Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске
Колледж института сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ЕН.02 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Специальности СПО
09.02.01. Компьютерные системы и комплексы
Квалификация техник по компьютерным системам

Пятигорск 2020

Методические указания для практических занятий по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» составлены в соответствии с ФГОС СПО. Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 09.02.01 «Компьютерные системы и комплексы»

Рассмотрены на заседании ПЦК ИСТиД (филиал) СКФУ в г. Пятигорске.

Протокол №_8_от _12.03___2020 г.

Составитель Л.А. Плахутина

Директор З.А. Михалина

Пояснительная записка

Для многих студентов значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в данных методических указаниях главное внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал. Однако прежде чем начать решать эти примеры надо добиться полной ясности в понимании соответствующих понятий.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приводятся решения типовых примеров и задач. Даются упражнения на закрепления темы.

Выполнение студентами практических работ направленно на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам;
- формирование умений применять полученные знания на практике и реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработку при решении поставленных задач таких профессиональных качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

В результате изучения учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» обучающийся должен

уметь:

- вычислять вероятность событий с использованием элементов комбинаторики;
- использовать методы математической статистики

В результате изучения учебной дисциплины обучающийся должен знать:

- основы теории вероятностей и математической статистики;

- основные понятия теории графов

Практическая работа № 1

Тема: Решение задач на расчет количества выборок

Цель: Научиться вычислять вероятности случайных событий

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте методику решения типовых задач.
3. Рассмотрите примеры решения типовых задач.
4. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие вероятности случайного события.
2. Понятия перестановки, размещения, сочетания.

Вероятность случайных событий. Непосредственный подсчет вероятности.

Под **вероятностью** случайного события понимается число, характеризующее степень возможности появления события. При этом вероятность невозможного события принимается равной нулю, а вероятность достоверного события равной единице. Этим ограничивается диапазон изменения вероятности случайного события:

$0 \le p \le 1$.

Классическое определение вероятности основано на представлении случайного события как результата (исхода) некоторого воображаемого или фактического опыта (испытания), повторяющегося любое число раз. Эта теоретическая модель лежит в основе непосредственного подсчета вероятности случайного события.

Вероятностью случайного события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов n, образующих полную группу:

$P(A) = \frac{m}{n}$. (1)

Для определения количества исходов n и m часто приходится использовать формулы комбинаторики. **Комбинаторика** изучает количество комбинаций из элементов определенной природы заданного конечного множества.

Перестановки - комбинации из одних и тех же элементов, которые различаются только порядком их расположения. Число перестановок определяется по формуле:

$P_n = n!$, (2)

где n - количество элементов в комбинации.

Например: Сколькими способами можно распределить 5 объектов работы между 5 бригадами электромонтажников?

$n = 5$ $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Размещения - комбинации из n различных элементов по m элементов, отличающихся либо составом, либо порядком. Число размещений из n по m определяется как:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (3)$$

Например: Имеется 10 электродвигателей, из которых 3 одного типа. Сколькими способами их можно расположить в один ряд?

$$n=10 \quad m=3 \quad A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Сочетания - комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (4)$$

Например: Сколькими способами можно составить бригаду в составе 3 человек, выбирая их из 8 электриков?

$$n=8 \quad m=3 \quad C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = 56.$$

Правило суммы: Если объект A выбран n способами, а объект B - m способами, то выбор либо A, либо B можетбыть осуществлен $(n+m)$ способами.

Правило произведения: Если объект A выбран m способами, а после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара $(A \cdot B)$ может быть выбрана $(n \cdot m)$ способами.

Методика решения типовых задач

Классические задачи ТВ исторически связаны с теорией азартных игр. Однако, представленные математические модели могут быть использованы также при решении ряда технических задач.

Методика решения задач на непосредственный подсчет вероятности случайного события сводится к следующему:

1. Определение общего числа возможных исходов n;
2. Анализ и расчет количества исходов, благоприятствующих случайному событию, т.е. таких, в которых данное событие обязательно произойдет;
3. Определение искомой вероятности события по выражению (1).

Рассмотрим решение ряда типовых задач по данному разделу:

I тип задач. *Условие задачи:* Пусть имеется урна, в которой a - белых шаров и b - черных. Из урны наугад выбирается 1 шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение

$$n = a+b \quad m = a \quad p = \frac{m}{n} = \frac{a}{a+b}.$$

В данном случае все исходы опыта, связанного со случайным выбором шара из урны, являются равновозможными и несовместными, т.е, опыт сводится к «схеме урн». Поэтому вероятность достать случайным образом белый шар вторым или последним из урны также равна $p = \frac{a}{a+b}$.

II тип задач *Условие задачи:* В коробке 30 электроламп, причем 12 из них рассчитаны на напряжение 220 В, а остальные - на напряжение 36 В. Какова вероятность того, что из 4 наугад взятых одновременно электроламп все окажутся или с напряжением 220 В, или с напряжением 36 В?

Решение

Введем обозначения:

A - событие, состоящее в том, что из 4 электроламп все с напряжением 220 В;

B - из 4 электроламп все с напряжением 36 В;

C - появление событий либо A либо B.

а) Общее число исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать 4 электролампы из 30.

$n = C_{30}^{4}$.

б) Число исходов, благоприятствующих событию A, $m_1 = C_{12}^{4}$,

Число исходов, благоприятствующих событию B, $m_2 = C_{18}^{4}$.

с) $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_{12}^{4}}{C_{30}^{4}} = \frac{12!\,4!\,26!}{4!\,8!\,30!} = \frac{11}{609}$.

$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_{18}^{4}}{C_{30}^{4}} = \frac{18!\,4!\,26!}{4!\,14!\,30!} = \frac{68}{609}$.

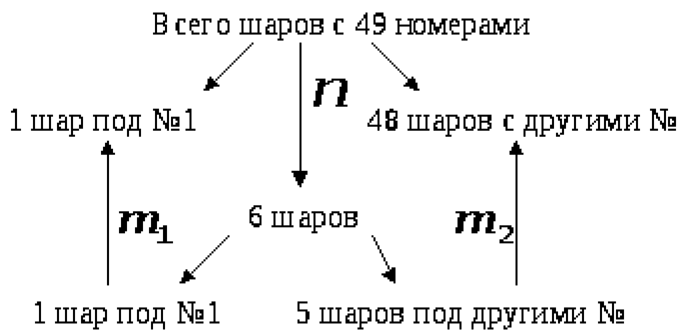
Вероятность события, состоящего в появлении либо события A, либо события B, определим с использованием правила суммы

$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{11}{609} + \frac{68}{609} \approx 0{,}13$.

Условие задачи: Студент купил карточку Спортлото и отметил в ней последовательно шесть первых номеров. Определить вероятность того, что при тираже 6 из 49 в числе выигравших шаров окажется шар под № 1.

Решение

а) Общее число исходов $n = C_{49}^{6}$.



б) Число исходов, благоприятствующих событию, определяется числом возможных комбинаций из 6 номеров, обязательно включавших № 1. Для определения числа комбинаций удобно использовать схематическое представление:

Как видно, m зависит от возможных комбинаций из 5 шаров (с другими номерами, отличными от № 1) из 48 таких шаров.

$m_1 = 1$.

$m = m_1 \cdot m_2 = C_{48}^{5}$.

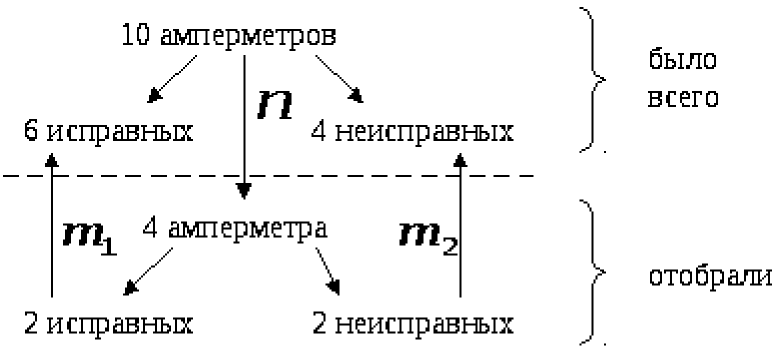
с) $p = \frac{m}{n} = \frac{C_{48}^{5}}{C_{49}^{6}} = \frac{48!\,43!\,6!}{5!\,43!\,49!} = \frac{6}{49} \cong 0{,}1224$.

III тип задач *Условие задачи:* На полке находится 10 амперметров, из которых 6 исправных. Найти вероятность того, что среди 4, наудачу отобранных амперметров, 2 исправных.

Решение

От задач **II типа** данный тип задач отличает неоднородность состава комбинаций, соответствующих благоприятным исходам случайного события. Для решения удобно представить условие задачи схематически:

а) Общее число исходов $n = C_{10}^{4}$.



б) m определяется на основе правила произведения, поскольку выбор 4 амперметров осуществляется одновременно:

$m = m_1 \cdot m_2$

$m_1 = C_6^2 \quad m_2 = C_4^2$.

с) $p = \frac{m_1 \cdot m_2}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{6!\,4!\,6!\,4!}{2!\,4!\,2!\,2!\,10!} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43$.

Решите задачи:

Задача 1. Брошена игральная кость. Найти вероятность выпадения четного числа очков.

Задача 2. Участники жеребьевки тянут из урны жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу вытащенного жетона будет содержать цифру 5.

Задача 3. В пяти мешочках находятся 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному из каждого мешочка кубиках и расположенных в одну линию можно будет прочесть слово «спорт».

Задача 4. На каждой из шести одинаковых карточек написаны одна из букв: А,Т, М, Р,С,О. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной и расположенных в одну линию карточек можно будет прочесть слово «трос».

Задача 5. Куб, все грани которого окрашены, распилили на тысячу кубиков, которые затем тщательно перемешали. Найти вероятность того, что наудачу вытащенный кубик будет иметь одну окрашенную грань, две и три.

Задача 6. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость оказалась: а) дублем, б) не дублем.

Задача 7. Восемь различных книг наудачу расставляются на полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся стоящими рядом.

Домашнее задание:

Решите задачи:

1. В лотерее разыгрываются 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Число лотерейных билетов равно 10000 штук. Чему равна вероятность выигрыша?

2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0.1; 8 очков и меньше - 0.6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не меньше 9 очков.

3. В партии из 10 деталей – 8 штук стандартных. Найти вероятность того, что среди двух наудачу извлеченных деталей хотя бы одна будет стандартной.

4. В партии из 10 деталей оказалось 8 стандартных. Наудачу отобрали две. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется:

1. не более одной стандартной,

б) хотя бы одна стандартная,

в) только одна стандартная.

5. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень, равна 0,9. Произведено 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела попали в цель.

6. В студии находится три телекамеры. Вероятность включения каждой камеры равна 0.6. Найти вероятность того, что в данный момент хотя бы одна камера будет включена.

Практическое занятие № 2

Тема: Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности.

Цель: Научиться вычислять вероятности случайных событий по классической формуле определения вероятностей

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.

Контрольные вопросы:

1. Понятие вероятности случайного события, перестановки, размещения, сочетания.
2. Правила суммы и произведения случайных событий.

Непосредственный подсчет вероятности случайного события удобно использовать только при анализе простейших случайных явлений, когда по условию задачи известны все количественные показатели по исследуемому объекту или их легко можно вычислить. Это позволяет по формулам комбинаторики подсчитать количество исходов m и n. Однако на практике приходится сталкиваться со случайными событиями, которые формируются за счет сочетания целого ряда случайных факторов. Например, вероятность выхода из строя любого технического устройства зависит от вероятности работоспособности каждого из его элементов, а также от способа их соединения. Для определения вероятности таких случайных событий используются косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий находить вероятности связанных с ними событий.

Прежде всего необходимо проанализировать случайное событие и определить образуется ли оно как сумма элементарных событий или как их произведение.

Для этого введем два базовых понятия алгебры событий.

Суммой нескольких случайных событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Так для суммы трех случайных событий A, B, C произойдет либо A, либо B, либо C, либо сочетания AB, AC, BC, ABC. Например, аварийное повреждение блока электрической системы генератор-трансформатор-линия электропередач представляет собой сумму элементарных событий: либо повреждение генератора, либо повреждение трансформатора, либо линии электропередач, либо всевозможные совместные повреждения.

Произведением нескольких случайных событий называется событие, состоящее в одновременном появлении этих событий. Например, безотказная работа блока генератор-трансформатор-линия электропередач возможна только при одновременной безотказной работе всех трех элементов блока.

Расчет вероятности сложного события производится на основе теорем о сумме и произведении случайных событий.

При выборе расчетных формул необходимо учитывать два существенных момента:

а) Определение вероятности суммы случайных событий зависит от того, совместны или несовместны эти события.

Пусть случайные события A, B - несовместны, тогда вероятность суммы двух событий $A+B$ равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Если A, B - совместные события, тогда вероятность суммы двух событий $A+B$ равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

для трех совместных событий A, B, C вычисление вероятности суммы производится по формуле

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

б) Для определения вероятности произведения случайных событий необходимо проанализировать зависимы они или независимы.

При вычислении вероятности произведения событий используется понятие условной вероятности.

Под **условной вероятностью** $P_A(B)$ некоторого случайного события B, связанного с событием A, понимается вероятность появления события B при условии, что событие A уже произошло.

Если случайные события A, B - независимы, то вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Если случайные события зависимы, то вероятность произведения двух событий вычисляется с учетом условной вероятности

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B),$$
$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

При решении задач часто находит применение следствие из теоремы о сумме вероятностей.

Сумма вероятностей для событий, образующих полную группу $A_1, \ldots A_n$, равна единице

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

В частности, для противоположных событий:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Домашнее задание:

1. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень, равна 0,9. Произведено 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела попали в цель.

2. Вероятность поражения цели при одном выстреле первым стрелком равна 0.8, а вторым - 0.6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком (первым или вторым).

Практическое занятие № 3

Тема: Решение задач на вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности.

Цель: Научиться вычислять вероятности случайных событий по классической формуле определения вероятностей

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Решите задачи.

Решите задачи:

Задача 1. В лотерее разыгрываются 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Число лотерейных билетов равно 10000 штук. Чему равна вероятность выигрыша?

Задача 2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0.1; 8 очков и меньше - 0.6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не меньше 9 очков.

Задача 3. В партии из 10 деталей – 8 штук стандартных. Найти вероятность того, что среди двух наудачу извлеченных деталей хотя бы одна будет стандартной.

Задача 4. В партии из 10 деталей оказалось 8 стандартных. Наудачу отобрали две. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется:

2. не более одной стандартной,

б) хотя бы одна стандартная,

в) только одна стандартная.

Задача 5. В урне находятся 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в извлечении наугад одного шара, причем он не возвращается обратно в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором - черный, а при третьем – синий.

Задача 6. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень, равна 0,9. Произведено 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела попали в цель.

Задача 7. Брошены монета и кость. Найти вероятность того, что одновременно на монете появится "орел", а на кости "6".

Задача 8. В студии находится три телекамеры. Вероятность включения каждой камеры равна 0.6. Найти вероятность того, что в данный момент хотя бы одна камера будет включена.

Задача 9. Из ряда цифр 1,2,3,4,5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех - другая. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра:

а) только в первый раз;

б) только во второй раз;

в) в первый и во второй.

Задача 10. Вероятность того, что событие **А** появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0.75. Найти вероятность появления события **А** в одном испытаний.

Домашнее задание:

1. Осуществляется проверка изделий на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что:

а) из трех проверенных деталей только одна окажется нестандартной;

б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие**.**

Практическое занятие № 4

Тема: Вычисление вероятностей сложных событий

Цель: Научиться вычислять вероятности сложных событий.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовых задач.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие условной вероятности.
2. Формула полной вероятности.
3. От чего зависит количество гипотез появления некоторого случайного события А..

Формула полной вероятности

Формула полной вероятности применяется при следующей постановке задачи.

Пусть производится анализ некоторого случайного события A. По поводу возможности появления данного события могут быть высказаны некоторые гипотезы H_1, H_2, …, H_n, которые охватывают все возможные условия появления события A и образуют полную группу событий.

Из условия задачи известны или могут быть определены вероятности всех возможных гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$, а также условные вероятности появления A при каждой из гипотез $P_{H_1}(A)$, $P_{H_2}(A)$, …, $P_{Hn}(A)$. Определить вероятность появления случайного события A.

Вероятность события при такой постановке задачи может быть найдена по формуле полной вероятности.

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)P_{H_n}(A)$$

где $H_1 \ldots H_n$ - гипотезы, которые образуют полную группу событий;

$P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1$.

Решение типовых задач

I тип задач. *Условие задачи:* Функционирование электрической системы обеспечивает 100%-ное электроснабжение потребителей в трех режимах, различающихся по конфигурации и пропускной способности электрической сети. В каждом из этих режимов сеть может находиться с вероятностью 0,3; 0,5; 0,2 соответственно. Безаварийная работа системы в каждом режиме возможна с вероятностями 0,9; 0,75; 0,8. Определить вероятность 100% электроснабжения потребителей. Найти вероятность нарушения электроснабжения.

Решение

а) Введем обозначение событий и гипотез.

Исследуемое событие:

A - обеспечение 100%-ного электроснабжения;

$\overline{A}$ - нарушение электроснабжения.

Гипотезы

Вероятности

гипотез

Условные вероятности

H_1 - работа сети в первом режиме;

$P(H_1)=0,3$;

$P_{H_1}(A)=0,9$

$P_{H_1}(\overline{A})=1-0,9=0,1$;

H_2 - работа сети во втором режиме;

$P(H_2)=0,5$;

$P_{H_2}(A)=0,75$

$P_{H_2}(\overline{A})=1-0,75=0,25$

H_3 - работа сети в третьем режиме.

$P(H_3)=0,2$;

$P_{H_3}(A)=0,8$

$P_{H_3}(\overline{A})=1-0,8=0,2$.

б) По формуле полной вероятности найдем вероятность 100% электроснабжения потребителей

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$
$$=0,3\cdot 0,9+0,5\cdot 0,75+0,2\cdot 0,8=0,805.$$

Определим вероятность нарушения электроснабжения $\overline{A}$ по формуле

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0,195.$$

II тип задач. *Условие задачи:* В группе 10 студентов, пришедших на экзамен. Экзаменационные билеты включают 20 вопросов. Три студента подготовлены *отлично* - знают все 20 вопросов билетов; 4 студента подготовлены *хорошо* – знают 16 вопросов из 20; 2 студента подготовлены *удовлетворительно* – знают 10 вопросов из 20; 1 студент подготовлен *плохо* – знает 5 вопросов из 20. Вызванный студент ответил на все три вопроса билета.

Решение

а) Введем обозначения гипотез и событий.

A - правильный ответ студента на все три вопроса билета;

Гипотезы

Вероятности

гипотез

Условные вероятности

H_1 - подготовлен *отлично*;

$P(H_1) = 0,3$;

$P_{H_1}(A) =$?

H_2 - подготовлен *хорошо*;

$P(H_2) = 0,4$;

$P_{H_2}(A) =$?

H_3 - подготовлен *удовлетворительно*;

$P(H_3) = 0,2$;

$P_{H_3}(A) =$?

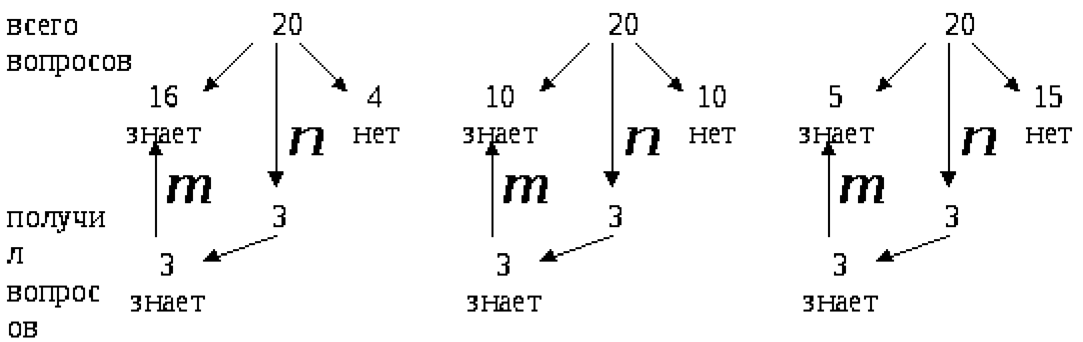
H_4 - подготовлен *плохо.*

$P(H_4) = 0,1$.

$P_{H4}(A) =$?

б) Для определения условных вероятностей можно использовать *два подхода*.

Подход 1. Непосредственный подсчет вероятностей на основе формул комбинаторики и по аналогии с задачами раздела 1.1.3.



С помощью приведенных схем находим условные вероятности:

$P_{H_1}(A)=1;$

$P_{H_2}(A)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}=\frac{16!\,3!\,17!}{3!\,13!\,20!}\approx 0{,}491;$

$P_{H_3}(A)=\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}=\frac{10!\,3!\,17!}{3!\,7!\,20!}\approx 0{,}105;$

$P_{H_4}(A)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5!\,3!\,17!}{3!\,2!\,20!}\approx 8{,}7\cdot 10^{-3}.$

Подход 2. Применение теоремы произведения вероятностей зависимых событий.

Поскольку студент должен ответить на три вопроса билета одновременно, необходимо определить вероятность произведения трех зависимых событий:

A_1 - ответ на первый вопрос билета;

A_2 - ответ на второй вопрос билета;

A_3 - ответ на третий вопрос билета.

Если студент подготовлен *отлично*, то правильный ответ на три вопроса билета есть событие достоверное, т.е.

$P_{H_1}(A)=1.$

Для определения условных вероятностей правильного ответа на три вопроса билета при гипотезах H_2, H_3, H_4 используем выражение

$P_{H_i}(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3),$

Если студент подготовлен *хорошо*, то $P(A/H_2)=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0{,}491.$

Если студент подготовлен *посредственно*, то $P(A/H_3)=\frac{10}{20}\cdot\frac{19}{19}\cdot\frac{18}{18}\approx 0{,}105.$

Если студент подготовлен *плохо*, то $P(A/H_4)=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\approx 8{,}7\cdot 10^{-3}.$

Как видно, второй подход предпочтительнее, так как позволяет уменьшить объем вычислений.

с) Далее по формуле полной вероятности находим вероятность правильного ответа на три вопроса билета до испытания:

$P(A)=0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 8{,}7\cdot 10^{-3}\approx 0{,}518$

Решите задачи

Задача 1. В группе 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнения квалификационной нормы следующая: 0,9 для лыжника, 0,8 для велосипедиста, 0,75 для бегуна. Найти вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен выполнит норматив.

Задача 2. В первом ящике находится 20 деталей (из них 15 - стандартных), во втором - 30 деталей (24 стандартных), в третьем - 10 деталей (6 стандартных). Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика будет стандартной.

Задача 3. Имеется четыре кинескопа. Вероятности того, что кинескопы выдержат гарантийный срок. равны: 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что наудачу взятый кинескоп выдержит гарантийный срок.

Задача 4. Из полного набора костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую вытащенную наудачу кость можно будет приставить к первой.

Задача 5. В ящике содержится три детали. В него положена еще одна, причем стандартная. Определить вероятность извлечения из ящика стандартной детали, если все рассматриваемые варианты равновероятны.

Домашнее задание:

Решите задачи:

1. Вероятность срабатывания сигнализатора С1 равна 0,8, а сигнализатора С2 – 0,9. Вероятность приобретения С1 равна 0,6, а С2 – 0,4. Получен сигнал о неисправности сигнализатора. Что вероятнее: на объекте стоит сигнализатор С1 или С2?

2. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях из первой группы выделено 4 человека, из второй - 6, из третьей -5. Вероятность того, что студенты первой, второй и третьей группы попадут в сборную команду института, равны соответственно: 0,9; 0,7; 0,8. К какой из групп вероятнее всего будет принадлежать произвольно выбранный из сборной команды студент?

Практическое занятие № 5

Тема: Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли.

Цель: Научиться вычислять вероятности случайных событий в схеме Бернулли

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.

Контрольные вопросы:

1. В каких случаях применима формула Бернулли?
2. Когда удобнее применить формулу Пуассона?

Формула Бернулли

Применение формулы Бернулли возможно при следующей постановке задачи.

Пусть проводятся n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A. Известно, что вероятность появления A в одном испытании равна p, а вероятность непоявления A соответственно $q=1-p$. Необходимо определить вероятность того, что событие A произойдет ровно в k испытаниях из n.

Формула Бернулли позволяет найти вероятность того, что событие A произойдет ровно в k испытаниях из n.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$, (0)

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - количество сочетаний из n по k.

Если количество испытаний n достаточно велико (10^2 и выше), а вероятность появления A в одном испытании мала (10^{-2} и ниже), то применение формулы Бернулли связано со сложностями вычислительного характера. В этом случае удобнее применить формулу Пуассона, которая дает возможность более просто получить аналогичные результаты:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$, (1)

где $\lambda = n \cdot p$.

Применяя выражения (0) и (1), можно найти вероятности более сложных событий:

а) появление события A менее k раз в n испытаниях

$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1)$; (2)

б) появление события A более k раз в n испытаниях

$P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n(n)$; (3)

в) появление события A не менее k раз в n испытаниях

$P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n)$; (4)

г) появление события A не более k раз в n испытаниях

$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k)$. (5)

Решение типовых задач

I тип задач. *Условие задачи:* Система электроснабжения завода включает восемь однотипных агрегатов, каждый из которых находится в рабочем состоянии с вероятностью 0,9. Определить вероятность того, что:

1. все агрегаты находятся в рабочем состоянии;
2. вышло из строя менее 3 агрегатов;
3. в рабочем состоянии находятся не более 6 агрегатов;
4. вышло из строя не менее 2 агрегатов.

Решение

1) A - все агрегаты находятся *в рабочем состоянии*

$n = 8$; $k = 8$

$p = 0{,}9$; $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$;

$$P_8(8) = C_8^8 \cdot 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^0 = \frac{8!}{0!\,8!} \cdot 0{,}9^8 = 0{,}43$$.

Аналогичный результат можно получить, решая эту задачу от обратного, т.е. A - ни один агрегат *не вышел из строя*

$n = 8$; $k = 0$

$p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $q = 0{,}9$;

$$P_8(0) = C_8^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^8 = \frac{8!}{0!\,8!} \cdot 0{,}9^8 = 0{,}43$$.

Следует обратить внимание на то, что вероятность появления события в одном испытании p в формуле Бернулли зависит от того, какое событие анализируется. Так, в первом варианте решения $p = 0,9$ - это вероятность рабочего состояния, а во втором $p = 0,1$ - это вероятность выхода из строя.

2) A - *вышли из строя менее 3 агрегатов*, т.е. 0, 1, 2 агрегата.

Для вычисления вероятности используем формулу (2)

$n = 8$; $k = 0, 1, 2$;

$p = 0,1$; $q = 0,9$;

$$P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) = C_8^0 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^8 + C_8^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^7 + C_8^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^6 =$$
$$= 0,9^8 + \frac{8!}{1!\,7!} 0,1 \cdot 0,9^7 + \frac{8!}{2!\,6!} 0,1^2 \cdot 0,9^6 = 0,96.$$

3) A - в *рабочем состоянии* находятся *не более 6 агрегатов* (от 0 до 6).

$n = 8$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

$p = 0,9$; $q = 0,1$.

Для вычисления вероятности можно применить для вычисления формулу (5)

$P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6)$.

В этом случае требуется произвести достаточно сложные вычисления. Однако можно использовать более простой прием для решения задачи, если учесть, что

$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots.. + P_n(n) = 1$,

поскольку имеет место полная группа событий.

Тогда искомую вероятность можно определить следующим образом:

$$1 - [P_8(7) + P_8(8)] = 1 - \left[C_8^7 \cdot 0,9^7 \cdot 0,1^1 + C_8^8 \cdot 0,9^8 \cdot 0,1^0\right] = 1 - \left[8 \cdot 0,9^7 \cdot 0,1 + 0,9^8\right] = 0,187.$$

4) A - *вышли из строя не менее 3 агрегатов*.

$n = 8$; $k = 3,4.....8$;

$p = 0,1$; $q = 0,9$.

Вероятность события A может быть вычислена по формуле (4)

$P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8)$,

Используем рассмотренный выше прием, вычислим вероятность выхода из строя 0, 1, 2 агрегатов из 8, а затем определим искомую вероятность следующим образом:

$$1 - [P_8(0) + P_8(1) + P_8(2)] = 1 - \left[C_8^0 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^8 + C_8^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^7 + C_8^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^6\right] =$$
$$= 1 - \left[\frac{8!}{0!\,8!} \cdot 0,9^8 + \frac{8!}{1!\,7!} 0,1 \cdot 0,9^7 + \frac{8!}{2!\,6!} 0,1^2 \cdot 0,9^6\right] = 0,038.$$

II тип задач._*Условие задачи:* В цехе металлургического завода используется группа из 100 однотипных электродвигателей. Вероятность выхода из строя каждого электродвигателя равна 0,02. Определить вероятность того, что в рабочем состоянии находится не менее 98 электродвигателей цеха.

Решение

Для определения вероятности нахождения в рабочем состоянии не менее 98 электродвигателей можно использовать выражение (4)

$P_{100}(98) + P_{100}(99) + P_{100}(100)$,

где $n = 100$; $k = 98, 99, 100$;

$p = 0{,}98$; $q = 0{,}02$.

В этом случае требуется провести сложные вычисления. Значительно упростить решение можно, если перейти к определению вероятности выхода из строя 0, 1, 2 электродвигателей, что полностью соответствует нахождению в рабочем состоянии не менее 98 электродвигателей

$P_{100}(2) + P_{100}(1) + P_{100}(0)$,

где $n = 100$; $k = 0, 1, 2$;

$p = 0{,}02$; $q = 0{,}98$.

Поскольку n достаточно большое, а p - мало, удобнее использовать формулу Пуассона (1)

$\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}02 = 2;$

$$\frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^0}{0!}e^{-2} = e^{-2}(2+2+1) = 0{,}677.$$

Домашнее задание:

1. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом опыте равна 0,2.

Практическое занятие № 6

Тема: Решение типовых задач на вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли.

Цель: Научиться вычислять вероятности случайных событий в схеме Бернулли

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Решите задачи.

Решите задачи

Задача 1. В цехе имеется 6 моторов. Вероятность того, что мотор в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность, что в данный момент:

а) включено 4 мотора;

б) включены все моторы;

в) выключены все моторы.

Задача 2. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти испытаниях не менее двух раз, если вероятность появления его в каждом испытании равна 0,3.

Задача.3. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет:

а) менее двух раз;

б) не менее двух раз.

Задача 4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,9. Вероятность поражения цели при k попаданиях равна $1-q^k$. Найти вероятность того, что цель будет уничтожена, если сделано 2 выстрела.

Задача 5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что мишень при 100 выстрелах будет поражена:

а) не менее 70 и не более 80 раз;

б) не более 70 раз.

Домашнее задание:

1. Событие B появится в том случае, если событие A появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие B, если будет произведено 6 независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4.

Практическое занятие № 7

Тема: Решение задач на запись распределения ДСВ.

Цель: Научиться вычислять вероятности случайных событий

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие дискретной случайной величины, непрерывной случайной величины, ряда распределения, функции распределения.
2. Законы распределения случайных величин.
3. От чего зависит форма представления закона распределения.

Законы распределения дискретных случайных величин

Случайной называют величину, которая в результате опыта со случайным исходом принимает одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Все случайные величины (СВ) делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретной называют **случайную величину** (ДСВ), которая принимает отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями. В качестве примера можно привести величину X, равную количеству агрегатов энергосистемы, вышедших из строя, или Y, равную возможному количеству трансформаторов различной мощности, которые могут быть установлены в системе электроснабжения района.

Непрерывной называют **случайную величину** (НСВ), которая может принимать все возможные значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Например, значения напряжений, токов, потоков мощности по линиям электропередач, которые изменяются случайным образом за счет случайного изменения нагрузки в энергосистеме.

Биномиальное распределение

Такой закон распределения характерен для ДСВ $X = k$, где k - количество появлений события A в n независимых испытаниях. Известно, что вероятность появления A в одном испытании одинакова и равна p. Отсюда видно, что X может принимать значения от 0 до n, а вероятность каждого x_i вычисляется по формуле Бернулли.

$X = k$

0

1

2

…

n

$P_n(k)$

$P_n(0)$

$P_n(1)$

$P_n(2)$

…

$P_n(n)$

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

В практических расчетах биномиальное распределение часто соответствует ДСВ $Y = k$, где k - количество вышедших из строя (или находящихся в рабочем состоянии) агрегатов энергосистемы, цеха, отдельных блоков технического устройства. Когда n достаточно велико, а p мало, для описания ДСВ используется закон Пуассона. При этом вероятности появления x_i вычисляются по формуле Пуассона.

$X = k$

0

1

2

…

n

$P_n(k)$

$P_n(0)$

$P_n(1)$

$P_n(2)$

…

$P_n(n)$

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Геометрическое распределение соответствует ДСВ X, равной k - числу испытаний, которые необходимо произвести до появления события A, т.е. в $k-1$ испытаний A не появлялось. Вероятность появления A в каждом испытании равна p, не появления - q

X

1

2

3

…

k

P

p

$p \cdot q$

pq^2

…

pq^{k-1}

$P(X=k)=pq^{k-1}$

Гипергеометрическое распределение

Применяется при условии задачи, сводящемся к следующей постановке: в урне a - белых, b - черных шаров, из нее вынули n шаров. Найти вероятность того, что m шаров из n - белых. Таким образом, X - ДСВ, равная числу m белых шаров из n.

X

0

1

2

…

n

P

p_0

p_1

p_2

…

p_n

$$P_m=P(X=m)=\frac{C_a^m C_b^{n-m}}{C_{a+b}^n}$$

Решение типовой задачи

Техническое устройство состоит из трех функциональных блоков, каждый из которых выходит из строя с вероятностью 0,3. Дискретная СВ X - это количество блоков, вышедших из строя. Построить для ДСВ X ряд распределения, определить функцию распределения, построить график функции распределения.

Решение

а) Дискретная СВ X может принимать значения 0, 1, 2, 3.

Поскольку постановка задачи соответствует биномиальному закону, для вычисления вероятностей используем формулу Бернулли (1.21):

$P_3(0)=C_3^0\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^3=0{,}343;$

$P_3(1)=C_3^1\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^2=0{,}441;$

$P_3(2)=C_3^2\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^1=0{,}189;$

$P_3(3)=C_3^3\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^0=0{,}027.$

Для проверки правильности вычислений найдем, что $\sum_{i=1}^{n} P_i=1$

$P_3(0)+P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)=0{,}343+0{,}441+0{,}189+0{,}027=1.$

Ряд распределения ДСВ X имеет вид

X

0

1

2

3

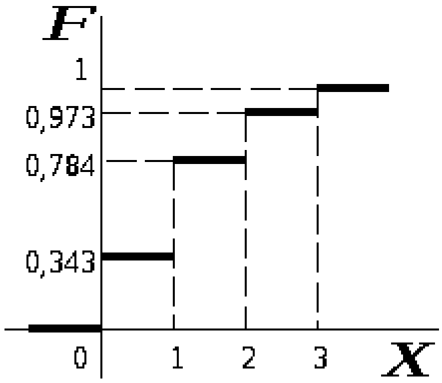
P

0,343
0,441
0,189
0,027

б) Используя (1.20), запишем функцию распределения $F(X)$ аналитически, а затем построим ее график

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ 0{,}343 & при \quad 0 < x \le 1 \\ 0{,}784 & при \quad 1 < x \le 2 \\ 0{,}973 & при \quad 2 < x \le 3 \\ 1 & при \quad x > 3 \end{cases}$$

График функции распределения ДСВ X :



Домашнее задание:

1.Составить закон распределения случайной величины X, возможные значения которой равны: $X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $P_1 = 0.4, P_2 = 0.15$

Практическое занятие № 8

Тема: График. Свойства числовых характеристик ДСВ Вычисление характеристик ДСВ. Вычисление (с помощью свойств) характеристик функций от ДСВ **Цель:** Научиться вычислять вероятности случайных событий

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие дискретной случайной величины, непрерывной случайной величины, ряда распределения, функции распределения.
2. Законы распределения случайных величин.
3. От чего зависит форма представления закона распределения.

Законы распределения дискретных случайных величин

Наиболее полной характеристикой любой случайной величины является закон распределения. Форма представления закона распределения зависит от вида случайной величины. Для ДСВ под законом распределения понимается соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями. При этом закон распределения ДСВ может быть задан следующим образом:

таблично – в виде **ряда распределения**

X

x_1

x_2

x_3

…

x_n

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

P

p_1

p_2

p_3

…

p_n

аналитически – в виде **явной функции** $P(X = x_i) = Y(x_i)$,

например, это может быть формула Бернулли

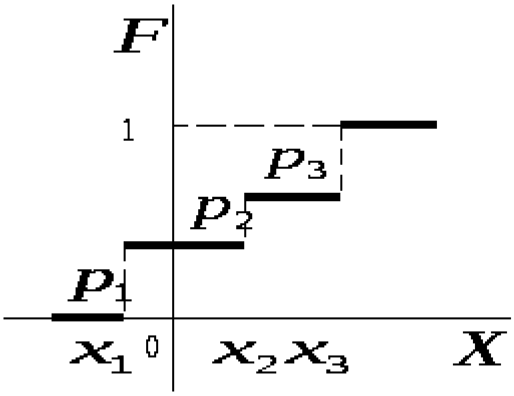
$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

с помощью **функции распределения** $F(x)$, которая является универсальной характеристикой закона распределения и не зависит от вида СВ

$F(x) = P(X < x);$

$F(-\infty) = 0;$

$F(+\infty) = 1.$



Для дискретных СВ функция распределения $F(x)$ – это неубывающая, разрывная ступенчатая функция, которая графически для ряда из трех значений имеет вид

X

x_1

x_2

x_3

P

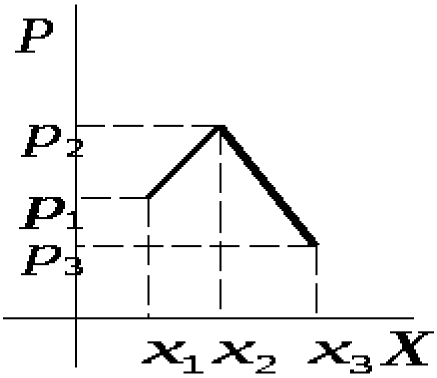
p_1

p_2

p_3

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$$

графически – в виде **многоугольника распределения**, который строится по точкам (x_i , p_i) в декартовой системе координат и для ряда из трех значений ДСВ может иметь вид



В качестве наиболее часто используемых в практических расчетах можно выделить следующие виды законов распределения для ДСВ.

Решите задачи:

1. Вероятность рождения в семье мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины *X* — числа мальчиков в семьях, имеющих четырех детей. Построить график распределения

вероятностей. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2. Вероятность того, что покупатель совершит покупку в магазине, 0,4. Составить закон распределения случайной величины *X*— числа покупателей, совершивших покупку, если магазин посетило 3 покупателя. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

3. В группе из 10 спортсменов 6 мастеров спорта. Отбирают (по схеме без возвращения) 3-х спортсменов. Составить закон распределения случайной величины *X*-числа мастеров спорта из отобранных спортсменов. Найти математическое ожидание случайной величины *X*.

Домашнее задание:

1. Игральная кость брошена три раза. Написать закон распределения числа появлений «шестерки».

Практическое занятие № 9

Тема: Формула Бернулли. Закон распределения случайной величины

Цель: Научиться применять формулу Бернулли.

Схема Бернулли - это когда производится n- повторные испытания при неизменных условиях их проведения. В ходе испытания фиксируется появление некоторого случайного события A, вероятность появления которого – P(A) не зависит от результатов предыдущих испытаний и остается неизменной (P(A)=const) приповторении опыта. Такие испытания называются независимыми, а схема проведения испытаний носит название схемы Бернулли. Вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A наступит ровно m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяющих условиям схемы Бернулли равна:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где :p=P(A)–вероятность наступления события A; и q=1-p.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может либо появится, либо не появится. Вероятность p появления события A во всех испытаниях постоянна и не изменяется от испытания к испытанию. Рассмотрим в качестве случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях. Формула, позволяющая найти вероятность появления события A ровно k раз в n испытаниях, как известно, описывается формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (6.1)$$

Распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли, называется биномиальным.

Этот закон назван "биномиальным" потому, что правую часть можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^{n-k} q^k + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Запишем биномиальный закон в виде таблицы

X	n	n–1	…	k	…	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	q^n

Найдем числовые характеристики этого распределения.

По определению математического ожидания для ДСВ имеем

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Запишем равенство, являющееся бином Ньютона

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

и продифференцируем его по p. В результате получим

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^{k-1} q^{n-k}.$$

Умножим левую и правую часть на p:

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} \equiv \mathrm{M}[\mathrm{X}].$$

Учитывая, что p+q=1, имеем

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}] = np. \quad (6.2)$$

Итак, математическое ожидание числа появлений событий в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний n на вероятность p появления события в каждом испытании.

Дисперсию вычислим по формуле

$$\mathrm{D}[\mathrm{X}] = \mathrm{M}[\mathrm{X}^2] - \mathrm{M}^2[\mathrm{X}].$$

Для этого найдем

$$\mathrm{M}[\mathrm{X}^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Предварительно продифференцируем формулу бинома Ньютона два раза по p:

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k p^{k-2} q^{n-k}$$

и умножим обе части равенства на p^2:

$$n(n-1)p^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} =$$
$$= M[X^2] - M[X] = M[X^2] - np.$$

находим

$$M[X^2] = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np.$$

Следовательно,

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = npq.$$

Итак, дисперсия биномиального распределения равна

$$D[X] = npq. \quad (6.3)$$

Данные результаты можно получить и из чисто качественных рассуждений. Общее число X появлений события A во всех испытаниях складываются из числа появлений события в отдельных испытаниях. Поэтому если X_1 – число появлений события в первом испытании, X_2 – во втором и т.д., то общее число появлений события A во всех испытаниях равно $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$. По свойству математического ожидания:

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n].$$

Каждое из слагаемых правой части равенства есть математическое ожидание числа событий в одном испытании, которое равно вероятности события. Таким образом,

$$M[X] = p + p + \ldots + p = np.$$

По свойству дисперсии:

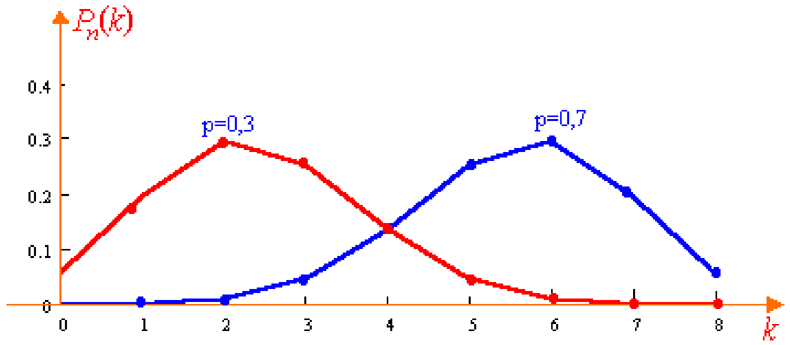
$$D[X] = D[X_1] + D[X_2] + \ldots + D[X_n].$$

Так как $D[X_i] = M[X_i^2] - M^2[X_i]$, а математическое ожидание случайной величины X_i^2, которое может принимать только два значения, а именно 1^2 с вероятностью p и 0^2 с вероятностью q, то $M[X_i^2] = p$. Таким образом, $D[X_i] = p - p^2 = pq$. В результате, получаем

$$D[X] = np + np + \ldots + np = npq.$$

Воспользовавшись понятием начальных и центральных моментов, можно получить формулы для асимметрии и эксцесса:

$$A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \quad E = \frac{1-6pq}{npq}. \quad (6.4)$$



Рисунок

Многоугольник биномиального распределения имеет следующий вид (см. рис. 6.1). Вероятность$P_n(k)$ сначала возрастает при увеличении k, достигает наибольшего значения и далее начинает убывать. Биномиальное распределение асимметрично, за исключением случая p=0,5. Отметим, что при большом числе испытаний n биномиальное распределение весьма близко к нормальному. (Обоснование этого предложения связано с локальной теоремой Муавра-Лапласа.)

Число m_0 наступлений события называется наивероятнейшим, если вероятность наступления события данное число раз в этой серии испытаний наибольшая (максимум в многоугольнике распределения). Для биномиального распределения

$$np - q \le m_0 \le np + p. \quad (6.5)$$

Замечание. Данное неравенство можно доказать, используя рекуррентную формулу для биномиальных вероятностей:

$$P_n(k+1) = \frac{p}{q}\frac{n-k}{1+k}P_n(k). \quad (6.6)$$

Пример . Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно математического ожидание и дисперсия, также наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

Решение. Поскольку p=0,31, q=0,69, n=75, то

$$M[X] = np = 75\cdot 0,31 = 23,25;\ D[X] = npq = 75\cdot 0,31\cdot 0,69 = 16,04.$$

Для нахождения наивероятнейшего числа m_0, составим двойное неравенство

$$0,75\cdot 0,31 - 0,69 \le m_0 \le 75\cdot 0,31 + 0,31 \quad \Rightarrow \quad 22,56 \le m_0 \le 23,56.$$

Отсюда следует, что $m_0 = 23$.

Практическое занятие № 10

Тема: Вычисление характеристик ДСВ. Вычисление (с помощью свойств) характеристик функций от ДСВ

Цель: Научиться вычислять характеристики ДСВ.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, MS Excel.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Вспомните методику вычисления характеристик ДСВ.
3. Законспектируйте глоссарий.
3. Вычислите числовые характеристики ДСВ предложенного ряда, проанализируйте смысл полученных числовых значений величин.
4. Используйте для громоздких расчетов характеристик ДСВ надстройку «Пакет анализа» приложения MS Excel

Контрольные вопросы:

1. Понятие дискретной случайной величины.
2. Характеристики ДСВ.

Глоссарий

№ п/п

Название

(характеристика ДСВ)

Алгоритм определения или формула вычисления

Содержательный смысл

1

Мощность ряда (счет)

Подсчет количества элементов

Количество элементов ряда

2

Минимум

Поиск минимального значения

Минимальное значение ряда

3

Максимум

Поиск максимального значения

Максимальное значение ряда

4

Размах (Интервал)

Вычислить разницу между максимальным и минимальным значениями

Разница между максимальным и минимальным значениями

5

Сумма

Суммировать все значения

Сумма всех значений

6

Мода

Поиск наиболее часто встречающееся значения

Наиболее часто встречающееся значение

7

Медиана

Поиск значения ряда, которое делит ранжированный ряд на две равные части

Значение ряда, которое делит ранжированный ряд на две равные части

8

Среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i$$

Среднее арифметическое вариационного ряда

9

Дисперсия

$$D(X) = M\left\{\left[X - M(X)\right]^2\right\}.$$

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D$$

Характеризуют степень разброса всех значений вариационного ряда относительно среднего значения

10

Среднеквадратическое отклонение (Стандартное отклонение)

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

$$s_n = \sqrt{s_n^2}$$

11

Стандартная ошибка

«Пакет анализа» приложения MS Excel

Оценка среднеквадратичного отклонения выборочного среднего

12

Асимметричность

«Пакет анализа» приложения MS Excel

Выборочный коэффициент асимметрии

Эксцесс

«Пакет анализа» приложения MS Excel

Выборочный коэффициент эксцесса

Числовые характеристики ДСВ ряда

ряд - 1
ряд - 2
ряд - 3
ряд - 4
ряд - 5

Вычисление характеристик ДСВ с использованием надстройки «Пакет анализа» приложения MS Excel.

1. Используя технологическую карту вычислите характеристики ДСВ.

Технологическая карта

Сервис – надстройки – пакет анализа – анализ данных – описательная статистика: входной интервал – по столбцу – выходной интервал – итоговая статистика – уровень надежности

2. Сравните полученные значения с эталоном, сделайте выводы.

Эталон.

ряд - 1

ряд - 2

ряд - 3

ряд - 4

Среднее	3,5
Среднее	3,5
Среднее	3,5
Среднее	3,5
Стандартная ошибка	0,269
Стандартная ошибка	0,342
Стандартная ошибка	0,401
Стандартная ошибка	0,619
Медиана	3,5
Медиана	3,5
Медиана	3,5
Медиана	5

Мода	4
Мода	4
Мода	5
Мода	5
Стандартное отклонение	0,85
Стандартное отклонение	1,08
Стандартное отклонение	1,269
Стандартное отклонение	1,958
Дисперсия выборки	0,722
Дисперсия выборки	1,167
Дисперсия выборки	1,611
Дисперсия выборки	3,833
Эксцесс	0,1
Эксцесс	-1,0
Эксцесс	-1,7
Эксцесс	-2,1
Асимметричность	0
Асимметричность	0
Асимметричность	-0
Асимметричность	-0,56
Интервал	3
Интервал	3
Интервал	3
Интервал	4
Минимум	2
Минимум	2
Минимум	2
Минимум	1
Максимум	5
Максимум	5

Максимум	5
Максимум	5
Сумма	35
Сумма	35
Сумма	35
Сумма	35
Счет	10
Счет	10
Счет	10
Счет	10
Уровень надежности	0,608
Уровень надежности	0,773
Уровень надежности	0,908
Уровень надежности	1,401

Домашнее задание: Проанализировать вариационный ряд

Практическое занятие № 11

Тема: Решение задач на формулу геометрического определения вероятности.

Цель: Научиться вычислять вероятности (для одномерного случая, для двумерного случая, для простейших функций от двух независимых равномерно распределённых величин)

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите решение типовой задачи.
2. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1.Понятие биномиального распределения, Понятие биномиального распределения. Понятие геометрического распределения, характеристики геометрического распределения.

2.Понятие биномиального распределения, характеристики биномиального распределения.

3. Понятие геометрического распределения, характеристики геометрического распределения.

Решение типовой задачи

Каждый пятый билет лотереи – выигрышный. Какова вероятность того, что из 10 приобретённых билетов два билета окажутся выигрышными?

Решение

Проверяется 10 билетов, т.е. проводится 10 независимых испытаний. Вероятность выигрыша в каждом испытании p = 1 / 5 = 0,2 , тогда q = 0,8 . Искомую вероятность находим по формуле Бернулли, пологая n = 10, m = 2.

$$P_{10}(2) = C_{10}^{\ 2} \cdot p^2 \cdot q^8 = 36 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^8 \approx 0{,}242.$$

Решите задачи:

1. Тридцать восемь студентов колледжа сдали экзамен по статистике на отличные и хорошие отметки. Чему равна вероятность того, что в случайной выборке из 100 студентов по крайней мере 30 окажутся с хорошими и отличными оценками по статистике?

2. Вероятность изготовления продукции высшего качества фирмой составляет 0,9. Сколько необходимо обследовать единиц продукции, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было утверждать, что доля продукции высшего качества по выборке будет отклоняться от постоянной вероятности по модулю не более чем на 0,03?

3. Тридцать восемь студентов колледжа сдали экзамен по статистике на отличные и хорошие отметки. Чему равна вероятность того, что в случайной выборке из 100 студентов по крайней мере 30 окажутся с хорошими и отличными оценками по статистике?

Домашнее задание: составьте алгоритм любой из задач по теме.

Практическое занятие № 12

Тема: Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения

Цель: Научиться вычислять вероятности и характеристики НСВ.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие НСВ.
2. Понятие равномерно распределённой НСВ.

Непрерывной называют **случайную величину**, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Законом распределения (или интегральной функцией распределения) **непрерывной случайной величины** X называется функция F(x), равная вероятности того, что X приняла значение меньше X:

$$F(x) = P(X < x).$$

Плотностью распределения (или дифференциальной функцией распределения) **непрерывной случайной величины** X называется функция f(x), равная производной интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

В частности, вероятность попадания случайной величины в интервал (a ; b) равна:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Математическое ожидание M(X) и **дисперсия D(X)** непрерывной случайной величины определяются через несобственные интегралы:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2 f(x)dx.$$

Все свойства дисперсии и математического ожидания, установленные для ДСВ, сохраняются для НСВ.

Замечание: Если распределение симметрично, то его мода, медиана и математическое ожидание совпадают.

Решите задачи

1. Случайная величина Х задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le -2 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} & при -2 < x \le 2 \\ 1 & при\ x > 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X* примет значение: а) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1; г) заключенное в интервале (0;2).

2. Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 1 \\ \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{1}{8} & при\ 1 < x \le 3 \\ 1 & при\ x > 3 \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины *X;* в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2).

3. Случайная величина Х задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le A \\ \dfrac{x^3}{4} & при\ A < x \le B \\ 1 & при\ x > B \end{cases}$$

Найти значения *A и B,* математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

4. Случайная величина *X* задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 1 \\ \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x}{2} & при\ 1 < x \le 2 \\ 1 & при\ x > 2 \end{cases}.$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина *X* хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1;1,5); в) начертить графики функций.

Домашнее задание: составьте алгоритм решения задачи и решите ее.

Случайная величина *X* задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 2\\ \dfrac{x^3-8}{19} & при\ 2<x\le 3\\ 1 & при\ x>3\end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (2,5; 3); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X;* г) моду и медиану величины *X*. Построить графики функций.

Практическое занятие № 13

Тема: Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью интегральной функции распределения.

Цель: Научиться вычислять вероятности для нормально распределенной величины

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Раскройте понятие функции плотности нормально распределенной НСВ, смысл параметров а и σ нормального распределения.
2. Раскройте понятие интегральной функции распределения нормально распределенной НСВ
3. Возможно ли нахождение суммы нескольких независимых нормально распределенных НСВ.

Нормальный закон распределения (рис. 1) играет исключительную роль в теории вероятностей. Это наиболее часто встречающийся закон распределения, главной особенностью которого – то, что он является предельным законом, к которому, при определенных условиях, приближаются другие законы распределения.

Дифференциальная функция нормального закона имеет вид (рис. 1):

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Числовые характеристики нормального закона:

1. математическое ожидание характеризует центр распределения:

$$\mathrm{M\,(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\cdot f\ (\mathrm{x})d\mathrm{x} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2})d\mathrm{x} = \mathrm{a},\ \text{где}\ e^{ч} = \exp\,(\mathrm{x});$$

2. дисперсия характеризует форму распределения:

$$\mathrm{D(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx - (\mathrm{M(X)})^2 = \sigma^2.$$

Свойства дифференциальной функции нормального закона:

1. область определения: $D_f = R;$
2. ось 0X – горизонтальная асимптота;
3. $x = a \pm \sigma$ - две точки перегиба;
4. максимум в точке с координатами: $(a; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}});$
5. график симметричен относительно прямой x=a;
6. моменты:

$$\mu_1 = \mu_3 = ... = \mu_{2к+1} = ... = 0,$$

$$\mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3\sigma^4,$$

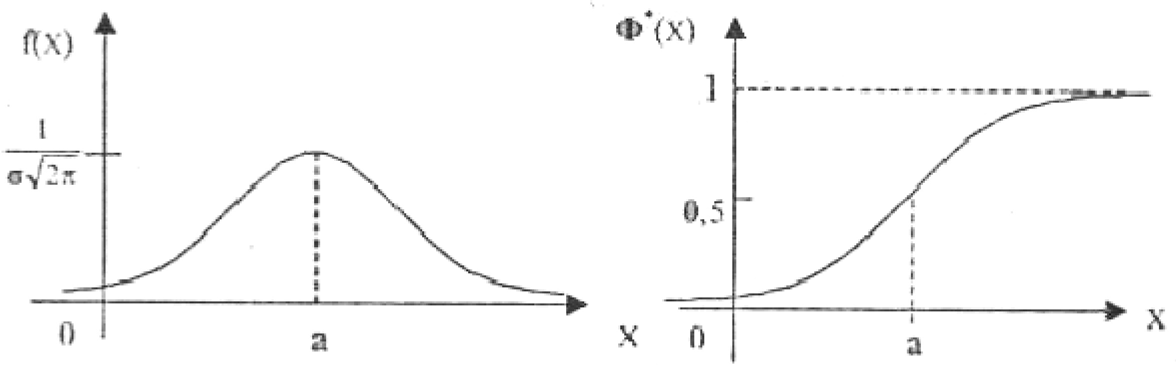
$$Sk = \frac{\mu^3}{\sigma^3} = 0, Ex = \frac{\mu_4}{\sigma_4} - 3 = 0;$$

7. вероятность попадания нормального распределенной случайной величины в заданный интервал определяется, по свойству интегральной функции:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$\text{где } \Phi^*(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2})dt -$$

интегральная функция нормального закона (рис.14); Φ(x) – функция Лапласа.



Дифференциальная функция Интегральная функция

Рис. 1. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения (закон Гаусса):

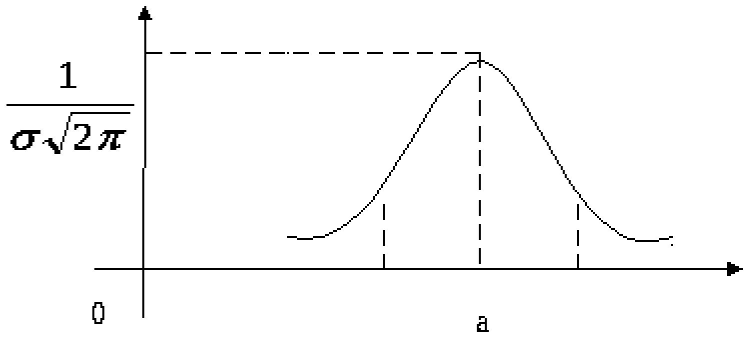
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где M(x) = a, D(x) = σ^2.

В частности, для нормального закона распределения случайной величины X, вероятность попадания в заданный интервал выражается через функцию Лапласа:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}).$$

Кривая Гаусса имеет вид:



x

y

a+σ

a-σ

Решение типовой задачи

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами, a = 30 и σ = 10. Записать плотность распределения вероятностей и найти вероятность того, что X примет значения из σ - интервала (20 ; 40).

<u>Решение.</u> Плотность распределения вероятностей нормально распределённой случайной величины X с заданными параметрами имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-30)^2}{200}},$$

Найдём вероятность того, что случайная величина X отклонится от математического ожидания a на величину меньше чем σ.

$$P(a - \sigma < X < a + \sigma) = \Phi(\frac{a + \sigma - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \sigma - a}{\sigma}) = 2 \cdot \Phi(1) \approx 0{,}683.$$

Решите задачи

1. Случайная величина *X* равномерно распределена в интервале (-2;N). Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б) интегральную функцию; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1; \frac{N}{2})$ математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале: а) (5; 11); б) (-3; 5). Начертить графики этих функций.

3. Равномерно распределенная случайная величина *X* задана плотностью распределения *f(x)*= 0,125 в интервале (a-4; a+4), вне него *f(x)* = 0. Найти *M(X), Д(X),* σ *(X).*

Домашнее задание: составьте алгоритм решения любой из задач по теме.

Практическое занятие № 14

Тема: Вычисление вероятностей для нормально распределенной величины (или суммы нескольких нормально-распределенных величин).

Цель: Научиться вычислять вероятности для нормально распределенной величины

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Задача 1. Автоматический токарный станок настроен на выпуск деталей со средним диаметром 2.00 см и со средним квадратическим отклонением 0.005 см. Действует нормальный закон распределения. Компания технического сервиса рекомендует остановить станок для технического обслуживания и корректировки в случае, если образцы деталей, которые он производит, имеют средний диаметр более 2.01 см, либо менее 1.99 см.
1) Найти вероятность остановки станка, если он настроен по инструкции на 2.00 см.
2) Если станок начнет производить детали, которые в среднем имеют слишком большой диаметр, а именно, 2.02 см, какова вероятность того, что станок будет продолжать работать?

Задача 2. Рост мальчиков возрастной группы 15 лет есть нормально распределённая случайная величина XX с параметрами a=161a=161 см и σ=4σ=4 см.
1) Найти функцию плотности вероятности случайной величины XX и построить её график.
2) Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы.
3) Сформулировать правило трёх сигм для случайной величины XX.

Задача 3. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 1,06 кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент коробок, масса которых превышает 940 г?

Задача 4. В нормально распределенной совокупности 15% значений x меньше 12 и 40% значений x больше 16.2. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

Задача 5. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 870 тонн и стандартным отклонением 90 тонн.
а) Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты по крайней мере 900 тонн угля.
б) Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 860 до 940 тонн угля.
в) Найдите вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 750 тонн.

Задача 6. Станок изготовляет шарики для подшипников. Шарик считается годным, если отклонение XX диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,5 мм. Считая, что случайная величина XX распределена нормально со средним квадратическим отклонением σ=0,25σ=0,25 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Практическое занятие № 15

Тема: Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для показательно распределенной величины.

Цель: Научиться вычислять вероятности для нормально распределенной величины

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.

3. Решите задачи.

Показательным или экспоненциальным называют распределение, которое характеризуется следующей функцией плотности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x\ge 0\end{cases}$$, где $\lambda>0$

Убедимся в том, что перед нами не «подделка». Поскольку $f(x)\ge 0$ и несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\lambda\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=0-\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}d(-\lambda x)=-\lim_{b\to+\infty}(e^{-\lambda x})\Big|_0^b=-\lim_{b\to+\infty}(e^{-\lambda b}{\to 0}-e^0)=-(0-1)=1$$

, то функция $f(x)$ действительно задаёт закон распределения НСВ.

Большим достоинством показательного распределения является тот факт, что оно определяется всего лишь одним параметром. Всего лишь одним, Карл! …нет, лучше, конечно, вообще отсутствие параметров, но дальше их количество будет только возрастать =)

Как-то так получилось, что во всех примерах статьи о равномерном распределении мы начинали с функции $f(x)$, и поэтому для разнообразия зайдём в лес с другой стороны:

Задача

Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1+Ae^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Требуется:

1) определить коэффициент A;
2) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
3) схематично построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
4) вычислить математическое ожидание и дисперсию X;
5) определить вероятность того, что X примет значение из интервала $(2;+\infty)$.

Одним словом, обычная задача на НСВ ~~бессмысленная и беспощадная~~.

Решаем:

1) В силу непрерывности функции распределения:
$F(0)=1+A\cdot e^0=1+A=0 \quad\Rightarrow\quad A=-1$ – при этом и только при этом значении предложенная функция задаёт закон распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Пока, кстати, мы не знаем, что это за закон, ведь вверху я привёл другое определение.

2) Найдём функцию плотности распределения:

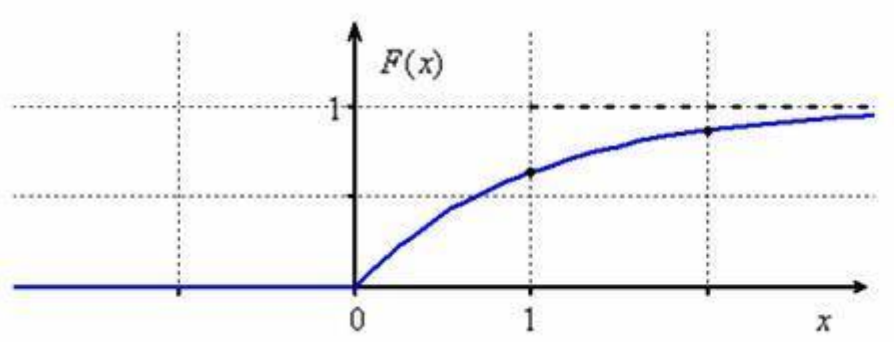
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

надеюсь, все в ладах с производной сложной функции: $(1-e^{-x})' = 0 - e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x}$.

Ну вот, теперь избушка повернулась к нам передом, а к лесу задом. Поскольку данная функция имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$, то случайная величина X распределена показательно. Даже образцово-показательно, т.к. значение $\lambda = 1$ наиболее приятно.

3) Условие допускает схематическое построение графиков, но зачем занижать планку? Даже при их ручном построении не составляет никакого труда найти пару дополнительных точек и проявить маломальскую аккуратность.

Вычислим пару значений $F(1) = 1 - e^{-1} \approx 1 - 0{,}37 = 0{,}63$, $F(2) = 1 - e^{-2} \approx 1 - 0{,}14 = 0{,}86$ и простенький предел $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-x} {}_{\to 0}) = 1$. Таким образом, прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой для графика $F(x)$ при $x \to +\infty$:



Показательное распределение нашло широкое применение в прикладных задачах, и пока чертёж «не уехал вверх» я приведу конкретный пример. Пусть переменная «икс» обозначает время и в момент времени $x = 0$ начинает эксплуатироваться некий прибор, например, обычная лампочка. Случайная величина X – время работы лампочки до перегорания. Тогда функция $F(x) = P(X < x)$ описывает вероятность того, что лампочка проработает МЕНЬШЕ, чем прошедшее время x. И по понятным причинам при увеличении x эта вероятность стремится к единице, что хорошо иллюстрирует вышеприведённый график.

Практическое занятие № 16

Тема: Центральная предельная теорема. Закон больших чисел. Вероятность и частота.

Цель: Научиться решать задачи на понятие частоты события, статистическое понимание вероятности

Центральная предельная теорема. Если случайная величина X представляет, собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному распределению.

Пример. Пусть производится измерение некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат измерения влияют очень многие независимые случайные факторы (температура, колебания прибора, влажность и др.). Каждый из этих факторов порождает ничтожную "частную ошибку". Однако, поскольку число этих факторов очень велико, их совокупное действие порождает уже заметную «суммарную ошибку».

Рассматривая суммарную ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых частных ошибок, мы вправе заключить, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному распределению. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

Рассмотрим условия, при которых выполняется "центральная предельная теорема"

Пусть:

X1, X2, ...,Xn – последовательность независимых случайных величин,

M(X1), M(X2), ...,M(Xn) - конечные математические ожидания этих величин, соответственно равные *M(Xk)= ak*

D*(X1), D(X2), ..., D(Xn)* - конечные дисперсии их, соответственно равные *D(X k)=bk2*

Введем обозначения: S= X1+X2 + ...+Xn;

A k= X1+X2 + ...+Xn= $\sum_{k=1}^{n} a_k$; B2= D*(X1)+ D(X2)+ ...+ D(Xn)* = $\sum_{k=1}^{n} b_k^2$

Запишем функцию распределения нормированной суммы:

Fn(x) = $P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right)$

Говорят, что к последовательности *X1, X2, ...,Xn* применима центральная предельная теорема, если при любом *x* функция распределения нормированной суммы при n ® ¥ стремится к нормальной функции распределения:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Замечание. Полученная функция отличается от интегральной приближенной функции Лапласа только лишь пределами интегрирования, где находятся от *0* до *x*

В частности если все случайные величины *X1, X2, ...,Xn одинаково распределены* и *дисперсии всех этих величин конечные и не равные нулю*, то к этой последовательности применима центральная предельная теорема.

2. Закон больших чисел, вероятность и частота.

Как известно, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. Казалось бы, поскольку о каждой случайной величине мы располагаем в этом смысле весьма скромными сведениями, то вряд ли можно установить закономерности поведения и суммы достаточно большого числа случайных величин. На самом деле это не так. Оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (имеются и другие теоремы, которые здесь не рассматриваются).

Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли - простейшим.

Практическое занятие № 17

Тема: Решение задач на понятие частоты события, статистическое понимание вероятности

Цель: Научиться решать задачи на понятие частоты события, статистическое понимание вероятности

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Относительной частотой события A называют отношение числа испытаний m, в которых данное событие появилось, к общему числу n фактически проведённых испытаний:

$W(A)=\frac{m}{n}$, или короче: $\omega=\frac{m}{n}$

Относительная частота наряду с ***вероятностью*** является одним из ключевых понятий тервера, но если **классическое** либо **геометрическое определение вероятности** не требуют проведения испытаний, то относительная частота рассчитывается исключительно ПОСЛЕ опытов на основе фактически полученных данных.

В том случае, если серии испытаний проводятся в неизменных условиях, то относительная частота обнаруживает свойство ***устойчивости***, то есть колеблется около определённого значения.

Пусть некий профессиональный стрелок произвёл 100 выстрелов по мишени и попал 83 раза. Тогда относительная частота поражения цели составит: $\omega=\frac{83}{100}=0{,}83$.

Предположим, что тот же самый стрелок в точно такой же «форме» и в приблизительно таких же условиях снова провёл серию из 100 выстрелов. Вероятно ли, что он снова попадёт 83 раза? Не очень. Но количество попаданий вряд ли будет сильно отличаться от предыдущего результата. Пусть, например, стрелок попал 79 раз. Тогда относительная частота поражения цели составит: $\omega=\frac{79}{100}=0{,}79$.

В третьей серии из 100 выстрелов, проведённой при похожих обстоятельствах, данный стрелок попал 81 раз, $\omega=\frac{81}{100}=0{,}81$ и т.д.

Иногда могут случаться блестящие серии более 90 попаданий, иногда «провалы», но среднее количество попаданий будет варьироваться около 80. И когда количество фактически проведённых испытаний станет достаточно большим, то речь зайдёт о ***статистической вероятности***. Если в одинаковых (примерно одинаковых) условиях проведено достаточно много испытаний, то за ***статистическую вероятность события*** принимают относительную частоту данного события либо близкое число.

Предположим, что на протяжении нескольких лет наш спортсмен, сохраняя стабильный уровень подготовки, совершил 10000 выстрелов и попал 8037 раз. Относительная частота поражения цели составит: $\omega=\frac{8037}{10000}=0{,}8037$ и за статистическую вероятность его результативности целесообразно принять $p=0{,}8$, которая становится теоретической оценкой, например, перед грядущими соревнованиями.

Представьте, что во время лекции этот профессионал зашёл с винтовкой аудиторию и прицелился. Теперь вам должен стать окончательно понятен смысл фразы *«Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8»* =) =)

Именно так собирается богатая спортивная статистика в различных видах спорта.

Аналогичная история с утверждением *«Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке равна 0,05»*. Эту оценку невозможно получить с помощью **классического определения вероятности** – она следует только из практики! Если на станке произведены десятки тысяч деталей и на каждую, скажем, тысячу выпущенных деталей, приходится в среднем 50 бракованных, то в качестве статистической вероятности брака принимается значения $p = 0{,}05$.

В Задаче 2 урока **Локальная и интегральная теоремы Лапласа** фигурировала вероятность рождения мальчика $p = 0{,}52$. Откуда взялось данное число? Из многолетнего подсчёта фактически рождённых детей в определённом регионе. В указанной статье мы выяснили, что это вовсе не значит, что среди 100 новорожденных будет ровно 52 мальчика. В следующей сотне рождённых их может оказаться, например, 45, и относительная частота $\omega = \frac{45}{100} = 0{,}45$ будет далека от истины. Но если рассмотреть выборку в тысячи и десятки тысяч младенцев, то ω отклонится от $p = 0{,}52$ совсем-совсем незначительно. **И это уже не случайность**. Как известно, такое соотношение новорожденных сложилось эволюционно – по причине бОльшей смертности мужчин.

В учебном пособии *В.Е. Гмурмана* есть весьма удачный пример, в котором продемонстрировано, как при подбрасывании монеты относительная частота появления орла приближается к своей вероятности $p = \frac{1}{2}$ *(полученной по* ***классическому определению****)*:

Количество бросков монеты, n	Число появлений орла, m	Относительная частота, $\omega = \frac{m}{n}$
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Какой можно сделать вывод? С увеличением количества независимых испытаний **случайность превращается в закономерность**. Однако следует помнить, что порядок выпадения орлов непредсказуем, о чём я подробно рассказывал на уроке **Независимые испытания и формула Бернулли**.

Вернёмся к европейской рулетке с 18 красными, 18 чёрными секторами и 1 зеро. В самом примитивном варианте игры: ставим на «красное» или «чёрное», и если шарик остановился на секторе другого цвета (вероятность $q = \frac{19}{37} \approx 0{,}5135$) – ставка проигрывается. В случае успеха – удваиваемся (вероятность $p = \frac{18}{37} \approx 0{,}4865$).

В отдельно взятом сеансе игры отдельно взятый человек может выиграть, причём выиграть по-крупному. **Это случайность**. Но, совершая миллионы оборотов, рулетка на протяжении веков приносит неизменную прибыль владельцам казино. И это – **закономерность**. Существует байка о том, что крупный выигрыш не отдадут, а если и отдадут, то «вы с ним не дойдёте до дома». Чистая «киношная» фантазия. Кому-то повезло, но сколько проиграется?! К тому же человек, посещающий подобные заведения, с большой вероятностью придёт снова и «сольёт ещё больше» =) А чтобы он вернулся, казино, скорее наоборот – создаст максимальный комфорт и безопасность для «счастливчика».

Другой, во многом условный, пример: пусть в некой лотерее приняло участие $n = 629911$ билетов, из которых $m = 192833$ выиграли хоть какой-то приз. Таким образом, относительная частота выигрыша составила: $\omega = \frac{192833}{629911} \approx 0{,}306127$. Поскольку билетов продано очень много, то с большой вероятностью можно утверждать, что в будущем при сопоставимых объемах продаж доля выигравших билетов будет примерно такой же, и за статистическую вероятность выигрыша удобно принять значение $p = 0{,}3$.

Организатор лотереи знает, что из миллиона проданных билетов выиграют около 300 тысяч с небольшим отклонением. **И это закономерность**. Но всем участникам лотереи достаётся…. – правильно, **случайность**! То есть, если вы купите 10 билетов, то это ещё не значит, что выиграют 3 билета. Так, например, по **формуле Бернулли** нетрудно подсчитать, что выигрыш только по одному билету из десяти – есть событие вполне вероятное:

$$P_{10}^{1} = C_{10}^{1} \cdot (0{,}3)^{1} \cdot (0{,}7)^{9} = 10 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7)^{9} \approx 0{,}12$$

А если учесть тот факт, что ошеломительная доля выигрышей – ~~не~~приятная мелочь, то картина вырисовывается довольно унылая, ибо маловозможные события не происходят. Ситуацию спасают красочные телевизионные розыгрыши и различные психологические трюки.

Желающие могут самостоятельно исследовать вероятность выигрыша в различные лотереи – вся статистика есть в свободном доступе

Решите задачи

Задача 1: ***Решение****: используем формулу* $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$.

В данной задаче: $n = 800; \quad p = 0{,}6; \quad q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

а) Если $\varepsilon = 0{,}05$*, то:*

$$P\left(\left|\frac{m}{800} - 0{,}6\right| \le 0{,}05\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot \sqrt{800}}{\sqrt{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \approx 2\Phi(2{,}89) \approx 2 \cdot 0{,}4981 = 0{,}9961$$

– вероятность, того, что при 800 испытаниях относительная частота появления события A *отклонится от вероятности данного события не более чем на 0,05.*

Это событие является практически достоверным.

б) Если $\varepsilon = 0{,}03$*, то:*

$$P\left(\left|\frac{m}{800} - 0{,}6\right| \le 0{,}03\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}03 \cdot \sqrt{800}}{\sqrt{0{,}6 \cdot 0{,}4}}\right) \approx 2\Phi(1{,}73) \approx 2 \cdot 0{,}4582 = 0{,}9164$$

– вероятность, того, что при 800 испытаниях относительная частота появления события A *отклонится от вероятности данного события не более чем на 0,03.*

***Ответ**:* а) $\approx 0{,}9961$; б) $\approx 0{,}9164$

Задача 2: ***Решение****: используем формулу* $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$.

В данной задаче: $n = 600000$; $p = 0{,}3$; $q = 1 - p = 0{,}7$; $\varepsilon = 0{,}001$

Таким образом:

$$P\left(\left|\frac{m}{600000} - 0{,}3\right| \le 0{,}001\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}001 \cdot \sqrt{600000}}{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}\right) \approx 2\Phi(1{,}69) \approx 2 \cdot 0{,}4545 = 0{,}909$$

– вероятность, того, что относительная частота выигрыша отклонится от теоретической вероятности не более чем на 0,001.

***Ответ**:* $\approx 0{,}909$

Задача 3: ***Решение****: используем формулу* $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \gamma$.

В данном случае: $p = 0{,}4$; $q = 1 - p = 0{,}6$; $\varepsilon = 0{,}05$; $\gamma = 0{,}9$

Таким образом:

$$2\Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}}\right) > 0{,}9$$

$$\Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}}\right) > 0{,}45$$

$$\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}} > 1{,}64$$

$$\left(\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}}\right)^2 > (1{,}64)^2$$

$$\frac{0{,}0025n}{0{,}24} > 2{,}6896$$

$$n > 2{,}6896 \cdot \frac{0{,}24}{0{,}0025}$$

$$n > 258{,}2$$

***Ответ**: необходимо произвести не менее 259 опытов.*

Домашнее задание: составьте алгоритм решения любой из задач по теме.

Практическое занятие № 18

Тема: Расчёт коэффициента корреляции.

Цель: Научиться вычислять коэффициент корреляции, проводить анализ значимости коэффициента корреляции.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.

2. Законспектируйте виды корреляции, шкалу Шедока.

3. Используя табличные данные и пакет анализа, найдите возможную корреляционную связь.

Контрольные вопросы:

1. Понятие корреляции.
2. Приведите классификацию степени корреляционной связи.

Корреляция

В математике зависимость между двумя величинами X и Y выражается с помощью функции y=f(x), где каждому возможному значению X ставится в соответствие не более одного значения Y (подобная зависимость называется функциональной).

Важным частным случаем стохастической зависимости является корреляционная. Корреляционная зависимость между переменными величинами – это та функциональная зависимость, которая существует между значениями одной из них и групповыми средними другой. (Корреляционные зависимости Y на X и X на Y обычно не совпадают). Корреляционная связь чаще всего характеризуется выборочным коэффициентом корреляции r, который характеризует степень линейной функциональной зависимости между СВ X и Y. Для двух СВ X и Y коэффициент корреляции имеет следующие свойства:

1. $-1 \le r \le 1$;

2. если r=± 1, то между СВ X и Y существует функциональная линейная зависимость;

3. если r=0, то СВ X и Y некоррелированны, что не означает независимости вообще;

4. если X и Y образуют систему нормально зависимых СВ, то из их некоррелированности следует независимость;

5. коэффициенты корреляции Y на X и X на Y совпадают.

Статистическую зависимость называют корреляционной, если при изменении значений одной величины меняется среднее значение другой.

Виды корреляций:

1. относительно характера корреляции:

- положительная (равнонаправленная, прямая);

- отрицательная (обратная);

2. относительно числа переменных:

- простая или парная;

- множественная, с ее помощью можно охватить весь причинно-следственный комплекс;

- частная корреляция, корреляция между двумя переменными при фиксированном влиянии других (вскрывается внутренняя структура соотношений, т.е. элиминируется влияние других факторов);

3. относительно формы связи:

- линейная;
- нелинейная;

4. относительно типа связи явлений:

- непосредственная корреляция;
- косвенная корреляция;
- ложная корреляция.

Различают корреляцию, обусловленную:

- причинной зависимостью X от Y;
- зависимостью X и Y от третьей величины;
- неоднородностью выборки;
- формально (числовыми данными).

Обычно степень тесноты связи между результативным и факторным признаком определяется по величине коэффициента корреляции (шкала Шедока):

если $r < 0{,}2$ – связи нет;

если $0{,}2 \leq r < 0{,}5$ – слабая связь;

если $0{,}5 \leq r < 0{,}75$ – связь средняя;

если $0{,}75 \leq r < 0{,}95$ – связь тесная;

если $0{,}95 \leq r < 1$ – связь очень тесная.

Практическое занятие № 19

Тема: Анализ значимости коэффициента корреляции.

Цель: Научиться вычислять коэффициент корреляции, проводить анализ значимости коэффициента корреляции.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте виды корреляции, шкалу Шедока.
3. Используя табличные данные и пакет анализа, найдите возможную корреляционную связь.

№ п.п

Физические упражнения; Пульс, ударов/минуту

Пол, 0-м; 1-ж.

Возраст, лет

0	*1*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	32	17	16	20	48	17	27	24	35	17	16
20	68	*2*	*6*	*7*	*10*	*11*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
30	70	73	67	87	54	75	62	65	60	84	94
40	79	100	108	99	60	90	98	67	62	94	98
50	80	101	125	102	120	100	105	70	65	120	110
60	105	106	130	112	140	105	125	75	67	156	125
70		105		115	148	120	136	78	70	176	138
80		104		123	200	140	147				

		100 103 81 0 18 *3* 86 94 98 99 101 105 107 111 117 0 20 *4* 84 88 110 120 134		148 143 145 0 20 *9* 90 92 125 190 198 220		150 165 180 0 37 *14* 98 108 128 148					

Домашнее задание: Составить алгоритм вычисления корреляционной связи.

Практическое занятие № 20

Тема: Метод наименьших квадратов

Цель: Научиться выделять корреляционную связь величин, проводить корреляционный и регрессионный анализ, составлять линейную модель регрессии.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие корреляционной и регрессионной связи.
2. Приведите классификацию степени корреляционной связи.
3. Понятия функциональной связи, статистической зависимости.
4. В чем заключаются задачи корреляционного и регрессионного анализа.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X полученное по результатам выборки имеет вид линейного приближения $\overline{y}_x$ от x

$$\bar{y}_x - \bar{y}_B = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}_B),$$

где r_B – выборочный коэффициент корреляции, равный

$$r_B = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}_B \bar{y}_B}{n\sigma_x \sigma_y}.$$

Если $|r_B| \cdot \sqrt{n-1} \geq 3$, то связь между случайными величинами достаточно вероятна.

Остаточной дисперсией называют величину

$$\sigma_{ocm} = (1 - r^2{}_B)$$

Решение типовой задачи

Данные к задаче см. практическое занятие №12

Найти реализацию уравнения линейной регрессии Y на X. Если связь признаков Y и X достаточно вероятна, то оценить, на сколько в среднем рождение ребёнка сказывается на величине дохода в расчёте на одного члена семьи.

Вычислим среднее квадратическое отклонение выборки X: $\sigma_x = \sqrt{D_{BX}} \approx 0{,}88.$

Вычислим коэффициент корреляции:

$$r_B = \frac{0 + 2\cdot 7 + 6\cdot 15 + 10\cdot 13 + 14\cdot 5 + 18 + 2\cdot 2\cdot 7 + 2\cdot 6\cdot 11 + 2\cdot 10\cdot 8 + 2\cdot 14\cdot 6 + 3\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 6\cdot 5 + 3\cdot 10\cdot 2 - 100\cdot 1{,}38\cdot 8{,}16}{100\cdot 0{,}88\cdot 4{,}32} = -0{,}37.$$

Подставляем найденные величины в уравнение линии регрессии Y на X

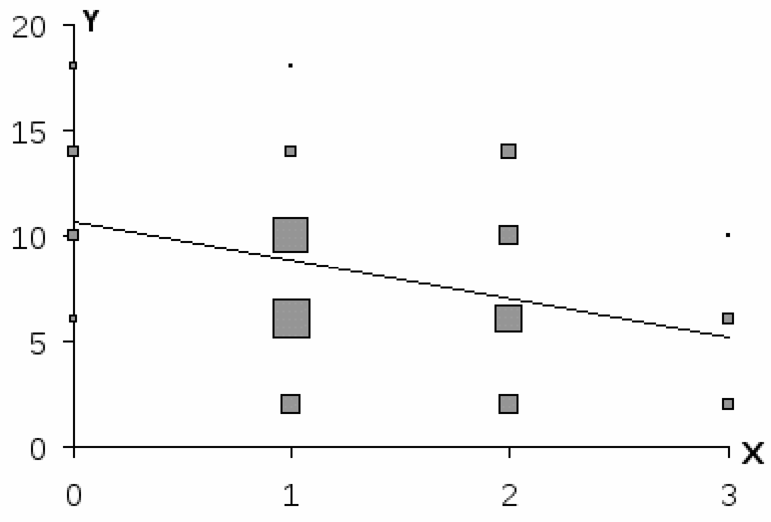
$$\bar{y}_x - 8{,}16 = -0{,}37\frac{4{,}32}{0{,}88}(x - 1{,}38),$$

или окончательно: $\bar{y}_x = -1{,}83x + 10{,}7.$

Т.к. $|r_B| \cdot \sqrt{n-1} \approx 3{,}7 > 3,$ то связь между рассматриваемыми признаками достаточно вероятна.

В среднем рождение ребёнка уменьшает доход на одного члена семьи на сумму около 1,83 тыс. руб.

Изобразим схематически в координатах XY выборочное распределение по признакам и построим линию регрессии. Размеры маркеров на рисунке пропорциональны соответствующим вариантам выборки.



Практическое занятие № 21

Тема: Составление уравнения линейной регрессии. Проверка адекватности модели.

Цель: Научиться выделять корреляционную связь величин, проводить корреляционный и регрессионный анализ, составлять линейную модель регрессии.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Решите задачи

1. Данные опыта приведены в таблице:

Xi

2

4

6

8

10

12

14

Yi

4,5

7,0

8,0

7,5

9,0

8,5

9,5

Полагая, что *X и Y* связаны зависимостью вида $y = a + \mathrm{b}x$, найти коэффициенты а и *b* способом наименьших квадратов.

2. Дана таблица результатов наблюдений:

Xi

2

4
6
8
10
12
14
Yi
3,5
6,0
7,0
6,0
7,5
8,5
10

Найти выборочный коэффициент корреляции и определить его значимость.

Домашнее задание: Составить алгоритм решения типовой задачи.

Практическое занятие № 22

Тема: Распознавание мостов и разделяющих вершин в графе, нахождение расстояния между вершинами в графе.

Цель: получить навыки по распознаванию мостов и разделяющих вершин в графе, нахождению расстояния между вершинами в графе; проверке графа на двудольность; проверке пары графов на изоморфность

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Основу теории графов составляет совокупность методов и представлений, сформировавшихся при решении конкретных задач.

Термин «граф» впервые появился в книге выдающегося венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г., хотя начальные задачи теории графов восходят еще к Эйлеру (XVIII в.). Одна из задач, положивших начало теории графов, – задача о кенигсбергских мостах (*рассказать, показать граф*).

Граф есть совокупность точек и линий, соединяющих эти точки. Эти соединения могут обладать различными характеристиками, и теория графов занимается изучением этих характеристик. Граф характеризует отношения между множествами объектов.

Большое значение в теории графов имеет проблема разрешимости: найти эффективный или хотя бы достаточно простой в практически важных случаях алгоритм решения задачи.

В последнее время теория графов принимает все более прикладной характер, являясь эффективным аппаратом для формализации множества задач, связанных с дискретным размещением объектов. К ним, в частности, относятся: проектирование и исследование сетей связи, анализ электрических цепей, графы потока сигналов и теория обратной связи, блок-схемы программы, исследование автоматов, анализ и синтез логических цепей, задачи календарного планирования, планирование и обеспечение материально-технического снабжения, поиск информации, стратегия инвестиций, анализ качества, исследование движения транспорта, размещение предприятий коммунального обслуживания, моделирование, экономические задачи, теория игр, головоломки, доказательство теорем.

2. Основные понятия и определения теории графов

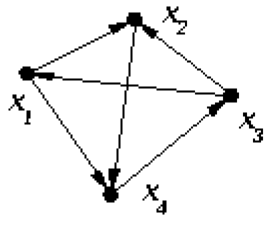
Определение: Пусть задано некоторое конечное множество X, элементы которого будем называть вершинами, и множество V, состоящее из пар элементов (x_i, x_j) множества X. Упорядоченная пара множеств $G=(X,V)$ называется графом. Вершины изображаются точками, а пары элементов – линиями, соединяющими точки, соответствующие образующим пары вершинам.

Если в определении графа существенно в каком порядке выбираются вершины (то есть пара (x_i, x_j) отлична от пары (x_j,x_i)), то такой граф называют ориентированным или орграфом, а пару (x_i, x_j) – дугой, при этом считается, что x_i –начальная вершина, а x_j – конечная. В геометрической интерпретации дуге соответствует направленный отрезок. Часто орграф задают парой $G=(X,\Gamma)$, где X – множество вершин, а Γ – неоднозначное отображение, ставящее в соответствие каждой вершине подмножество в X. $\Gamma(x_i)$ – множество вершин $x_j\in X$, для которых в графе G существует дуга (x_i, x_j). $\Gamma^{-1}(x_i)$ – множество вершин $x_j\in X$, для которых в графе G существует дуга (x_j, x_i).

Если в определении графа не существенен порядок вершин при образовании пары (x_i, x_j), то граф называют неориентированным или неорграфом, а пару (x_i, x_j) – ребром.

Число вершин графа называется его порядком.

Пример. На рис.1 изображен ориентированный граф $G=(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\})$, а на рис.2 – неориентированный граф.



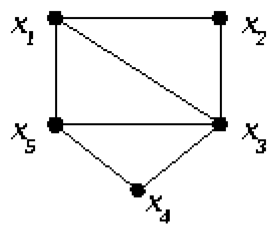


Рис. 1 Рис. 2

Определение: **Путем** в графе G называется такая последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Для неорграфа такая последовательность ребер называется **цепью**. Если путь (цепь) проходит через вершины $x_1, ..., x_k$ то будем обозначать его (ее) символом $[x_1, \ldots, x_k]$.

Для графа на рис. 1 последовательность дуг (x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3) является путем и может быть обозначена следующим образом $[x_1, x_2, x_4, x_3]$. Для графа на рис.2 цепью является, например, следующая последовательность ребер (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_5, x_4), которую обозначим через $[x_2, x_3, x_5, x_4]$.

Определение: Путь (цепь), у которого(-ой) начальная и конечная вершина совпадают, называется **контуром (циклом)**.

Для графа на рис. 2 циклом является, например, следующая цепь $[x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]$.

Определение: **Простым циклом** графа называется цикл, в котором все вершины различны за исключением начальной и конечной вершины, которые совпадают.

Например, для графа на рис.2 цикл $[x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]$ является простым, а цикл $[x_2, x_3, x_4, x_5, x_3, x_1, x_2]$ не является простым.

Определение: **Петлей** называется дуга, начальная и конечная вершины которой совпадают.

Определение: Граф, полученный из орграфа заменой каждой дуги на ребро, называется **основанием орграфа**.

Пример. На рис.3.б изображен граф, который является основание графа, изображенного на рис.3.а.

Определение: Две вершины x_i и x_j называются **смежными**, если существует соединяющее их ребро (дуга) (x_i, x_j), при этом вершины называются **инцидентными** этому ребру (дуге), а ребро (дуга) – инцидентным(-ой) этим вершинам. Аналогично, два различных ребра (дуги) называются смежными, если они имеют по крайней мере одну общую вершину.

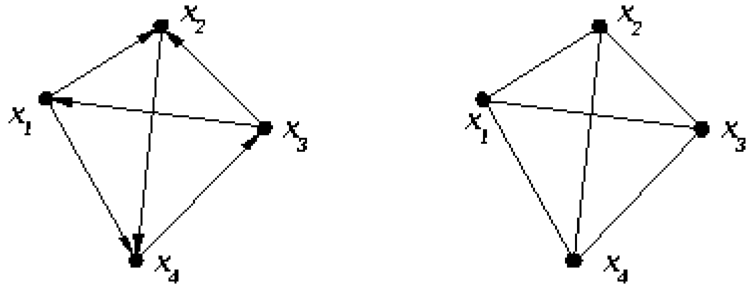


Рис.3 а б

Вершины x_1 и x_4 смежны (рис. 1), дуга (x_1, x_4) инцидентна вершинам x_1 и x_4, а вершины x_1 и x_4 инцидентны дуге (x_1, x_4). Ребра (x_1, x_3) и (x_3, x_4) смежны (рис.2).

Замечание. Смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Определение: Множество всех вершин графа G, смежных с некоторой вершиной x, называется **окружением вершины *x*** и обозначается через $N_G(x)$ или просто $N(x)$.

Определение: В неориентированном графе число ребер, инцидентных данной вершине x_i, называется **степенью (валентностью) вершины x_i** и обозначается $d(x_i)$. Вершина графа, имеющая степень 0, называется **изолированной**, а вершина, имеющая степень 1 – висячей. Для неорграфа на рис.2 $d(x_1)=3$, $d(x_3)=4$.

Утверждение (лемма о рукопожатиях). Сумма степеней вершин графа G равна $2m$, где m – число ребер графа G.

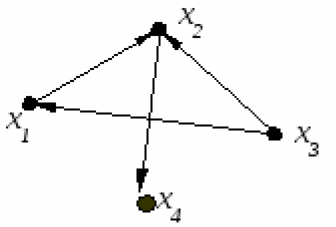
Доказательство. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, то оно добавляет двойку к сумме степеней графа G. Следовательно, все ребра дают вместе сумму степеней $2m$.

Определение: **Подграфом** графа $G=(X,V)$ называется граф $G'=(X',V')$, для которого $X'\subseteq X$, $V'\subseteq V$, причем ребро (x_i, x_j) содержится в V' только в том случае, если x_i и x_j содержатся в X'. Одним из подграфов графа на рис.1 является следующий (рис..4)

Определение: Если все вершины графа $G=(X,V)$ присутствуют в подграфе $G'=(X',V')$, тогда G' называется **остовным подграфом**, т. е. $X'=X$, $V'\subseteq V$.

Определение: Пусть X' – подмножество вершин X графа $G=(X,V)$. Тогда граф $G'=(X',V')$ называется **порожденным подграфом графа *G*** на множестве вершин X' (вершинно-порожденный подграф), если V' является таким подмножеством V, что ребро (x_i,x_j) входит в V' тогда и только тогда, когда x_i и x_j входят в X'.

Пример. На рис.5 представлен порожденный подграф на множестве вершин $\{x_1, x_3, x_5\}$ неориентированного графа, изображенного на рис2.



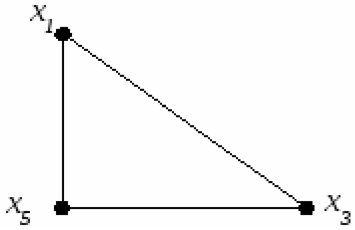


Рис. 4 Рис.5

3. **Некоторые типы графов**

Определение: Граф G называется **полным**, если любые две его вершины смежны. Полный граф порядка n обозначается символом K_n, число ребер в нем равно $\frac{n(n-1)}{2}$. На рис.6 изображены графы K_n , $n\le 5$.

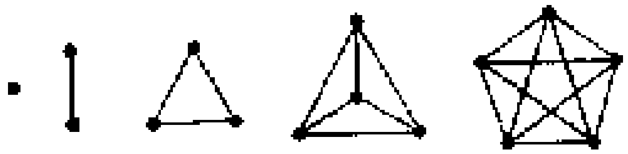


Рис.6

Определение: Граф называется **пустым**, если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается через O_n.

Определение: Граф, не содержащий вершин и, следовательно, ребер, называется **ноль-графом.** Граф, состоящий из одной вершины, называется **тривиальным**.

Красивыми примерами являются *графы пяти платоновых тел* (т. е. правильных многогранников): *тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра*

Практическое занятие № 23

Тема: Проверка графа на изоморфность.

Цель: получить навыки по распознаванию мостов и разделяющих вершин в графе, нахождению расстояния между вершинами в графе; проверке графа на двудольность; проверке пары графов на изоморфность.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Метрические характеристики графов

В теории графов применяются:

1. **Матрица инцинденций**. Это матрица A с n строками, соответствующими вершинам, и m столбцами, соответствующими рёбрам. Для ориентированного графа столбец, соответствующий дуге (x,y) содержит -1 в строке, соответствующей вершине x и 1 в строке, соответствующей вершине y. Во всех остальных – 0. Петлю, т. е. дугу (x,x) можно представлять иным значением в строке x, например, 2. Если граф неориентированный, то столбец, соответствующий ребру (x,y) содержит 1, соответствующие x и y – нули во всех остальных строках.

2. **Матрица смежности**. Это матрица n*n где n – число вершин, где b_{ij} = 1, если существует ребро, идущее из вершины x в вершину y и b_{ij} = 0 в противном случае.

3. Пусть G=(X,U) - связный граф, а x_i и x_j - две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершины x_i и x_j (пути из x_i и x_j) называется *расстоянием* между вершинами x_i и x_j и обозначается $d(x_i,x_j)$. Положим $d(x_i,x_j)=\infty$, если вершины x_i и x_j не соединены маршрутом (путем). Расстояние $d(x_i,x_j)$ удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $d(x_i,x_i)=0$;

2) $d(x_i,x_j)\geq 0$;

3) $d(x_i,x_j)=0$ тогда и только тогда, когда $x_i=x_j$;

4) $d(x_i,x_j)=d(x_j,x_i)$ для симметрических графов;

5) $d(x_i,x_j)+d(x_j,x_k)\geq d(x_i,x_k)$ (неравенство треугольника).

4. Расстояние для графа G удобно задавать матрицей расстояний. ***Матрицей расстояний*** графа с n вершинами называется квадратная матрица D порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$d_{ij}=\begin{cases}0, \text{если } x_i=x_j;\\ d(x_i,x_j), \text{если } x_i\neq x_j.\end{cases}$$

Матрицу расстояний можно определить

5. Для фиксированной вершины x_i величина

$$e(x_i)=\max_{x_j\in X} d(x_i,x_j)$$

называется ***эксцентриситетом*** (отклоненностью) вершины x_i.

6. Максимальный среди эксцентриситетов вершин называется ***диаметром*** графа G и обозначается diam (G):

$$\mathrm{diam}(G)=\max_{x_i\in X} e(x_i)=\max_{x_i\in X}\ \max_{x_j\in X} d(x_i,x_j)$$

7. Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его ***радиусом*** и обозначается через r(G):

$$r(G)=\min_{x_i\in X} e(x_i)=\min_{x_i\in X}\ \max_{x_j\in X} d(x_i,x_j)$$

8. Вершина, имеющая минимальный эксцентриситет, называется ***центром*** графа.

9. Для вершины x_i число $P(x_i) = \sum_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$ называется ***передаточным числом***.

10. Вершина графа, которой соответствует минимальное передаточное число

$$\max_{x_i \in X} P(x_i) = \max_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

называется ***медианой*** графа. Центров и медиан в графе может быть несколько.

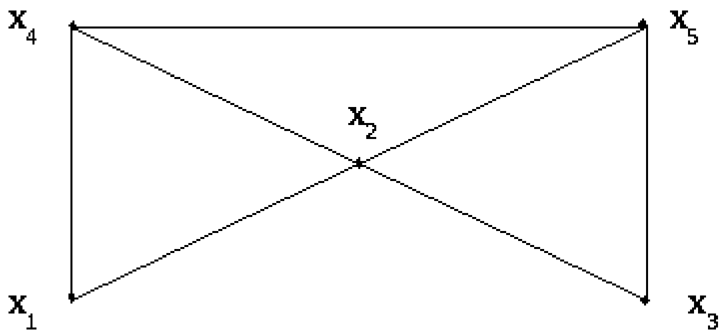


Рис. 1

<u>Пример</u>. Для графа, изображенного на рис.1 метрические характеристики определяются следующим образом:

$$D = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ll} e(x_1) = 2 & P(x_1) = 6 \\ e(x_2) = 1 & P(x_2) = 4 \\ e(x_3) = 2 & P(x_3) = 6 \\ e(x_4) = 2 & P(x_4) = 5 \\ e(x_5) = 2 & P(x_5) = 5 \end{array}$$

Радиус графа равен 1, диаметр равен 2. Центр графа - вершина x_2; Медиана графа - вершина x_2.

Двудольные графы

Определение: Граф называется ***двудольным****,* если существует такое разбиение множества его вершин на две части *(доли),* что концы каждого ребра принадлежат разным частям.

Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется ***полным двудольным***.

Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и из q вершин, обозначается символом $K_{p,q}$. При p=1 получаем *звезду* $K_{1,q}$. На рис.1 изображены звезда $K_{1,5}$ и полный двудольный граф $K_{3,3}$.

Аналогично двудольным графам определяются *k-дольный* и *полный k-дольный* графы для k=3, 4, ... На рис.2 приведен трехдольный граф.

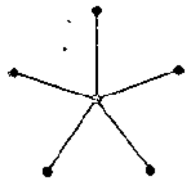
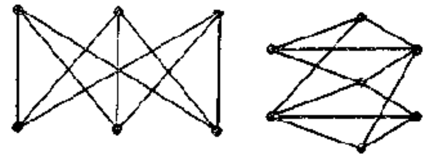



Рис. 1 Рис. 2

Для решения примеров удобно применять теорему

Теорема: Граф является двудольным т. и т.т., к. все его простые циклы имеют четную длину.

Легко подсчитать число всех графов с фиксированным множеством вершин X. Эти графы различаются своими ребрами, и потому их число равно количеству подмножеств в $X^{(2)}$, т.е. $2^{\binom{n}{2}}$, где n=|X|. Однако эти графы не всегда следует различать. Как в применениях теории графов, так и в самой этой теории чаще существенно лишь то, что есть объекты (вершины графа) и связи между объектами (ребра). С этих позиций графы, которые получаются один из другого изменением наименований вершин, разумно не различать. Оформим эти соображения в виде следующего определения.

Изоморфные графы

Определение: Два графа G_1 и G_2 называются ***изоморфными***, если существует взаимно-однозначное отображение между множествами их вершин, сохраняющее смежность. Такое отображение называется **изоморфизмом**.

Два орграфа изоморфны, если существует изоморфизм между их основаниями, сохраняющий порядок вершин на каждой дуге.

Например, три графа, представленные на рис. 4, изоморфны, а графы на рис. 5 не изоморфны. Вопрос о том, изоморфны ли два данных графа, в общем случае оказывается сложным.

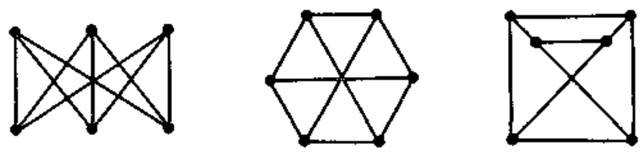


Рис. 4.

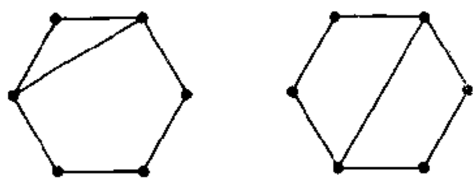


Рис. 5

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью, т. е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны. Изоморфные графы можно отождествлять, т. е. считать совпадающими (их можно изобразить одним рисунком). Они могли бы различаться конкретной природой своих элементов, но именно это игнорируется при введении понятия «граф».

В некоторых ситуациях все же приходится различать изоморфные графы, и тогда полезно понятие «помеченный граф». Граф порядка n называется *помеченным,* если его вершинам присвоены некоторые метки, например, номера 1, 2, ..., n. Отождествив каждую из вершин графа с ее номером (и, следовательно, множество вершин – с множеством чисел {1, 2, ..., n}), определим равенство помеченных графов $G_1=(X,V_1)$ и $G_2=(X,V_2)$ одного и того же порядка: $G_1=G_2$ тогда, когда $V_1=V_2$. На рис. 6 изображены три разных помеченных графа.

При необходимости подчеркнуть, что рассматриваемые графы различаются лишь с точностью до изоморфизма, говорят: «абстрактный граф». Строго говоря, *абстрактный* (или *непомеченный*) граф – это класс изоморфных графов.

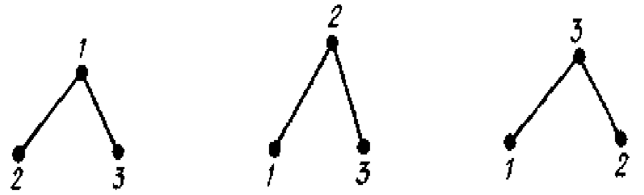


Рис. 6

Варианты заданий:

1. Дана матрица А. Постройте соответствующий ей граф, имеющий матрицу А своей матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности для построенного графа.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Дана матрица А. Постройте соответствующий ей граф, имеющий матрицу А своей матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности для построенного графа.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Практическое занятие № 24

Тема: Запись матрицы достижимости и построение диаграммы Герца для ориентированного графа; решение задач на бинарные деревья.

Цель: Овладеть методами решения задач на бинарные деревья, записью матрицы достижимости и построением диаграммы Герца

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, презентации по теме, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Повторение теоретического материала, в виде ответов на вопросы.
2. Задайте граф **G** рис.1 матрицей смежности и инцидентности.
3. Постройте графы **G1** и **G2,** сравните степени каждой вершины данных графов.
4. По заданной матрице построить сетевой график, решить задачу 1.
5. Решить задачу 2.

Контрольные вопросы:

1. Что называется ориентированным графом? Приведите примеры.

2. Перечислите основные понятия связанные с ориентированными графами.
3. Перечислите способы задания ориентированных графов.
4. В чем состоит аналитический способ задания орграфа?
5. В чем состоит геометрически способ задания орграфа?
6. В чем состоит матричный способ задания орграфа?
7. Какая матрица называется матрицей смежности орграфа?
8. Какая матрица называется матрицей инцидентности орграфа?

G

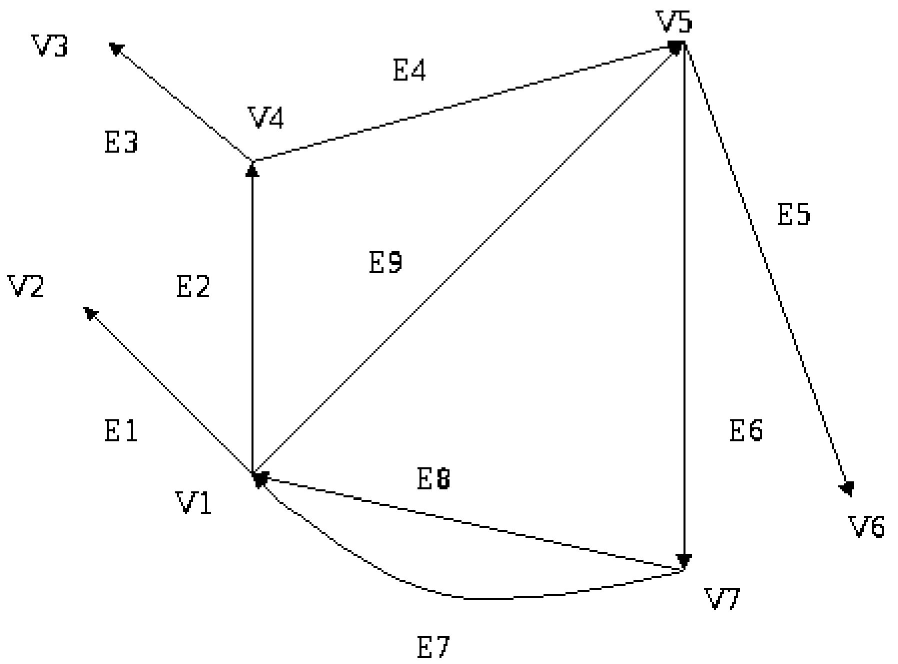


Рис. 1

Практическое занятие № 25

Тема: Решение задач на бинарные деревья.

Цель: Овладеть методами решения задач на бинарные деревья, записью матрицы достижимости и построением диаграммы Герца

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, презентации по теме, Интернет-ресурсы. Решите задачи

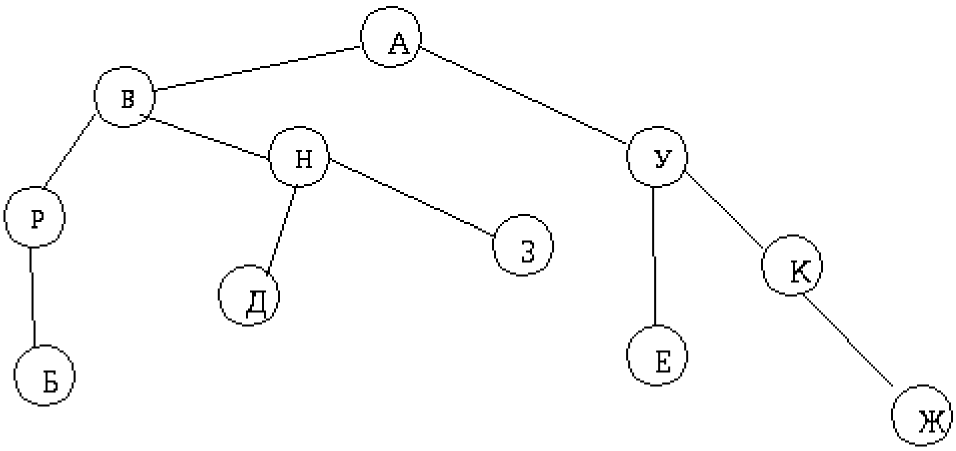
Задача 1. По заданной матрице построить сетевой график (a_{ij}элемент матрицы есть длительность работы от i до j в днях). Найти длину критического пути, указать экономию времени.

а) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Найдите количество узлов данного бинарного дерева, перечислите листы и укажите глубину бинарного дерева с корнем А.



Домашнее задание: Составить алгоритм задачи 1.

Рекомендуемая литература:
Основная литература:

1. Кацман, Ю. Я. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / Ю. Я. Кацман. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Профобразование, 2019. — 130 с. — 978-5-4488-0031-3. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/83119.html

2. Щербакова, Ю. В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / Ю. В. Щербакова. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Научная книга, 2019. — 159 c. — 978-5-9758-1898-0. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/87081.html

3. Большакова, Л. В. Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учебное пособие для СПО / Л. В. Большакова. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Профобразование, 2019. — 196 c. — 978-5-4488-0523-3. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/86941.html

Дополнительная литература:

1. Гриднева И.В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.В. Гриднева, Л.И. Федулова, В.П. Шацкий. — Электрон. текстовые данные. — Воронеж: Воронежский Государственный Аграрный Университет им. Императора Петра Первого, 2017. — 165 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/72762.html

2. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебник для вузов / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. — 2-е изд. — Электрон. текстовые данные. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. — 352 c. — 5-238-00560-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/71075.html

3. Гурьянова И.Э. Теория вероятностей и математическая статистика. Теория вероятностей. Краткий курс с примерами [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.Э. Гурьянова, Е.В. Левашкина. — Электрон. текстовые данные. — М. : Издательский Дом МИСиС, 2016. — 106 c. — 978-5-87623-915-0. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/64202.html