdot SM;\ SM=\sqrt{SO^2+OM^2};$

$AC=BD=\sqrt{64+36}=10;\ AO=OD=5;\ OM=$
$=\frac{1}{2}AD=\frac{6}{2}=3.\ SM=\sqrt{16+9}=5.\ S_{\Delta DSC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot$

$\cdot 8=20;\ S_{\Delta ABS}=20;\ OK=\frac{1}{2}DC$ (средняя линия ΔADC). OK = 4. $SK=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2};$ $S_{\Delta ADS}=\frac{1}{2}6\cdot 4\sqrt{2}=12\sqrt{2};$ $S_{\Delta BCS}=12\sqrt{2}.$

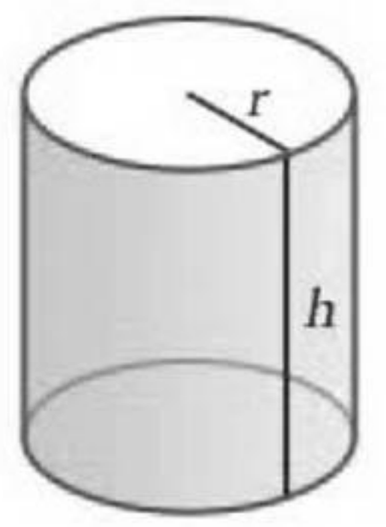
$S_{бок.}=2\cdot 12\sqrt{2}+2\cdot 20=24\sqrt{2}+40=8(3\sqrt{2}+5);S_{осн.}=6\cdot 8=48;S_{полн.}=S_{бок.}+$
$+S_{осн.}=24\sqrt{2}+40+48=24\sqrt{2}+88=8(11+3\sqrt{2}).$

$V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 48\cdot 4=64.$ (Ответ: $8(3\sqrt{2}+5);\ 8(11+3\sqrt{2});\ 64.$)

Практическое занятие № 67

Тема: Площадь боковой и полной поверхности цилиндра
Цель: Научить решать задачи на нахождение площади боковой и полной поверхности цилиндра
Теоретический блок
Цилиндр представляет собой геометрическое тело, ограниченное двумя параллельными

плоскостями и цилиндрической поверхностью.



Цилиндр состоит из боковой поверхности и двух оснований. Формула площади поверхности цилиндра включает в себя отдельный расчет площади оснований и боковой поверхности. Так как основания в цилиндре равны, то полная его площадь будет рассчитываться по формуле:

$$S_p = 2S_{osn} + S_{bok}$$

Формула площади основания цилиндра. Так как основанием цилиндра является круг, то: $S_{osn} = \pi r^2$

Мы помним, что в этих расчетах используется постоянное число П = 3,1415926, которое рассчитано как соотношение длины окружности к ее диаметру. Это число является математической константой.

Площадь боковой поверхности цилиндра

Формула площади боковой поверхности цилиндра представляет собой произведение длины основания на его высоту:

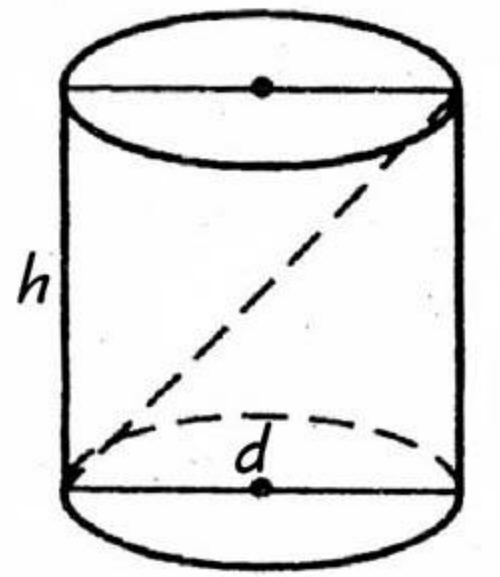
$$S_{bok} = 2\pi r h$$

А теперь рассмотрим задачу, в которой нам потребуется рассчитать полную площадь цилиндра. В заданной фигуре высота h = 4 см, r = 2 см. Найдем полную площадь цилиндра.

Для начала рассчитаем площадь оснований: $S_{osn} = 3{,}14 \times 2^2 = 12{,}56 cm^2$

Теперь рассмотрим пример расчета площади боковой поверхности цилиндра. В развернутом виде она представляет прямоугольник. Его площадь рассчитывается по приведенной выше формуле. Подставим в нее все данные: $S_{bok} = 2 \times 3{,}14 \times 2 \times 4 = 50{,}24 cm^2$

Полная площадь круга представляет собой сумму двойной площади основания и боковой: $S_p = 2\times12{,}56 + 50{,}24 = 25{,}12 + 50{,}24 = 75{,}36 cm^2$



Таким образом, используя формулы площади оснований и боковой поверхности фигуры, мы смогли найти полную площадь поверхности цилиндра.
Осевое сечение цилиндра представляет собой прямоугольник, в котором стороны равны высоте и диаметру цилиндра.

Формула площади осевого сечения цилиндра выводится из формулы расчета площади прямоугольника:
$S = 2hd$

Рассмотрим пример расчета площади осевого сечения цилиндра. Для этого возьмем условия из задачи, указанной выше. Чтобы найти величину нам потребуется диаметр. Мы знаем, что он равен двойному радиусу: $d = 2r$
$d = 2\times2 = 4\,(cm)$

Подставим данные: $S = 2\times4\times4 = 32 cm^2$

- Какая фигура называется цилиндром?
- Почему цилиндр называют телом вращения?
- Назовите виды цилиндров?
- Назовите элементы цилиндра.
- Что представляет собой развертка цилиндра?
- Как найти площадь боковой поверхности цилиндра?
- Как найти площадь полной поверхности цилиндра?
- Назовите основные виды сечений цилиндра. Какая фигура получается в каждом случае?
- Приведите примеры использования цилиндров.

Решение задач:

Задача 1. Сколько квадратных метров листовой жести пойдет на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади ее боковой поверхности?

Дано: L=4; d=20см=0,2м. Найти: S.

Решение: Воспользуемся формулой площади полной поверхности цилиндра: $S_{бок}=2\pi rh$.
Радиус равен половине диаметра – 0,1м, а высота цилиндра равна длине нужной трубы – 4м.

Так на швы нужно добавить 2,5% площади ее боковой поверхности, нужно найти: (S+2,5%S). Подставим вместо S формулу площади боковой поверхности, и вычислим:

$$S+2,5\%\cdot S=S+\frac{2,5}{100}S=$$
$$=S\left(1+\frac{25}{1000}\right)=$$
$$=2\pi rL\cdot 1,025=$$
$$=2\cdot 3,14\cdot 0,1\cdot 4\cdot 1,025=$$
$$=2,5748\approx 2,6(м^2)$$

Ответ: 2,6 $м^2$.

Задача 2**.** Найти полную поверхность цилиндра, у которого диаметр основания 20,6 см и высота 30,5 см.

Задача 3. Осевым сечением цилиндра является квадрат, сторона которого равна 7 мм. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

Задача 4. Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной 6 см. Найти высоту и радиус основания цилиндра.

Задача 5. Радиус основания цилиндра равен 2м, высота 3м. Найти диагональ осевого сечения.

Задача 6. Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.

Домашнее задание:

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48. Угол между этой диагональю и образующей равен 30^0. Найдите радиус цилиндра.2
2. Длина окружности основания цилиндра равна 1. Площадь боковой поверхности равна 2. Найдите высоту цилиндра.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60° и равна 20 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра

Таблицы для вычисления длины окружности по диаметру.

При решении различных производственных задач часто приходится вычислять длину окружности. Представим себе рабочего, который изготовляет круглые детали по указанным ему диаметрам. Он должен всякий раз, зная диаметр, вычислить длину окружности. Чтобы сэкономить время и застраховать себя от ошибок, он обращается к готовым таблицам, в которых указаны диаметры и соответствующие им длины окружностей.

Приведём небольшую часть таких таблиц и расскажем, как ими пользоваться.

D	Длина окружности	D	Длина окружности	D	Длина окружности
1	3,142	6	18,850	11	34,558
2	6,283	7	21,991	12	37,699
3	9,425	8	25,133	13	40,841
4	12,566	9	28,274	14	43,982
5	15,708	10	31,416	15	47,124

Пусть известно, что диаметр окружности равен 5 м. Ищем в таблице в вертикальном столбце под буквой **D** число 5. Это длина диаметра. Рядом с этим числом (вправо, в столбце под названием «Длина окружности») увидим число 15,708 (м). Совершенно так же найдём, что если **D** = 10 см, то длина окружности равна 31,416 см.

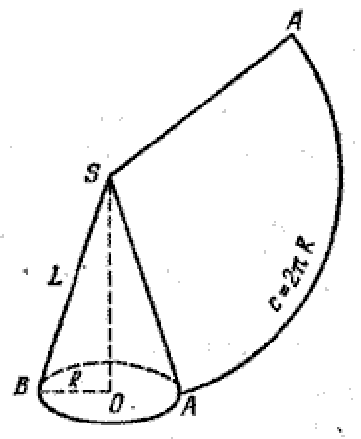
По этим же таблицам можно производить и обратные вычисления. Если известна длина окружности, то можно найти в таблице соответствующий ей диаметр. Пусть длина окружности равна приблизительно 34,56 см. Найдём в таблице число, наиболее близкое к данному. Таковым будет 34,558 (разница 0,002). Соответствующий такой длине окружности диаметр равен приблизительно 11 см.

Таблицы, о которых здесь сказано, имеются в различных справочниках. В частности, их можно найти в книжке «Четырёхзначные математические таблицы» В. М. Брадиса. и в задачнике по арифметике С. А. Пономарёва и Н. И. Сырнева.

Практическое занятие № 68

Тема: Площадь боковой и полной поверхности конуса, усеченного конуса, шара и сферы
Цель: Научить решать задачи на нахождение площади боковой и полной поверхности конуса, усеченного конуса
Теоретический блок

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь развертки его боковой поверхности.



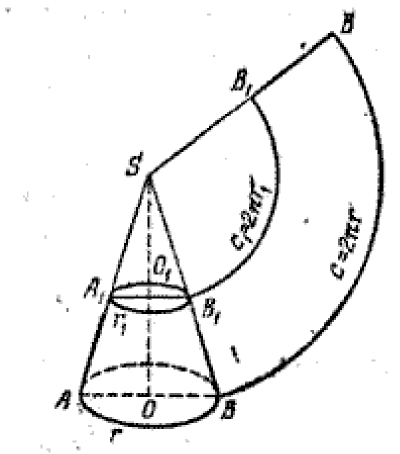
Поэтому площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна площади соответствующего кругового сектора (рис.) и вычисляется по формуле

$$S_{б.к.} = \pi RL,$$

где R — радиус основания, а L — длина образующей конуса. Если к площади боковой поверхности конуса прибавить площадь его основания, то получим площадь полной поверхности конуса

$$S_{полн.} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R\,(L + R).$$

Аналогично за площадь боковой поверхности усеченного конуса принимается площадь соответствующей развертки.



Поэтому в случае прямого кругового конуса (рис.) площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле

$$S_{б.у.к.} = \pi\ (\ r_1\ +\ r\ )L$$

где r_1 и r — радиусы оснований, а L — длина образующей усеченного конуса.

Решение задач:

1. Радиус конуса равен 6, а образующая – 10. Найти площадь боковой поверхности, площадь основания и площадь полной поверхности конуса.

2. Высота конуса равна 4, а образующая – 5. Найти площадь боковой поверхности, площадь основания и площадь полной поверхности конуса.

3.Сколько потребуется краски, для того чтобы покрасить пожарное ведро, если на 100см² необходимо затратить 10г?

4.Сколько квадратных метров брезента потребуется для сооружения палатки конической формы высотой 4 метра и диаметром основания 6 метров?

5. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 30°, а высота конуса равна 12см. Найдите площадь боковой поверхности конуса и площадь полной поверхности.

6. Площадь основания конуса равна 16π, а площадь осевого сечения равна 32. Найдите высоту конуса и площадь боковой поверхности.

7**.** Найдите площадь боковой поверхности равностороннего конуса (осевое сечение – равносторонний треугольник), если радиус основания равен 5см.

8. Осевое сечение конуса равнобедренный треугольник площадь которого равна 60см², высота конуса 12см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Домашнее задание:

1. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если образующая равна 5см, а радиус основания 3см.

2. Образующая конуса равна 7см, а радиус основания 3см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

3. Высота конуса равна 12см, образующая 13см. Найдите площадь полной поверхности конуса

4.Площадь основания конуса равна 25π см², а образующая равна 6см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

5. Найдите площадь полной поверхности конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°, а высота равна 6см.

Практическое занятие № 69

Тема: Объем призмы, параллелепипеда
Цель: Научить решать задачи на вычисление объема призмы, параллелепипеда
Теоретический блок

Прямоугольный параллелепипед - это объемная фигура, у которой шесть граней, и каждая из них является прямоугольником.

Прямоугольный параллелепипед - параллелепипед, все грани которого являются прямоугольниками.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты.

Формула для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда

$$\mathbf{V = a \cdot b \cdot h}$$

где

где V - объем прямоугольного параллелепипеда, a - длина, b – ширина, h- высота.

Объём призмы равен произведению её высоты на площадь основания:

$$V = S \cdot h$$

Решение задач:

1.Существует ли призма, имеющая 50 рёбер? 54 ребра?

Решение: Число ребер n – угольной призмы 3n, поэтому призмы, имеющей 50 ребер, не существует, а 54 ребра имеет 18-угольная призма.

2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и 12 см , диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60˚. Найдите объём параллелепипеда.
3. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10, 12. Диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60˚. Найдите объём призмы.

4. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 2. Чему будет равен объем параллелепипеда, если каждое его ребро увеличить в 3 раза.

Решение. Пусть ребра данного параллелепипеда равны a, b и c. Тогда имеем: V=abc=2. После увеличения каждого ребра в 3 раза его объём будет равен

V=3a*3b*3c =27 abc=27*2=54.

Ответ: 54.

5. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда высотой 30 см. Если в него налить 30 л. воды, то до верхнего края останется 5 см. Сколько литров воды нужно, чтобы наполнить пустой аквариум доверху?

Решение. Пусть V и H соответственно объем и высота параллелепипеда.

V=SH . По условию V=30,H=25, тогда 25*S=30.

После заполнения пустого аквариума доверху H=30. Значит, 30*S=V.

Найдем отношение $\frac{25S}{30S} = \frac{30}{V}$, V=36 л.

Ответ: 36.

6. Кубик весит 10 гр. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 3 раза больше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала.

Решение. Пусть V- объём данного параллелепипеда. После увеличения каждого ребра в 3 раза, его объём будет равен 27 V.

$\frac{V}{27V} = \frac{10}{x}$, x=270 гр.

Ответ: 270.

Домашнее задание:

1. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 32. Чему будет равен объём параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в 2 раза.

2. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд той же формы, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого. Ответ выразите в сантиметрах.

3. Закрытый сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами 30, 40 и 45 см. стоит на горизонтальной поверхности таким образом, что наименьшая грань является дном. В сосуд налили воду до уровня 36 см. На каком уровне окажется вода, если сосуд поставить на наибольшую грань? Ответ дайте в сантиметрах.

Практическое занятие № 70

Тема: Объем пирамиды
Цель: Научить решать задачи на вычисление объема пирамиды
Теоретический блок

Объем пирамиды

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:
где $\boldsymbol{S}$ – площадь основания, $\boldsymbol{H}$ – высота пирамиды.

Формула объема усеченной пирамиды представляет собой одну треть произведения высоты на сумму площадей верхнего и нижнего основания с их средним пропорциональным:

$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right)$$

Решение задач (по готовым чертежам)

1. Дано: ABCD - правильная пирамида. AB = 3; AD = 2√3 (рис. 3).
Найти: а) Sосн.; б) AO; в) DO; г) V.

2. Дано: ABCDF - правильная пирамида. ∠FCO = 45°; FO = 2 (рис. 4).
Найти: а) Sосн.; б) V.

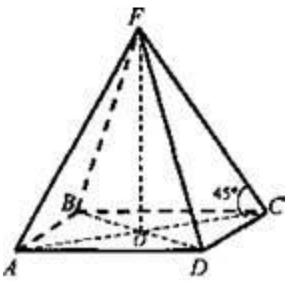


Рис. 4

Решение:

1) Рассмотрим ΔFOC: ∠O = 90°, ∠C = 45°, значит, ∠F = 45°. Следовательно, ΔFOC - равнобедренный, OC ≈ FO = 2.

2) AC = 2OC = 4. d = AC = AD√2 (по свойству диагонали квадрата, d2 = 2a2). Тогда $AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

3) ABCD - квадрат (пирамида правильная). $S_{осн.} = AD^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8.$

4) $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h.$ $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$

(Ответ: а) 8; 6) 5·1/3.)

3. Дано: ABCDEKF - правильная пирамида. FO ⊥ (ABC), FM ⊥ AK, FO = 4, FM = 5 (рис. 5).

Найти: а) Sосн.; б) V.

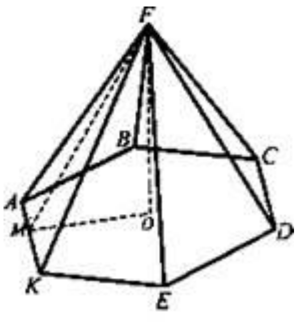


Рис. 5

Решение:

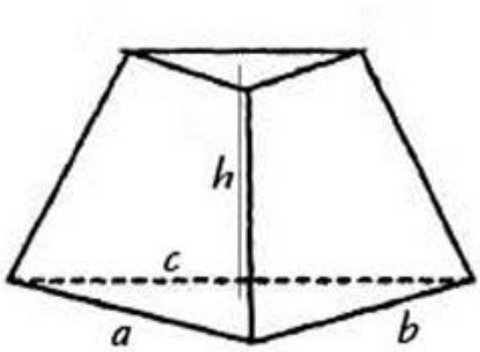
1) Рассмотрим ΔFOM: ∠O = 90° (так как FO ⊥ (ABC), значит, FO ⊥ OM) FO = 4, FM = 5. $OM = \sqrt{MF^2 - FO^2}$ (по теореме Пифагора), $OM = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3.$ OM = r (r - радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник). $AK = 2r \cdot \text{tg}\frac{\pi}{6} = 2 \cdot 3\text{tg}\frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$

2) $S_{осн.} = 6S_{\Delta AOK}, S_{AOK} = \frac{1}{2}AK \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}.$ $S_{осн.} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}.$

3) $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$; $V = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}.$

(Ответ: а) 18√3, б) 24√3.)

Задача: Дана треугольная усеченная пирамида. Ее высота ***h*** = 10 см, стороны одного из оснований равны ***a*** = 27 см, ***b*** = 29 см, ***c*** = 52 см. Периметр второго основания равняется ***P2***=72 см. Найдите объем пирамиды.



Для расчета объема нам потребуется площадь оснований. Зная длины сторон одного треугольника, мы можем рассчитать площадь по формуле Герона. Для этого потребуется найти полупериметр:

$$P_1 = 27 + 29 + 52 = 108 cm$$

$$P_1 = \frac{108}{2} = 54 cm$$

Теперь найдем S2:

$$S_1 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_1 = \sqrt{54(54-27)(54-29)(54-52)} = \sqrt{54 \times 27 \times 25 \times 2} = \sqrt{72900} = 270 cm^2$$

Зная, что пирамида усеченная, делаем вывод, что треугольники, лежащие в основаниях подобны. Коэффициент подобия этих треугольников можно найти из соотношения периметров. Отношение площадей треугольников будет равно квадрату этого коэффициента:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{P_1^{\ 2}}{P_2^{\ 2}} = \frac{108^2}{72^2} = \frac{9}{4}$$

$$S_2 = \frac{4 S_1}{9}$$

$$S_2 = \frac{4 \times 270}{9} = 120 cm^2$$

Теперь, когда мы нашли площади оснований усеченной пирамиды, можем легко рассчитать ее объем:

$$V = \frac{1}{3} \times 10 \times \left(270 + \sqrt{270 \times 120} + 120\right) = \frac{10}{3}(270 + 180 + 120) = \frac{10}{3} \times 570 = 1900 cm^3$$

Таким образом, вычислив коэффициент подобия и рассчитав площадь оснований, мы нашли объем заданной усеченной пирамиды.

Домашнее задание

1. Дано: A1A2A3A4 - ромб, SA1A2A3A4 - пирамида, A1A4 = a, ∠SBO = β, OB ⊥ A3A4, ∠A2A1O = a (рис. 6).

Найти: V - ?

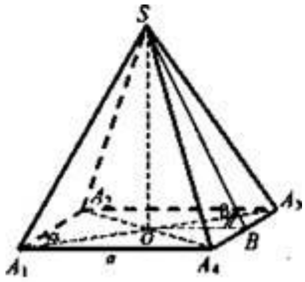


Рис. 6

Решение:

1) Рассмотрим $\Delta OA_3A_4 : OA_3 = a\cos\alpha, \quad \Delta OA_3B : OB = a\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha.$

2) ΔSOB: $SO = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta.$

3) $S_{осн.} = 4S_{\Delta A_3OH_4} = 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot OB = 2a\cdot\frac{1}{2}a\sin 2\alpha = a^2\sin 2d$

4) $V_{пир.} = \frac{1}{3}S_{осн.}\cdot SO,\ V_{пир.} = \frac{1}{3}\cdot a^2\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{2}a\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$

(Ответ: $\frac{1}{6}a^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta.$)

Практическое занятие № 71

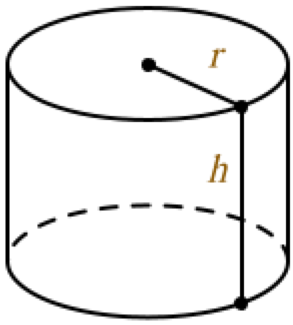
Тема: Объем цилиндра

Цель: Научить решать задачи на вычисление объема цилиндра

Теоретический блок

Цилиндр это геометрическое тело, которое сформировано вращением прямоугольника на оси, совпадающей с одним из его сторон. Слово «цилиндр» происходит от греческого слова «kylindros».

Вычисление объема цилиндра производится по следующей формуле:



$V = \pi r^2 h$

V – объем цилиндра

h – высота цилиндра

r – радиус основания

$\pi - 3.14$

Как рассчитать объем цилиндра? Этими знаниями наиболее активно пользуются в своей работе конструкторы различных машин и механизмов, потребительских товаров, а также архитекторы. Инженерам приходится производить расчет объема цилиндра в тех случаях, когда они занимаются проектированием заданий, снабженных колоннами. Правда, в последнее время эти архитектурные элементы в их, так сказать, «классическом» варианте (то есть вместе с базой и капителем) встречаются достаточно редко, но их «упрощенные» разновидности, состоящие из одного ствола (который, собственно говоря, и представляет собой цилиндр) используются весьма широко. Нередко с колоннами приходится иметь дело реставраторам различных сооружений, имеющих большую историческую и культурную ценность, правда, в их работе вычисление объема цилиндра – далеко не самая распространенная процедура. Впрочем, если речь идет о полном восстановлении утраченных по тем или иным причинам колонн, то ее также приходится производить.

Расчет объема цилиндра осуществляется тогда, когда ведётся разработка разнообразных емкостей соответствующей формы. В качестве наглядного примера таковых можно привести, скажем, медицинские шприцы, а также колбы термосов. Следует заметить, что в первом случае такой параметр, как объем, имеет очень важное значение, поскольку от него зависит точное количество медикаментов, вводимого пациенту при инъекциях.

В технике цилиндры распространены чрезвычайно широко: достаточно сказать, что их форму имеют практически все валы и их отдельные составные части, используемые, скажем, в двигателях внутреннего сгорания. К тому же, расчет объема цилиндра – одна из важнейших задач, которую приходится решать конструкторами при проектировании современных бензиновых и дизельных силовых агрегатов, ведь от этого параметра зависит множество их характеристик, и в первую очередь такая важнейшая, как мощность. Почти все типы ДВС снабжаются поршнями, которые также имеют цилиндрическую форму.

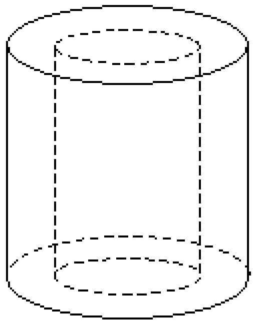
Чрезвычайно распространенными деталями, которые присутствуют в конструкции многих сложных технических устройств, являются роликовые подшипники. Как нетрудно догадаться по самому их названию, одними из основных их компонентов являются прочные и износостойкие металлические ролики, имеющие цилиндрическую форму. Именно благодаря такой геометрии, эти детали имеют достаточно большую несущую способность и в большинстве случаев способны выдерживать весьма значительные нагрузки, чем их шариковые аналоги. Роликовые подшипники являются высокоточными деталями, и поэтому при их разработке и проектировании правильный расчет объема цилиндра (в данном случае – ролика) играет немаловажную роль.

Решение задач:

1.Найдите объем цилиндра с высотой, равной 3см и диаметром основания – 6см.

2.Площадь осевого сечения цилиндра равна 21см^3, площадь основания - 18п см^2 Найдите объем цилиндра.

3.Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса трубы, если ее длина равна 25 м?



$\rho = 11{,}4$ г/см^3

$R_1 = 6{,}5$мм + 4мм = 10,5мм = 1,05см (наружный)

$R_2 = 6{,}5$мм = 0,65см

$V = V_1 - V_2 = \pi \cdot (1{,}05)^2 \cdot 2500 - \pi \cdot 0{,}65^2 \cdot 2500 = 1700\pi \approx 5338$ (см^3)

$M = \rho \cdot V = 11{,}4 \cdot 5338 \approx 61$кг.

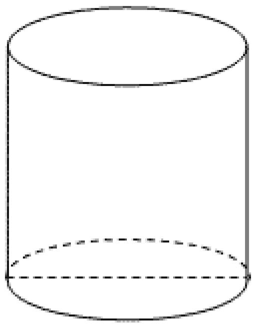
4. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметра 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна 0,85 г/см^3?

$H = 7$м; $d = 1$м; $\rho_{нефти} = 0{,}85$ г/см^3

$m = ?$

$V_ц = \pi R^2 H = \pi \cdot 9^2 \cdot 7 = 567\pi$ (м^3)

$m = V \cdot \rho \approx 1513$ т



Домашнее задание:

1. Диагональ осевого сечения цилиндра составляет с плоскостью основания цилиндра угол 60^0. Найдите объем цилиндра , если площадь осевого сечения равна 16 $\sqrt{3}$ см^3.

2. На склад в мастерской по пошиву одежды поступил рулон драповой ткани в форме цилиндра. При транспортировке был утерян товарный ярлык с указанием длины ткани в

рулоне. Необходимо определить длину ткани в рулоне. Произвели необходимые измерения, определили высоту и диаметр рулона: 90см и 30см, толщина ткани 0,2см.

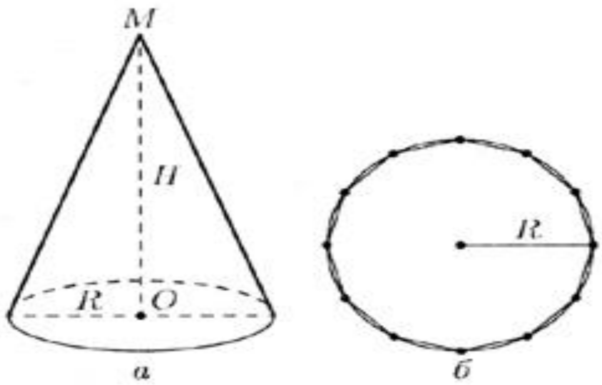
Практическое занятие № 72

Тема: Объем конуса. Объем шара. Решение задач
Цель: Научить решать задачи на вычисление объема конуса

Теоретический блок
Объем конуса вычисляется по формуле

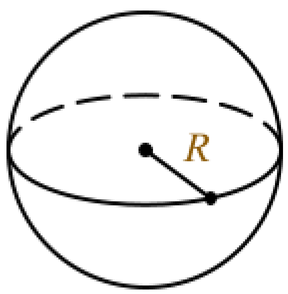
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

где R — радиус основания конуса, H -- его высота



Шар это геометрическое тело, образованное в результате вращения полукруга на оси своего диаметра.

Объем шара можно вычислить по формуле:



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

R – радиус шара

V – объем шара
π – 3.14

Решение задач:

1. Авиационная бомба среднего калибра дает при взрыве воронку диаметром 6 м и глубиной 2 м. Какое количество земли (по массе) выбрасывает эта бомба, если 1 м^3 земли имеет массу 1650 кг?

Решение:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 2 =$
$= 6\pi$ (м^3).

$P = 1650 \cdot 6 \cdot 3{,}14 \approx$
$\approx 31\,086$ кг ≈ 31 т.

Ответ: $P = 31$ т.

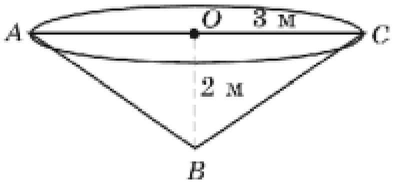


Рис. 3

2. Смолу для промышленных нужд собирают, подвешивая конические воронки к соснам. Сколько воронок диаметром 10см с образующей 13 см нужно собрать, чтобы заполнить десятилитровое ведро?

R=AC/2, R=5см, H=√132-52=12(см), V=1/3*3,14*5^2*12 ≈314(см^3) ≈0,314дм^3
n=10/0,314 ≈31,8. *Ответ: 32 воронки.*

3. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3. Определить массу стога сена.

Решение:

$R = 2{,}5$м

$01OO_1 = 4$м

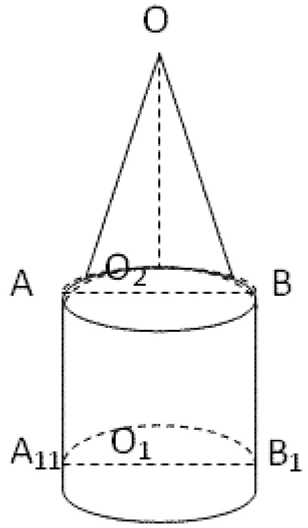
$O_1O_2 = 2{,}2$м

$\rho = 0{,}03$г/см^3

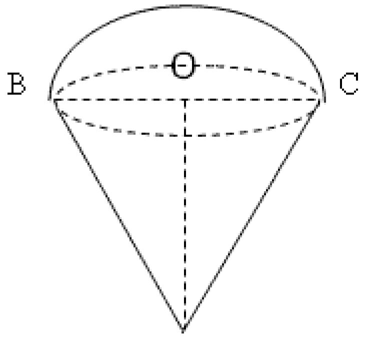
$m = \rho \cdot V$; $V_ц = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 2{,}2 = 13{,}75$ м^3= 13750000см^3

$V_к = 1/3\, \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 1{,}8 = 3{,}75$м^3 = 3750000 π см^3

$M = 0{,}03 \cdot 17500000\pi = 0{,}525\, \pi$ т $\approx$ 1,6 т



4. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?



OA = 12 см

BC = d = 5 см

Переполнит ли мороженое стаканчик?

$V_ш = 4/3 \pi R^3 (5/2)^3 = 125\pi/6 \approx 20\frac{5}{6}\pi$

$V_к = 1/3\ \pi R^2 H = 1/3\ \pi (5/2)^2 \cdot 12 = \frac{25\pi 12}{12} = 25\pi$

Ответ: нет.

Задача:

Найти объем шара радиусом 10 сантиметров.

Решение:

Для того чтобы вычислить объем шара формула используется следующая:

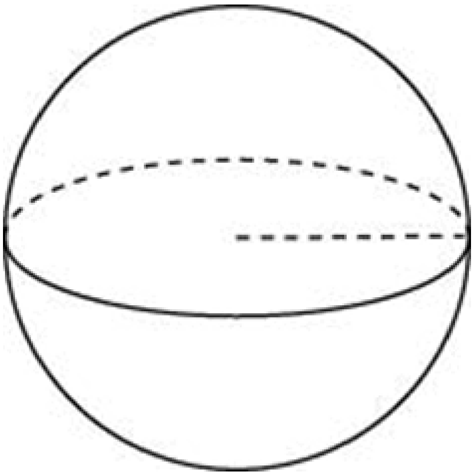
$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

где V – искомый объем шара, π – 3,14, R – радиус.

Таким образом, при радиусе 10 сантиметров объем шара равен: $V = \frac{4}{3}\ 3{,}14 \times 10^3 = 4082$ кубических сантиметров.

Решение задач:

1. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в шесть раз?



Объем шара находится по формуле:

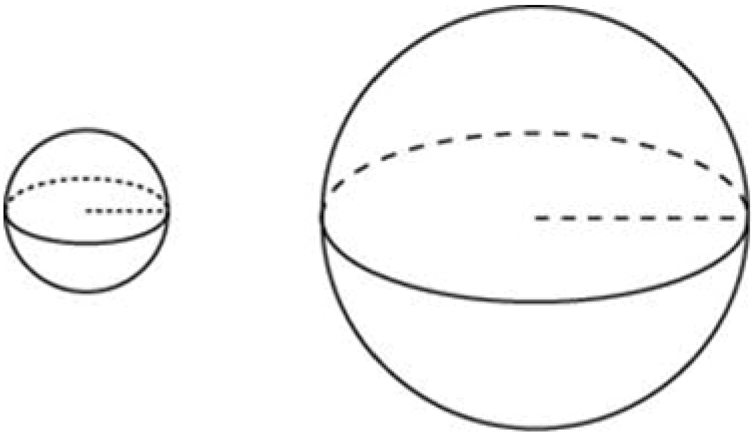
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

При увеличении радиуса в шесть раз его объём будет:

$$V = \frac{4}{3}\pi(6R)^3 = 216 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Таким образом, объем шара увеличится в 216 раз.
Ответ: 216

2. Объем одного шара в 216 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Формула объёма шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Формула площади поверхности шара:

$$S = 4\pi R^2$$

Пусть объёмы шаров соответственно равны:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1{}^3 \qquad V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2{}^3$$

Из условия следует, что:

$$\frac{4}{3}\pi R_1{}^3 = 216 \cdot \frac{4}{3}\pi R_2{}^3$$

$$R_1{}^3 = 216 \cdot R_2{}^3$$

$$\frac{R_1{}^3}{R_2{}^3} = 216$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{216}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 6$$

То есть, мы установили, что радиус первого больше радиуса второго в 6 раз. Если радиус шара уменьшить в 6 раз, то площадь поверхности шара изменится следующим образом:

$$S = 4\pi\left(\frac{R}{6}\right)^2 = \frac{4\pi R^2}{36}$$

То есть она уменьшится в 36 раз.

Домашнее задание:

1. Найдите объем конуса , осевое сечение которого представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой , равной 6 $\sqrt{2}$ см.

2.Найдите объем конуса , полученного в результате вращения вокруг большего катета прямоугольного треугольника с гипотенузой , равной 2 $\sqrt{6}$ см, и углом 30^0.

Тест по теме: «Тела вращения»

1. При вращении прямоугольника вокруг его стороны, получаем:
   а)конус; б) усеченный конус; в) шар; г) цилиндр.
2. При вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета, получаем:
   а)усеченный конус; б) цилиндр; в) шар; г) конус.
3. При вращении прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, получаем:
   а) цилиндр; б) усеченный конус; в) конус; г) шар.
4. При вращении полукруга вокруг его диаметра, получаем:
   а)усеченный конус; б) цилиндр; в) шар; г) конус.

5. Осевым сечением цилиндра является:

а)круг; б) равнобедренный треугольник; в)трапеция; г)прямоугольник.

6. Осевым сечением конуса является:

а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник;

в)трапеция; г)круг.

7. Осевым сечением усеченного конуса является:

а) трапеция; б) прямоугольник; в) круг;

г) равнобедренный треугольник.

8. Сечение шара плоскостью есть:

а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник;

в)трапеция; г)круг.

9. Написать формулу для вычисления объёма цилиндра.

10.Написать формулу для вычисления объёма конуса.

11.Написать формулу для вычисления объёма усечённого конуса.

12. Написать формулу для вычисления площади круга.

13.Написать формулу для вычисления длины окружности.

Взаимопроверка математического диктанта.

Дополнительная информация о конусе и шаре

1. В геологии существует понятие «*конус выноса*». Это форма рельефа, образованная скоплением обломочных пород (гальки, гравия, песка), вынесенными горными реками на предгорную равнину или в более плоскую широкую долину.
2. В биологии есть понятие «*конус нарастания*». Это верхушка побега и корня растений, состоящая из клеток образовательной ткани.
3. «*Конусами*» называется семейство морских моллюсков подкласса переднежаберных. Раковина коническая (2–16 см), ярко окрашенная. Конусов свыше 500 видов. Живут в тропиках и субтропиках, являются хищниками, имеют ядовитую железу. Укус конусов очень болезнен. Известны смертельные случаи. Раковины используются как украшения, сувениры.

По статистике на Земле ежегодно гибнет от разрядов молний 6 человек на 1000 000 жителей (чаще в южных странах). Этого бы не случалось, если бы везде были громоотводы, так как образуется конус безопасности (рис. 6). Чем выше громоотвод, тем больше объем такого конуса. Некоторые люди пытаются спрятаться от разрядов под деревом, но дерево не проводник, на нем заряды накапливаются и дерево может быть источником напряжения.

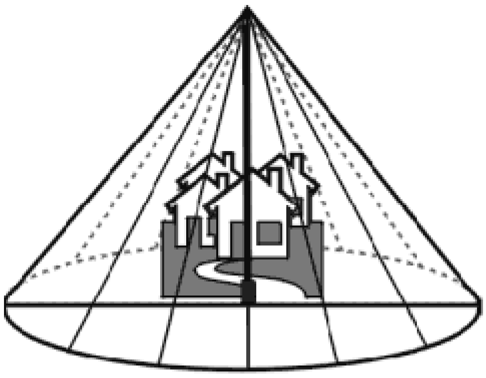


Рис. 6

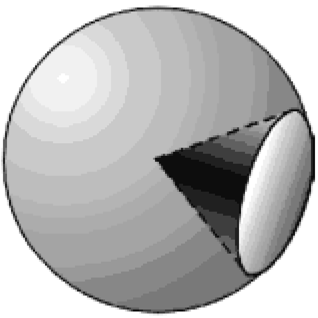


Рис. 7

В геометрии шар определяется как некое тело, представляющее собой совокупность всех точек пространства, которые располагаются от центра на расстоянии, не более заданного, называемого радиусом шара. Поверхность шара именуется сферой, а сам он образуется путем вращения полукруга около его диаметра, остающегося неподвижным.

С этим геометрическим телом очень часто сталкиваются инженеры-конструкторы и архитекторы, которым часто приходится вычислять объем шара. Скажем, в конструкции передней подвески подавляющего большинства современных автомобилей используются так называемые шаровые опоры, в которых, как нетрудно догадаться из самого названия, одними из основных элементов являются именно шары. С их помощью происходит соединение ступиц управляемых колес и рычагов. От того, насколько правильно будет вычислен их объем, во многом зависит не только долговечность этих узлов и правильность их работы, но и безопасность движения.

В технике широчайшее распространение получили такие детали, как шариковые подшипники, с помощью которых происходит крепление осей в неподвижных частях различных узлов и агрегатов и обеспечивается их вращение. Следует заметить, что при ихрасчете конструкторам требуется найти объем шара (а точнее – шаров, помещаемых в обойму) с высокой степенью точности. Что касается изготовления металлических шариков для подшипников, то они производятся из металлической проволоки при помощи сложного технологического процесса, включающего в себя стадии формовки, закалки, грубой шлифовки, чистовой притирки и очистки. Кстати говоря, те шарики, которые входят в конструкцию всех шариковых ручек, изготавливаются по точно такой же технологии.

Достаточно часто шары используются и в архитектуре, причем там они чаще всего являются декоративными элементами зданий и других сооружений. В большинстве случаев они изготавливаются из гранита, что зачастую требует больших затрат ручного труда. Конечно, соблюдать столь высокую точность изготовления этих шаров, как тех, которые применяются в различных агрегатах и механизмах, не требуется.

Без шаров немыслима такая интересная и популярная игра, как бильярд. Для их производства используются различные материалы (кость, камень, металл, пластмассы) и используются различные технологические процессы. Одним из основных требований, предъявляемых к бильярдным шарам, является их высокая прочность и способность выдерживать высокие механические нагрузки (прежде всего, ударные). Кроме того, их поверхность должна представлять собой точную сферу для того, чтобы обеспечивалось плавное и ровное качение по поверхности бильярдных столов.

Наконец, без таких геометрических тел, как шары, не обходится ни одна новогодняя или рождественская елка. Изготавливаются эти украшения в большинстве случаев из стекла методом выдувания, и при их производстве наибольшее внимание уделяется не точности размеров, а эстетичности изделий. Технологический процесс при этом практически полностью автоматизирован и вручную елочные шары только упаковываются.

Практическое занятие № 73

Тема: Контрольная работа
Цель: Проконтролировать уровень усвоения данной темы.

1 вариант

1. Развертка боковой поверхности цилиндра является квадратом, диагональ которого равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра и объем
2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120°. Высота цилиндра равна 5 см, радиус цилиндра $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь сечения и объем
3. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь основания цилиндра равна 16π см^2. Найдите площадь поверхности цилиндра, объем
4. Высота конуса равна 6 см, угол при вершине осевого сечения равен 120°. Найдите:
   а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми 30°;
   б) площадь боковой поверхности конуса.
   в) объем
5. Диаметр шара равен $2m$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 45° к нему. Найдите длину линии пересечения сферы этой плоскостью.

2 вариант

1. Развертка боковой поверхности цилиндра является прямоугольником, диагональ которого равна 8 см, а угол между диагоналями 30°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, объем
2. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть квадрат. Секущая плоскость отсекает от окружности основания дугу в 90°. Радиус основания цилиндра равен 4 см. Найдите площадь сечения, объем
3. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого 4 см. Найдите площадь поверхности цилиндра, объем
4. Радиус основания конуса равен 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите:

а) площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми 60°;

б) площадь боковой поверхности конуса.

в) объем

5. Диаметр шара равен $4m$. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 30° к нему. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью.

Практическое занятие № 74

Тема: Действия с векторами, заданными координатами

Цель: Обобщить и систематизировать материал по данной теме

Теоретический блок

Формулы деления отрезка в данном отношении на плоскости

Если известны две точки плоскости $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, то координаты точки $M(x_M; y_M)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}$$

Пример 1

Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $1:3$, если известны точки $A(5;3), B(-3;-1)$

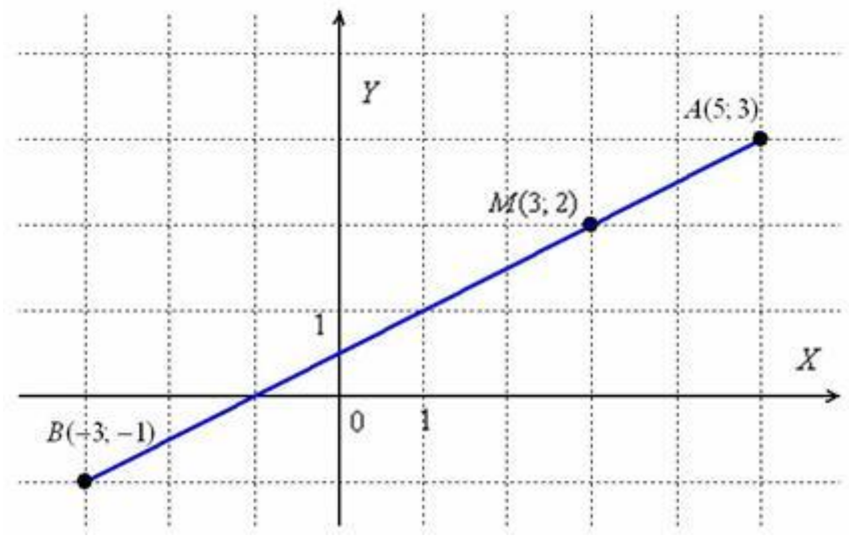
Решение: В данной задаче $\lambda = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. По формулам деления отрезка в данном отношении, найдём точку $M(x_M; y_M)$:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda} = \frac{5 + \frac{1}{3}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5-1}{\frac{4}{3}} = 4\cdot\frac{3}{4} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{1}{3}\cdot(-1)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4} = 2$$

Ответ: $M(3;2)$

В задаче не требуется строить чертежа, но его всегда полезно выполнить на черновике:



Действительно, соотношение $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ выполняется, то есть отрезок AM в три раза короче отрезка BM. Если пропорция не очевидна, то отрезки всегда можно измерить обычной линейкой.

<u>Пример 2</u>

Даны точки $K(-2;1),\ L(5;-6)$. Найти:

а) точку M, делящую отрезок KL в отношении $2:5$;
б) точку N, делящую отрезок KL в отношении $4:3$.

<u>Пример 3</u>

Точка P принадлежит отрезку DH. Известно, что отрезок DP в два раза длиннее отрезка HP. Найти точку H, если $D(2;4),\ P\left(\frac{8}{3};2\right)$.

Решение: Из условия следует, что точка P делит отрезок DH в отношении $2:1$, считая от вершины D, то есть, справедлива пропорция: $\lambda = \frac{DP}{HP} = 2$. По формулам деления отрезка в данном отношении:

$$x_P = \frac{x_D + \lambda \cdot x_H}{1+\lambda}, \quad y_P = \frac{y_D + \lambda \cdot y_H}{1+\lambda}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{2+2x_H}{1+2} \Rightarrow 2+2x_H = \frac{8}{3}\cdot 3 \Rightarrow 2+2x_H = 8 \Rightarrow 2x_H = 6 \Rightarrow x_H = 3$$

$$2 = \frac{4+2y_H}{1+2} \Rightarrow 4+2y_H = 6 \Rightarrow 2y_H = 2 \Rightarrow y_H = 1$$

Ответ: $H(3;1)$

<u>Пример 4</u>

Точка $M \in AB$. Отрезок BM в полтора раза короче отрезка AM. Найти точку A, если известны координат точек $B(2;0), M(-1;1)$.

Решение в конце урока. Оно, кстати, не единственное, если пойдёте отличным от образца путём, то это не будет ошибкой, главное, чтобы совпали ответы.

Формулы деления отрезка в данном отношении в пространстве

Для пространственных отрезков всё будет точно так же, только добавится ещё одна координата.

Если известны две точки пространства $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B z_B)$, то координаты точки $M(x_M;y_M;z_M)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AM}{BM}$, выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda}, \quad z_M = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda}.$$

Пример 5

Даны точки $A(-2;-3;-4), B(2;-4;0)$. Найти координаты точки M, принадлежащей отрезку AB, если известно, что $AM:BM = 4:2$.

Решение:

По формулам координат середины отрезка:

$$x_M = \frac{-2+2\cdot 2}{1+2} = \frac{2}{3}, \quad y_M = \frac{-3+2\cdot(-4)}{1+2} = -\frac{11}{3}, \quad z_M = \frac{-4+2\cdot 0}{1+2} = -\frac{4}{3}$$

Ответ: $M\left(\frac{2}{3};-\frac{11}{3};-\frac{4}{3}\right)$

Пример 6

Даны точки $B(-5;2;3), C(4;2;-5)$. Найти координаты точки A, если известно, что она делит отрезок BC в отношении $3:1$.

Формулы координат середины отрезка

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Для пространственного случая справедлива очевидная аналогия. Если даны концы отрезка $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B z_B)$, то координаты его середины M выражаются формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

<u>Пример 7</u>

Параллелограмм $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-4; 0), B(4; 4), C(7; 2), D(-1; -2)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

Решение:

По известному свойству, диагонали параллелограмма своей точкой пересечения $O(x_O; y_O)$ делятся пополам, поэтому задачу можно решить двумя способами.

Способ первый: Рассмотрим противоположные вершины $A(-4; 0), C(7; 2)$. По формулам деления отрезка пополам найдём середину диагонали AC:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4 + 7}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

В результате: $O\left(\frac{3}{2}; 1\right)$

Способ второй: Рассмотрим противоположные вершины $B(4; 4), D(-1; -2)$. По формулам деления отрезка пополам найдём середину диагонали BD:

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_O = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

Таким образом: $O\left(\frac{3}{2}; 1\right)$

Ответ: $O\left(\frac{3}{2}; 1\right)$

<u>Пример 8</u>

Даны точки $P\left(\frac{5}{3}; -1; \frac{1}{4}\right), Q\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right)$. Найти середину R отрезка PQ.

<u>Пример 9</u>

Точка M делит отрезок AB пополам. Найти точку B, если известны точки $A(2;0;-3), M(5;-4;1)$

Решение: Используем формулы координат середины отрезка:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Нам неизвестны координаты x_B, y_B, z_B. И снова можно вывести общую формулу для их нахождения, но гораздо легче сразу подставить числа. Только пропорциями верти:

$$5 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow 2 + x_B = 10 \Rightarrow x_B = 8$$

$$-4 = \frac{0 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = -8$$

$$1 = \frac{-3 + z_B}{2} \Rightarrow -3 + z_B = 2 \Rightarrow z_B = 5$$

Ответ: $B(8;-8;5)$

Практическое занятие № 75

Тема: Скалярное произведение двух векторов

Цель: Научить вычислять скалярное произведение двух векторов

Теоретический блок

Определение: Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$$

Обозначение: скалярное произведение обозначается через $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2, \quad |\bar{b}| = 5, \quad \angle(\bar{a};\bar{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. В данном случае:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\angle(\bar{a};\bar{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $\bar{a}\bar{b} = 5\sqrt{3}$

Пример 2

Найти $\bar{c}\bar{d}$, если $|\bar{c}| = 3, \quad |\bar{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен 135°.

Угол между векторами и значение скалярного произведения

В Примере 1 скалярное произведение получилось положительным, а в Примере 2 – отрицательным. Выясним, от чего зависит знак скалярного произведения. Смотрим на нашу формулу: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\angle(\bar{a};\bar{b})$. Длины ненулевых векторов всегда положительны: $|\bar{a}|>0, |\bar{b}|>0$, поэтому знак может зависеть только от значения косинуса.

Угол между векторами может изменяться в пределах $0\le\angle(\bar{a};\bar{b})\le\pi$, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: $0<\angle(\bar{a};\bar{b})<\dfrac{\pi}{2}$ (от 0 до 90 градусов), то $\cos\angle(\bar{a};\bar{b})>0$, и **скалярное произведение будет положительным**: $\bar{a}\bar{b}>0$. Особый случай: если векторы *сонаправлены*, то угол между ними считается нулевым $\angle(\bar{a};\bar{b})=0$, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку $\cos 0=1$, то формула упрощается: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: $\dfrac{\pi}{2}<\angle(\bar{a};\bar{b})<\pi$ (от 90 до 180 градусов), то $\cos\angle(\bar{a};\bar{b})<0$, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: $\bar{a}\bar{b}<0$. Особый случай: если векторы *направлены противоположно*, то угол между ними считается *развёрнутым*: $\angle(\bar{a};\bar{b})=\pi$ (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как $\cos\pi=-1$

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если $\bar{a}\bar{b}>0$, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если $\bar{a}\bar{b}<0$, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: $\angle(\bar{a};\bar{b})=\dfrac{\pi}{2}$ (90 градусов), то $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ и **скалярное произведение равно нулю**: $\bar{a}\bar{b}=0$. Обратное тоже верно: если $\bar{a}\bar{b}=0$, то $\angle(\bar{a};\bar{b})=\dfrac{\pi}{2}$. Компактно утверждение формулируется так: **Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: $\bar{a}\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$

А что будет, если вектор $\bar{a}$ умножить на самого себя? Понятно, что вектор сонаправлен сам с собой, поэтому пользуемся вышеуказанной упрощенной формулой: $\bar{a}\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|$

Или: $\overline{a}\,\overline{a} = |\overline{a}|^2$

Число $\overline{a}\,\overline{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\overline{a}$, и обозначатся как $\overline{a}^{\,2}$.

Таким образом, **скалярный квадрат вектора $\overline{a}$ равен квадрату длины данного вектора:**
$\overline{a}^{\,2} = |\overline{a}|^2$

Из данного равенства можно получить формулу для вычисления длины вектора:
$|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^{\,2}}$

Для произвольных векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и любого числа λ справедливы следующие свойства:

1) $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}$ – переместительный или **коммутативный** закон скалярного произведения.

2) $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}$ – распределительный или **дистрибутивный** закон скалярного произведения.

3) $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a}\,\overline{b})$ – сочетательный или **ассоциативный** закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

<u>Пример 3</u>

Найти скалярное произведение векторов $\overline{c} = -2\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 4\sqrt{2}, \quad |\overline{b}| = 8, \quad \angle(\overline{a};\overline{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение:

$\overline{c} \cdot \overline{d} \overset{(1)}{=}$

$= (-2\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) \overset{(2)}{=}$

$= -2\overline{a} \cdot \overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{a} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{b} \cdot \overline{b} \overset{(3)}{=}$

$= -2\overline{a}^2 + \overline{a} \cdot \overline{b} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{b}^{\,2} \overset{(4)}{=}$

$= -2\overline{a}^2 + 3\overline{a}\,\overline{b} - \overline{b}^{\,2} \overset{(5)}{=}$

$= -2|\overline{a}|^2 + 3 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a};\overline{b}) - |\overline{b}|^2 \overset{(6)}{=}$

$= -2 \cdot (4\sqrt{2})^2 + 3 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} - 8^2 = -64 + 96\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 64 = -32$

(1) Подставляем выражения векторов $\overline{c}, \overline{d}$.

(2) Раскрываем скобки по правилу умножения многочленов

(3) В первом и последнем слагаемом компактно записываем скалярные квадраты векторов: $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2, \quad \overline{b} \cdot \overline{b} = \overline{b}^{\,2}$. Во втором слагаемом используем перестановочность скалярного произведения: $\overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

(4) Приводим подобные слагаемые: $\overline{a} \cdot \overline{b} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} = 3\overline{a}\,\overline{b}$.

(5) В первом слагаемом используем формулу скалярного квадрата $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$, о которой не так давно упоминалось. В последнем слагаемом, соответственно, работает та же штука: $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2$. Второе слагаемое раскладываем по стандартной формуле $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a}; \overline{b})$.

(6) Подставляем данные условия $|\overline{a}| = 4\sqrt{2}, \quad |\overline{b}| = 8 \quad \angle(\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{4}$, и проводим окончательные вычисления.

Ответ: $\overline{c}\overline{d} = -32$

Отрицательное значение скалярного произведения констатирует тот факт, что угол между векторами $\overline{c}, \overline{d}$ является тупым.

Решение упражнений:

<u>Пример 4</u>

Найти скалярное произведение векторов $\overline{c} = -\overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{d} = -\overline{a} + \overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 4, \quad |\overline{b}| = 2\sqrt{3}, \quad \angle(\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{6}$.

<u>Пример 5</u>

Найти длину вектора $\overline{c} = -\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3, \quad |\overline{b}| = 2, \quad \angle(\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение

$$|\overline{c}| \overset{(1)}{=} |-\overline{a} + 3\overline{b}| \overset{(2)}{=} \sqrt{(-\overline{a} + 3\overline{b})^2} \overset{(3)}{=} \sqrt{\overline{a}^2 - 6\overline{a}\overline{b} + 9\overline{b}^2} \overset{(4)}{=} \sqrt{|\overline{a}|^2 - 6 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a}; \overline{b}) + 9 \cdot |\overline{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{9 - 36 \cdot \frac{1}{2} + 36} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Ответ: $|\overline{c}| = 3\sqrt{3}$ ед. $\approx 5{,}20$ ед.

<u>Пример 6</u>

Найти длину вектора $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5, \quad |\overline{b}| = 10, \quad \angle(\overline{a}; \overline{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

<u>Пример 7</u>

Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 4, \quad |\overline{b}| = 2\sqrt{2}, \quad \overline{a}\overline{b} = 8$.

Решение: Используем формулу:

$$\cos\angle(\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Итак, если $\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то:

$$\angle(\overline{a};\overline{b})=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\pi}{4}\text{ рад.}=45^\circ$

<u>Пример 7*</u>

Даны $|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=4$ – длины векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и угол между ними $\angle(\overline{a};\overline{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Найти угол между векторами $\overline{c}=-2\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{d}=4\overline{a}-3\overline{b}$.

Задание даже не столько сложное, сколько многоходовое.
Разберём алгоритм решения:

1) По условию требуется найти угол между векторами $\overline{c}$ и $\overline{d}$, поэтому нужно использовать формулу $\cos\angle(\overline{c};\overline{d})=\dfrac{\overline{c}\overline{d}}{|\overline{c}|\cdot|\overline{d}|}$.

2) Находим скалярное произведение $\overline{c}\overline{d}$ (см. Примеры №№3,4).

3) Находим длину вектора $\overline{c}$ и длину вектора $\overline{d}$ (см. Примеры №№5,6).

4) Концовка решения совпадает с Примером №7 – нам известно число $\dfrac{\overline{c}\overline{d}}{|\overline{c}|\cdot|\overline{d}|}$, а значит, легко найти и сам угол: $\angle(\overline{c};\overline{d})=\arccos\left(\dfrac{\overline{c}\overline{d}}{|\overline{c}|\cdot|\overline{d}|}\right)$

Краткое решение и ответ в конце урока.

Второй раздел урока посвящен тому же скалярному произведению. Координаты. Будет даже проще, чем в первой части.

<u>Пример 8</u>

Найти скалярное произведение векторов:
а) $\overline{a}(2;-5)$ и $\overline{b}(-1;0)$
б) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если даны точки $A(1;-1;3), B(0;1;-2), C(4;-4;0)$

Ответ: $a)\ \overline{a}\overline{b}=-2,\quad б)\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}=6$

При некотором опыте скалярное произведение можно приноровиться считать устно.

<u>Пример 10</u>

Даны четыре точки пространства $A(-4;-3;-2), B(2;-2;-3), C(-8;-5;1), D(4;-3;-1)$.
Выяснить будут ли перпендикулярными следующие **прямые**:
а) AB, DC;
б) AC, BD.

Пример 11

При каком значении λ векторы $\overline{a}(3;\lambda;-2), \overline{b}(2-\lambda;-1;5)$ будут ортогональны?

Решение: По условию требуется найти **такое** значение параметра λ, чтобы данные векторы были ортогональны. Два вектора пространства $\overline{v}(v_1;v_2;v_3), \overline{w}(w_1;w_2;w_3)$ ортогональны тогда и только тогда, когда $v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3=0$.

Составим уравнение:
$\overline{a}\overline{b}=0$

$3\cdot(2-\lambda)+\lambda\cdot(-1)+(-2)\cdot 5=0$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:
$6-3\lambda-\lambda-10=0$

$-4\lambda-4=0$

Решаем простейшее линейное уравнение:
$-4\lambda=4$

$\lambda=-1$

Ответ: при $\lambda=-1$

Пример 12

При каком значении λ скалярное произведение векторов $\overline{a}(2;\lambda), \overline{b}(2;-3)$ будет равно –2?

Найти скалярное произведение векторов $3\overline{c}$ и $2\overline{c}+\overline{d}$, если $\overline{c}(0;-3;5), \overline{d}(-4;1;0)$

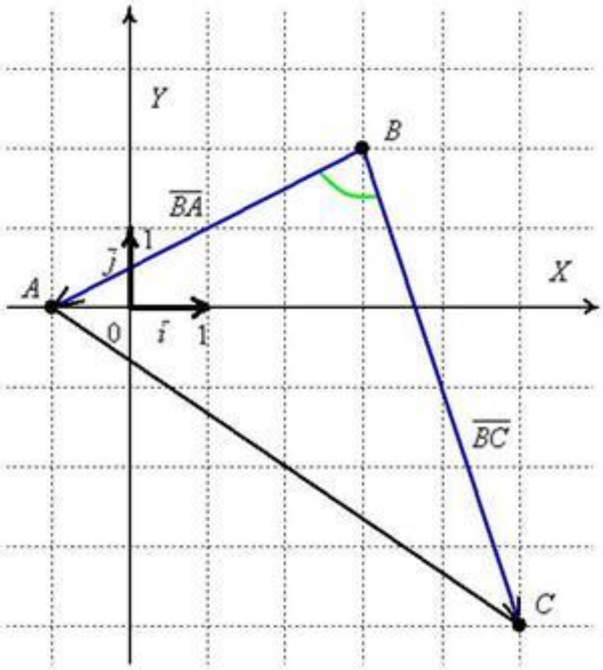
Это пример для самостоятельного решения. Здесь можно использовать ассоциативность операции, то есть не считать $3\overline{c}=3(0;-3;5)=(0;-9;15)$, а сразу вынести тройку за пределы скалярного произведения и домножить на неё в последнюю очередь. Решение и ответ в конце урока.

В заключение параграфа провокационный пример на вычисление длины вектора:

Пример 16

Даны три вершины треугольника $A(-1;0), B(3;2), C(5;-4)$. Найти $\angle ABC$ (угол при вершине B).

Решение: По условию чертёж выполнять не требуется, но всё-таки:



Найдём векторы:

$\overline{BA}(-1-3;\ 0-2) = \overline{BA}(-4;\ -2)$

$\overline{BC}(5-3;\ -4-2) = \overline{BC}(2;\ -6)$

Вычислим скалярное произведение:

$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -4 \cdot 2 - 2 \cdot (-6) = -8 + 12 = 4$

И длины векторов:

$\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Косинус угла:

$$\cos\angle(\overline{BA};\ \overline{BC}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right|} = \frac{4}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos\angle(\overline{BA};\ \overline{BC}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right|} = \frac{-4 \cdot 2 - 2 \cdot (-6)}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-6)^2}} =$$

$$= \frac{-8+12}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{4+36}} = \frac{4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{40}} = \frac{4}{\sqrt{800}} = \frac{4}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Найдём сам угол:

$$\angle(\overline{BA};\ \overline{BC}) = \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}} \approx 1{,}43 \text{ рад.} \approx 82^\circ$$

Ответ: $\angle ABC = \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}} \approx 1{,}43 \text{ рад.} \approx 82^\circ$

<u>Пример 17</u>

В пространстве задан треугольник координатами своих вершин $A_1(1;1;1), A_2(3;0;0), A_3(2;3;7)$. Найти угол между сторонами A_1A_2 и A_1A_3

Практическое занятие № 76

Тема: Контрольная работа
Цель: Проверить уровень усвоения данной темы у учащихся

ВАРИАНТ 1.

1. Даны координаты точек *C(3; -2; 1), D(-1; 2; 1), M(2; -3; 3), N(-1; 1; -2).* Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

2. При каком значении (значениях) *a* векторы $\vec{\grave{a}}$*(6 - k; k; 2)* и $\vec{\hat{a}}$*(-3; 5 + 5k; -9)* перпендикулярны?

3. При каком значении *a* векторы $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если *A(-2; -1; 2), B(4; -3; 6), C(-1; a-1; 1), D(-4; -1; a)?*

4. Известно, что $|\vec{\grave{a}}| = 4$, $|\vec{\hat{a}}| = 1$, $\angle(\vec{\grave{a}},\vec{\hat{a}}) = 60^0$. найдите cos α, где α - угол между векторами $\vec{\grave{a}}+\vec{\hat{a}}$ и $\vec{\grave{a}}$.

5. Найдите длину вектора $\vec{\grave{a}}+\vec{\hat{a}}-\vec{\tilde{n}}$, если $|\vec{\grave{a}}| = 1$, $|\vec{\hat{a}}| = 2$, $|\vec{\tilde{n}}| =3$, $\angle(\vec{\grave{a}},\vec{\hat{a}}) = 90^0$, $\angle(\vec{\grave{a}},\vec{\tilde{n}}) = 120^0$, $\angle(\vec{\hat{a}},\vec{\tilde{n}}) = 60^0$.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка *M* лежит на ребре AA_1, причем $AM : AM_1 = 3 : 1$, а точка *N* – середина ребра *BC.* Вычислите косинус угла между прямыми *а) MN и* DD_1*;* *б) MN и* A_1C.

ВАРИАНТ 2.

1. Даны координаты точек *A(1; -1; -4), D(2; -3; 1), C(-1; 2; 5), B(-3; -1; 0).* Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$.

2. При каком значении (значениях) *m* векторы $\vec{\grave{a}}$*(4; m - 1; m)* и $\vec{\hat{a}}$*(-2; 4; 3 - m)* перпендикулярны?

3. При каком значении *a* векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если *M(1; -2; a), B(-1; a + 3; -1), C(-3; 2; 4), D(1; -4; 2)?*

4. Известно, что $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| =3$, $\angle(\vec{m},\vec{n}) = 120^0$. найдите cos α, где α - угол между векторами $\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{m}$.

5. Найдите длину вектора $\vec{\grave{a}}-\vec{\hat{a}}-\vec{\tilde{n}}$, если $|\vec{\grave{a}}| = 2$, $|\vec{\hat{a}}| = 3$, $|\vec{\tilde{n}}| =4$, $\angle(\vec{\grave{a}},\vec{\hat{a}}) = 60^0$, $\angle(\vec{\grave{a}},\vec{\tilde{n}}) = 120^0$, $\angle(\vec{\hat{a}},\vec{\tilde{n}}) = 90^0$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$. Вычислите косинус угла между прямыми *а) BD и* CD_1*;* *б) AC и* AC_1.

ВАРИАНТ 3.

1. Даны координаты точек *A(1; -1; -4), D(2; -3; 1), C(-1; 2; 5), B(-3; -1; 0).* Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}}$.

2. При каком значении (значениях) m векторы $\vec{a}(4;\ m-1;\ m)$ и $\vec{a}(-2;\ 4;\ 3-m)$ перпендикулярны?

3. При каком значении a векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если $M(1; -2; a)$, $B(-1; a+3; -1)$, $C(-3; 2; 4)$, $D(1; -4; 2)$?

4. Известно, что $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\angle(\vec{m},\vec{n}) = 120^0$. найдите $\cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{m}$.

5. Найдите длину вектора $\vec{a}-\vec{a}-\vec{n}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{a},\vec{a}) = 60^0$, $\angle(\vec{a},\vec{n}) = 120^0$, $\angle(\vec{a},\vec{n}) = 90^0$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$. Вычислите косинус угла между прямыми *а) BD и CD_1; б) AC и AC_1.*

Критерии оценивания

Оценка «отлично» выставляется студенту

за 100% правильных ответов;

Оценка «хорошо» выставляется студенту

за 75 - 99% правильных ответов;

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту

за 50 - 75% правильных ответов;

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту

за менее 50% правильных ответов.

Литература:

Основная литература:
1. Алпатов, А. В. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / А. В. Алпатов. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 162 c. — 978-5-4486-0403-4, 978-5-4488-0215-7. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/80328.html
2. Горюшкин, А. П. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. П. Горюшкин ; под ред. М. И. Водинчара. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 824 c. — 978-5-4486-0735-6. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/83654.html
3. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / О.В. Бондрова [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 194 c. — 978-5-4486-0107-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/70267.html

Дополнительная литература:
1.Совертков, П.И. Справочник по элементарной математике : учебное пособие / П.И. Совертков. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 404 с. — ISBN 978-5-8114-4132-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/115529 (дата обращения: 10.09.2019). — Режим доступа: для авториз. Пользователей

2. Алексеев, Г. В. Высшая математика. Теория и практика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / Г. В. Алексеев, И. И. Холявин. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Профобразование, Ай Пи Эр Медиа, 2019. — 236 c. — 978-5-4486-0755-4, 978-5-4488-0253-9. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/81274.html
3.Коробейникова, И. Ю. Математика. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / И. Ю. Коробейникова, Г. А. Трубецкая. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Профобразование, 2019. — 154 c. — 978-5-4488-0344-4. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/86073.html

Интернет-ресурсы:

- Газета «Математика» издательского дома «Первое сентября» http://www.mat/septemba.ru
- Математика в открытом колледже http://www.mathematics.ru
- Образовательный математический сайт Exponenta.mhtto://www/ exponent/ru
- Общероссийский математический портал Mati-Net/Ru http://www/mathnet/ru
- Портал Alhnath.ni –вся математика в одном месте.