

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
по выполнению лабораторных работ  
по дисциплине  
**ВВЕДЕНИЕ В СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ**  
**СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Направление подготовки	10.03.01 Информационная безопасность
Профиль	Комплексная защита объектов информатизации
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная
Учебный план	2020 г.

Пятигорск, 2020 г.

## **ВВЕДЕНИЕ**

В методических указаниях приведены темы, цели и организационные формы проведения всех практических занятий по дисциплине «Введение в спектрально-корреляционный анализ случайных процессов» с соответствующими методическими рекомендациями, призванными оказывать помощь студентам в изучении основных понятий, теорий и положений дисциплины, изучаемых в ходе конкретного занятия, способствовать развитию их умений, навыков и профессиональных компетенций.

## СОДЕРЖАНИЕ

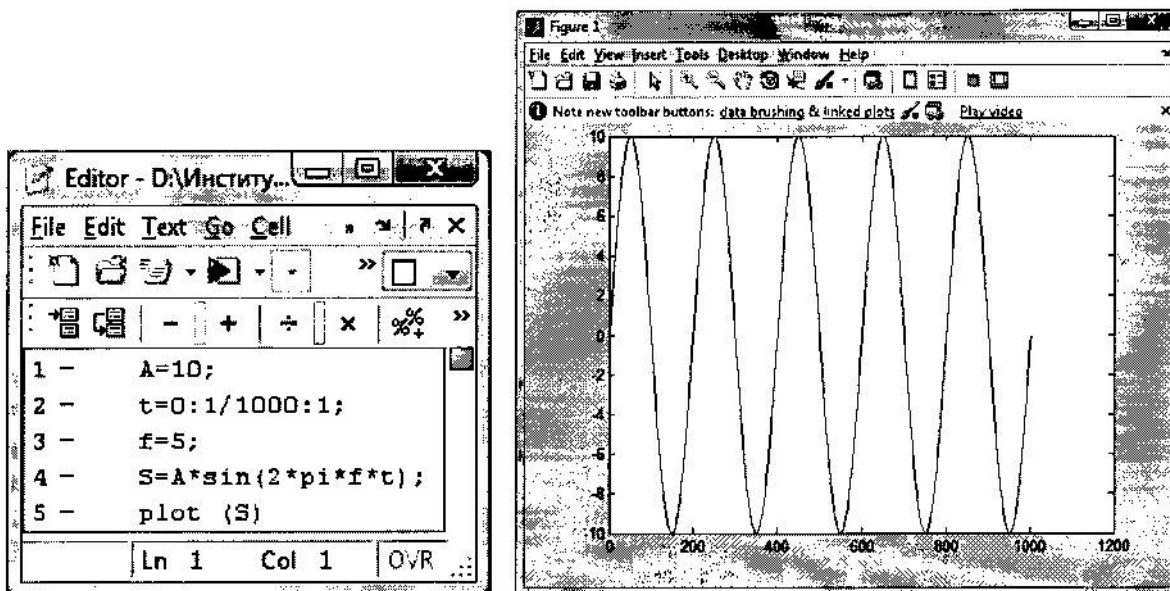
	Стр.
<b>1. Практическая работа №1 «Временной и спектральный анализ сигналов»</b>	4
2. Задание	4
3. Изучение свойств сигналов.	4
3.1 Задать гармонический сигнал. Отобразить на графике полученный сигнал.	4
3.2 Задать полигармонический сигнал. Отобразить на графике полученный сигнал.	4
4. Спектральный анализ сигналов.	5
4.1 Построит амплитудный спектр сигнала из п. 1.1.	5
4.2 Построит амплитудный спектр сигнала из п. 1.2.	6
5. Анализ звуковых файлов.	7
5.1 Загрузить звуковой файл.	7
5.2 Построить амплитудный спектр полученного сигнала.	8
<b>6. Практическая работа №2 «Исследование функций взаимной и автокорреляции»</b>	9
6.1 Сгенерируйте 1000-точечную последовательность данных со свойствами случайного белого гауссового шума ( используя функцию <i>rand</i> ).	9
6.2 Непрерывный сигнал характеризуется следующим уравнением	10
6.3. Сгенерируйте зашумленный сигнал, сложив сигналы из п.1.1 и п.1.2.	11
<b>7. Практическая работа №3 «Исследование в MathCAD спектров периодических и непериодических импульсов различной формы»</b>	13
8.Задание	13
9. Теоретическая часть	13
9.1 Ряд Фурье и преобразование Фурье	13
9.2 Дискретное преобразование Фурье	14
9.3 Быстрое преобразование Фурье	15
9.4 ДПФ и БПФ в MathCAD	15
10 Практическая часть	19
10.1 Прямоугольный импульс (от 0 до $\tau$ )	19
10.2 Симметричный прямоугольный импульс ( $-\tau/2$ до $\tau/2$ )	19
10.3 Треугольный импульс	20
10.4 Гауссовский пульс	20
10.5 Импульс в виде полупериода синуса	20
Приложение	21

# 1. Практическая работа №1 «Временной и спектральный анализ сигналов»

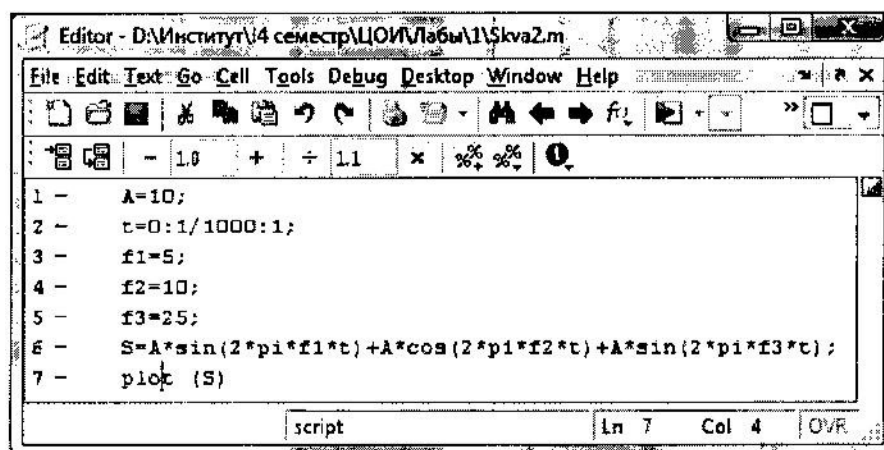
## 2. Задание

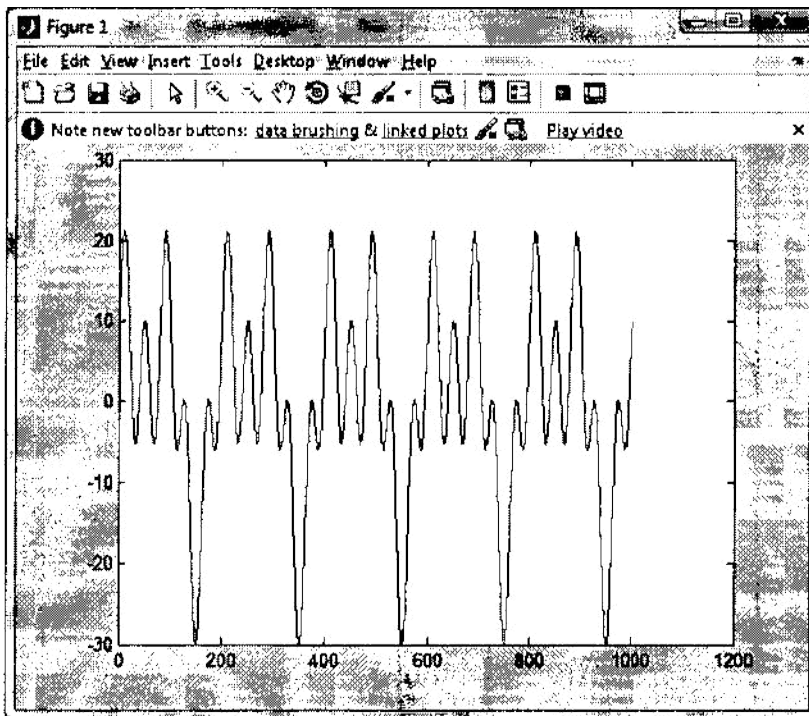
### 3. Изучение свойств сигналов.

3.1 Задать гармонический сигнал. Отобразить на графике полученный сигнал.



3.2 Задать полигармонический сигнал. Отобразить на графике полученный сигнал.





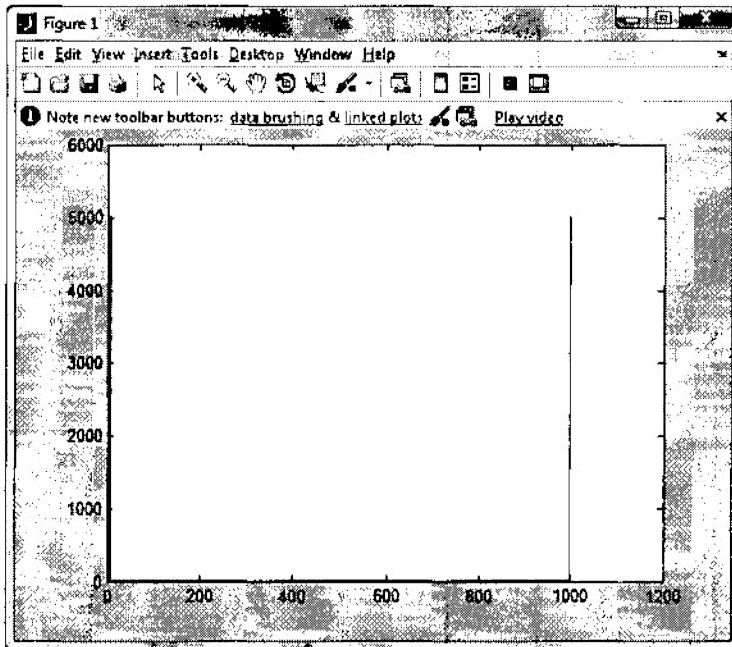
#### 4. Спектральный анализ сигналов.

4.1. Построит амплитудный спектр сигнала из п. 1.1.

```

Editor - D:\Институт\4 семестр\ЦОИ\Лаб\1\dpf.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
- 1.0 + ÷ 1.1 × % % % %
1 - A=10;
2 - t=0:1/1000:1;
3 - f1=5;
4 - s=A*sin(2*pi*f1*t);
5
6 - N=length(s);
7 - k=(2*pi)/N; % шаг угловой частоты
8
9 - for f=1 : N
10 -     X(f)=0;
11 -     Y(f)=0;
12 -     for t=1 : N
13 -         X(f)=X(f)+s(t)*cos((f-1)*k*t);
14 -         Y(f)=Y(f)+s(t)*sin((f-1)*k*t);
15 -     end;
16 -     Z(f)=sqrt(X(f)*X(f)+Y(f)*Y(f)); % амплитудный спектр
17 - end;
18
19 - figure;
20 - plot(Z), (s);
Skva2.m * dpf.m * SkvaLm*
script Ln 20 Col 13 OVR

```

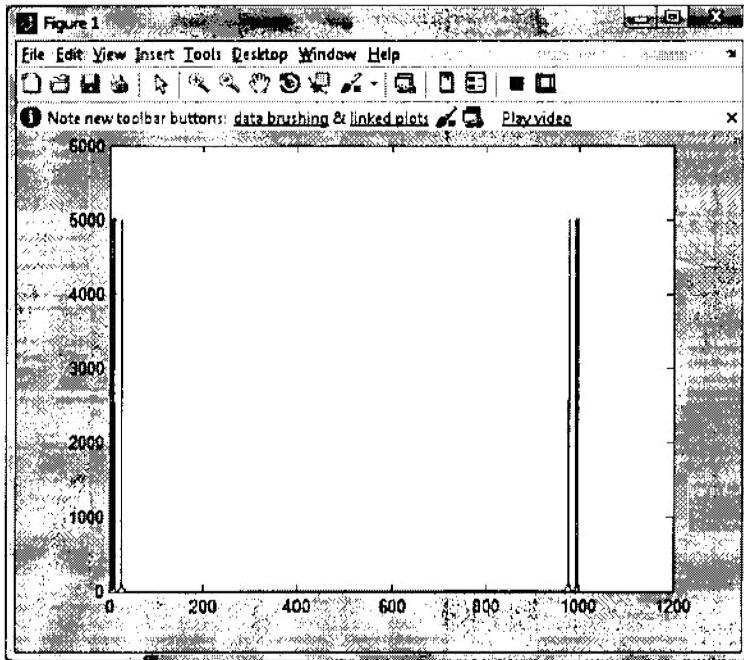


4.2. Построит амплитудный спектр сигнала из п. 1.2.

```

Editor - D:\Институт\4 семестр\ЦОИ\Лабы\1\dpf.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
: [Icons] - 1.0 + ÷ 1.1 × %> %< ⓘ
1 - A=10;
2 - t=0:1/1000:1;
3 - f1=5;
4 - f2=10;
5 - f3=25;
6 - s=A*sin(2*pi*f1*t)+A*cos(2*pi*f2*t)+A*sin(2*pi*f3*t);
7
8 - N=length(s);
9 - k=(2*pi)/N; %шаг угловой частоты
10
11 - for f=1 : N
12 -     X(f)=0;
13 -     Y(f)=0;
14 -     for t=1 : N
15 -         X(f)=X(f)+s(t)*cos((f-1)*k*t);
16 -         Y(f)=Y(f)+s(t)*sin((f-1)*k*t);
17 -     end;
18 -     Z(f)=sqrt(X(f)*X(f)+Y(f)*Y(f)); %амплитудный спектр
19 - end;
20
21 - figure;
22 - plot(Z), (s);
Skva2.m x dpf.m x Skva1.m x
script Ln 2 Col 14 OVR

```

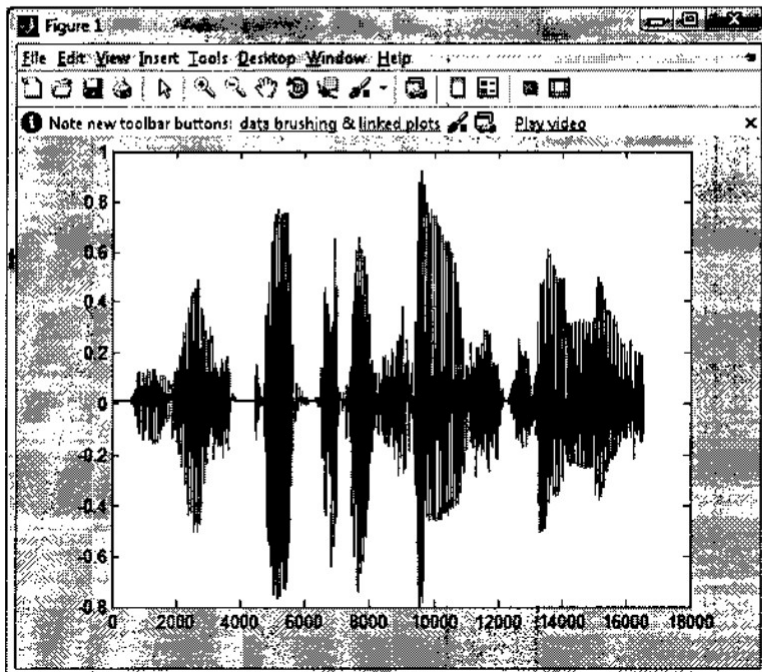


## 5. Анализ звуковых файлов.

### 5.1. Загрузить звуковой файл.

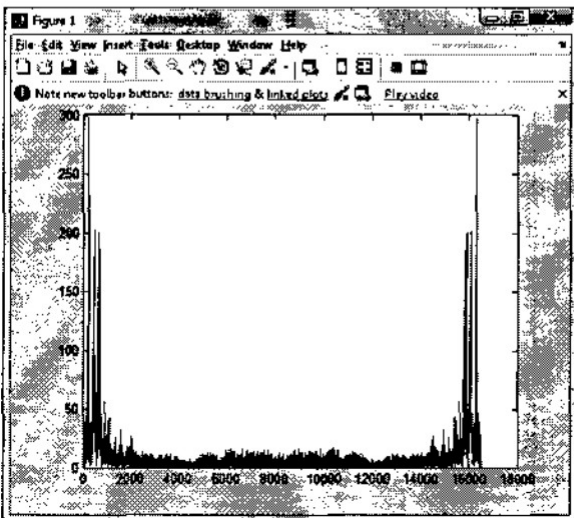
```

Editor - D:\Институт\14 семестр\ЦОИ\Лабы\1\Skva5.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons]
- 1.0 + ÷ 1.1 × % %
1 - [Y,FS,BITS]=wavread('D:\Институт\14 семестр\ЦОИ\Лабы\1\voice.wav');
2 - plot(Y)
Skva3.m x idpf.m x Skva5.m x
script Ln 2 Col 6 OVR
  
```



5.2. Построить амплитудный спектр полученного сигнала.

```
Editor - D:\Институт\14 семестр\ЦОИ\Лабы\1\Skva6.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
- 1.0 + ÷ 1.1 x % % !
1 - A=10;
2 - t=0:1/1000:1;
3 - f=500;
4
5 - [s,FS,BITS]=wavread('D:\Институт\14 семестр\ЦОИ\Лабы\1\voice.wav');
6
7 - N=length(s);
8 - k=(2*pi)/N; % шаг угловой частоты
9
10 - for f=1 : N
11 -     X(f)=0;
12 -     Y(f)=0;
13 -     for t=1 : N
14 -         X(f)=X(f)+s(t)*cos((f-1)*k*t);
15 -         Y(f)=Y(f)+s(t)*sin((f-1)*k*t);
16 -     end;
17 -     Z(f)=sqrt(X(f)*X(f)+Y(f)*Y(f)); % амплитудный спектр
18 - end;
19
20 - figure;
21 - plot(Z),(s);
Skva3.m* x Skva5.m x Skva6.m
script Ln 21 Col 13 OVR
```



**Вывод:** в ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены свойства гармонических и полигармонических сигналов, произведён спектральный анализ сигналов, анализ звукового файла и его спектральный анализ.

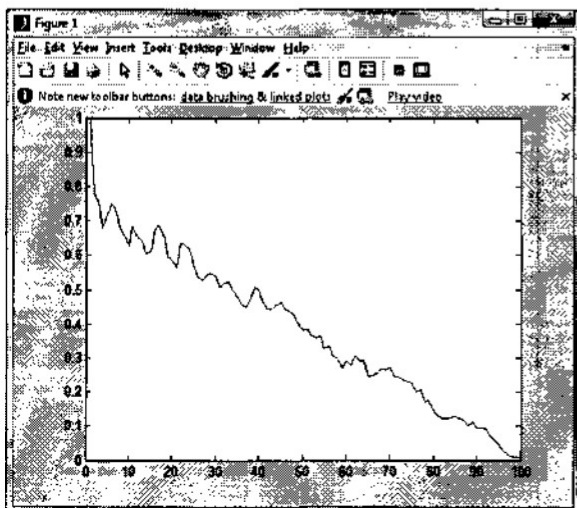
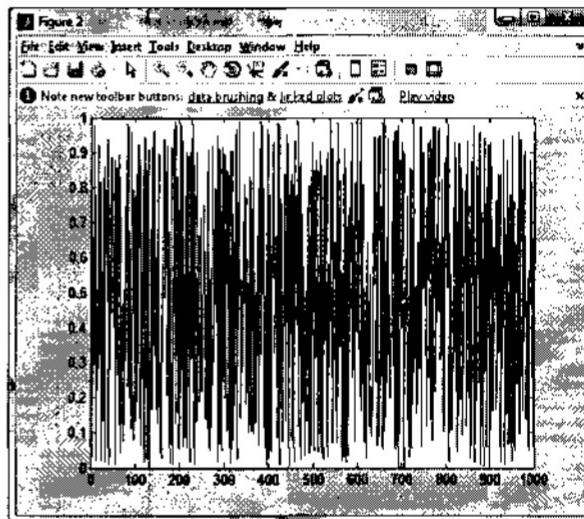
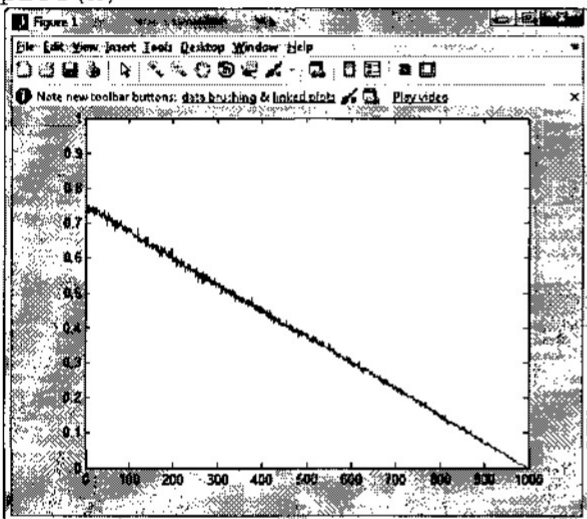


## 6. Практическая работа №2 «Исследование функций взаимной и автокорреляции»

6.1. Сгенерируйте 1000-точечную последовательность данных со свойствами случайного белого гауссового шума (используя функцию *rand*).

Рассчитайте и изобразите оценки автокорреляционной функции для первых 100 задержек.

```
clear;  
x=rand(1,1000); -0.5  
N=1000;  
Rxx=zeros(1,N);  
for n=0:N  
    for k=1:(N-n)  
        Rxx(n+1)=Rxx(n+1)+x(k)*x(k+n);  
    end  
end  
Rxx=Rxx/N;  
Pxx=Rxx/Rxx(1);  
plot(Pxx);  
figure  
plot(x)
```



6.2. Непрерывный сигнал характеризуется следующим уравнением:

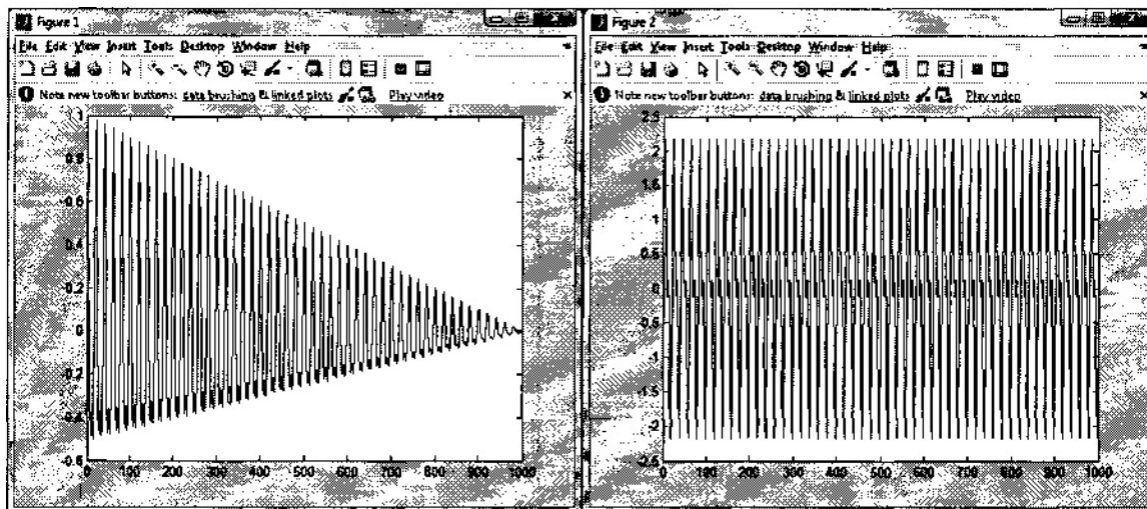
$$x(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + B \cos(2\pi f_2 t)$$

Сгенерируйте с дискретный эквивалент сигнала. Частота дискретизации равна 1кГц,

$f_1=50$  Гц,  $f_2=100$  Гц, а отношение амплитуд частотных компонентов  $A/B=1.5$ .

Вычислите и изобразите автокорреляционную функцию данной последовательности.

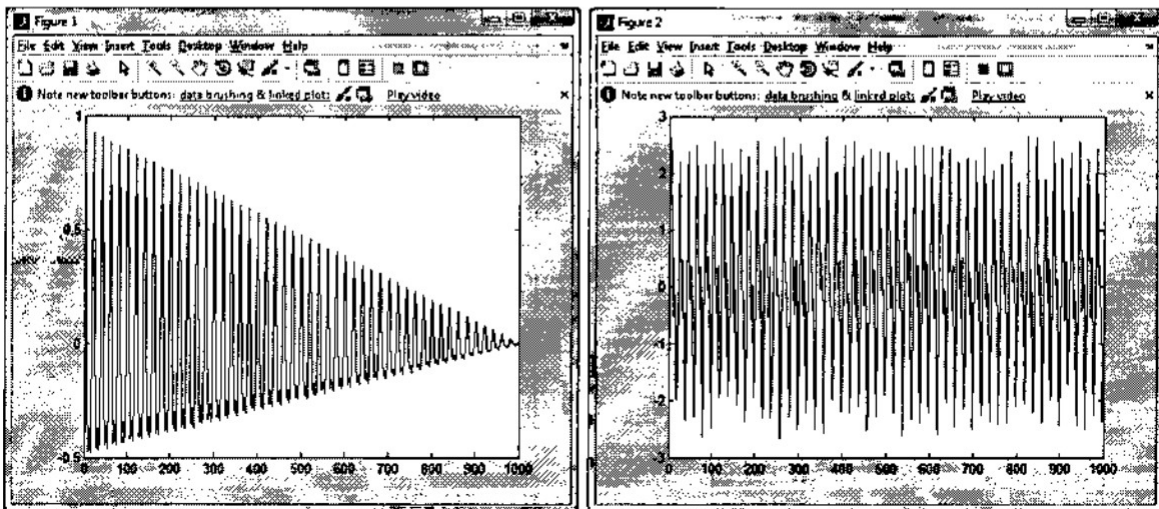
```
clear;
Amp=1.5;
t=0:1/1000:1-0.001;
f1=50;
f2=100;
x=Amp*sin(2*pi*f1*t)+sin(2*pi*f2*t);
N=1000;
Rxx=zeros(1,N);
for n=0:N
    for k=1:(N-n)
        Rxx(n+1)=Rxx(n+1)+x(k)*x(k+n);
    end
end
Rxx=Rxx/N;
Pxx=Rxx/Rxx(1);
plot(Pxx);
figure
plot(x)
```



6.3. Сгенерируйте зашумленный сигнал, сложив сигналы из п. 1.1 и п. 1.2.

а) Вычислите и изобразите автокорреляционную функцию данной последовательности.

```
clear;
Amp=1.5;
t=0:1/1000:1-0.001;
f1=50;
f2=100;
s=Amp*sin(2*pi*f1*t)+sin(2*pi*f2*t);
x1=rand(1,1000)-0.5;
x=s+x1
N=1000;
Rxx=zeros(1,N);
for n=0:N
    for k=1:(N-n)
        Rxx(n+1)=Rxx(n+1)+x(k)*x(k+n);
    end
end
Rxx=Rxx/N;
Pxx=Rxx/Rxx(1);
plot(Pxx);
figure
plot(x)
```



б) Вычислите и изобразите взаимную корреляционную функцию сигналов из п. 1.3 и п. 1.2.

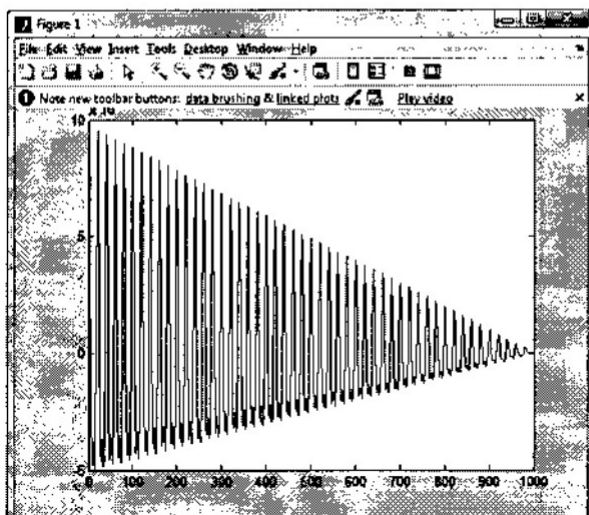
Сделайте выводы по функции взаимной корреляции.

```
clear;
Amp=1.5;
t=0:1/1000:1-0.001;
f1=50;
f2=100;
s=Amp*sin(2*pi*f1*t)+sin(2*pi*f2*t);
x1=rand(1,1000)-0.5;
x=s+x1;
N=1000;
```

```

Rxy=zeros(1,N);
for n=0:N
    for k=1:(N-n)
        Rxy(n+1)=Rxy(n+1)+x(k)*s(k+n);
    end
end
Rxy=Rxy/N;
Rxx=0;
Ryy=0;
for i=1:N
    Rxx=Rxx+x(i)^2;
    Ryy=Ryy+s(i)^2;
end
Pxy=Rxy/(sqrt(Rxx.*Ryy));
plot(Pxy);

```



Вывод: в ходе данной лабораторной работы исследовали функции взаимной и автокорреляции.

## 7. Практическая работа №3 «Исследование в MathCAD спектров периодических и непериодических импульсов различной формы»

### 8. Задание.

Сравнить спектры периодических и непериодических сигналов в форме прямоугольного импульса длительностью  $T$ , сдвинутого прямоугольного импульса -  $\tau/2$  до  $\tau/2$ , треугольного импульса, гауссовского импульса, половины периода синуса.

## 9 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 9.1 Ряд Фурье и преобразование Фурье

**Условие периодичности** -  $x(t)=x(t+mT)$ , где  $T$  - период,  $m$  - натуральное число,  $m=1,2,\dots$

Любой периодический сигнал  $x(t)$  может быть представлен **тригонометрическим рядом Фурье**

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad (9.1.1)$$

Где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  - угловая частота 1-й или основной гармоники;  $a_0, a_k$  и  $b_k$

коэффициенты разложения, вычисляемые по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) \sin k\omega_1 t dt;$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}, \quad k=1,2,3,\dots,$$

где  $A_k$  - амплитуда  $k$ -й гармоники,  $\varphi_k$  - фаза  $k$ -й гармоники;  $a_0$  - среднее значение сигнала (постоянная составляющая);  $k\omega_1 = \omega_k$  - угловая частота  $k$ -й гармоники;  $t_n$  - момент времени, соответствующий началу периода.

Зависимости  $A_k$  и  $\varphi_k$  от частоты  $\omega_k$  - это **спектры амплитуд и фаз** соответственно.

В некоторых случаях более удобна **комплексная форма ряда Фурье**

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (9.1.2)$$

Коэффициенты  $\dot{A}_k$  ряда (1.2) вычисляются по формуле

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{t_n}^{t_n+T} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (9.1.3)$$

Формулы (2.1.2) и (2.1.3) - пара преобразований Фурье. Совокупность коэффициентов  $\dot{A}_k = A_k e^{j\varphi_k}$  - **комплексный спектр периодического сигнала**  $x(t)$ . Совокупность действительных величин  $A_k = |\dot{A}_k|$  в зависимости от частоты - **спектр амплитуд**. Совокупность величин  $\varphi_k$  в зависимости от частоты - **спектр фаз**.

Ряд (9.1.2) удобно представлять в форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (9.1.4)$$

где 
$$\dot{C}_k = \frac{\dot{A}_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_k+T} x(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (9.1.5)$$

Спектральное представление сигналов можно обобщить на случай, когда функция  $x(t)$  - непериодическая, т.е.  $T \rightarrow \infty$ . В этом случае применяется **интегральное преобразование Фурье**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} dt = \Phi^{-1}[F(j\omega)] \quad (\text{обратное}) \quad (9.1.6)$$

где 
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \Phi[x(t)] \quad (\text{прямое}) \quad (9.1.7)$$

Здесь  $\Phi$  и  $\Phi^{-1}$  - обозначения прямого и обратного оператора Фурье.

Формулы (2.1.6) и (2.1.7) - пара интегральных преобразований Фурье. Функция  $F(j\omega)$  называется **спектральной функцией** или комплексным спектром непериодического сигнала. Она определена при положительных и отрицательных частотах.

Спектральную функцию можно представить в виде

$$F(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (9.1.8)$$

где  $A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} = |F(j\omega)|$  - спектр амплитуд;

$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{b(\omega)}{a(\omega)}$  - спектр фаз.

## 9.2 Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — это одно из преобразований Фурье, широко применяемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его гомоморфизмы применяются в сжатии звука в MP3, сжатие изображений в jpg и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале. Также дискретные преобразования Фурье помогают решать частные дифференциальные уравнения и выполнять такие операции, как свёртки. Преобразования бывают одномерные, двумерные и даже трехмерные.

Последовательность  $N$  действительных чисел  $X_0, \dots, X_{N-1}$  преобразовывается в последовательность из  $N$  комплексных чисел  $X_0, \dots, X_{N-1}$  с помощью дискретного преобразования Фурье по формуле:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad k = 0, \dots, N-1$$

Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) задается формулой

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Поскольку напрямую вычисления дискретного преобразования требует  $O(N^2)$  операций, то на практике используют более быстрый алгоритм Быстрого преобразования Фурье, которое требует  $O(N \log N)$  операций.

### 9.3 Быстрое преобразование Фурье

Алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) базируется на том, что при вычислениях среди множителей (синусов и косинусов) есть много периодически повторяющихся значений (в силу периодичности функций). Алгоритм БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями в пирамидальный алгоритм, значительно сокращая число умножений за счет исключения повторных вычислений. В результате быстродействие БПФ в зависимости от  $N$  может в сотни раз превосходить быстродействие стандартного алгоритма. При этом следует подчеркнуть, что алгоритм БПФ даже точнее стандартного, т.к. сокращая число операций, он приводит к меньшим ошибкам округления.

Наиболее популярным из алгоритмов БПФ является т.н. метод Cooley-Tukey, позволяющий вычислить ДПФ для числа отсчетов  $N = 2^k$  за время порядка  $N \log_2 N$  (отсюда и название - быстрое преобразование Фурье, БПФ). Этот способ чем-то неувлимо напоминает быструю сортировку. В ходе работы алгоритма также проводится рекурсивное разбиение массива чисел на два подмассива и сведение вычисления ДПФ от целого массива к вычислению ДПФ от подмассивов в отдельности.

Широко распространено ошибочное мнение о том, что метод Cooley-Tukey - единственный существующий метод выполнения БПФ, а само БПФ существует только для случая  $N = 2^k$ . На самом деле это не так - существуют алгоритмы БПФ для любого числа отсчетов.

Причина распространения метода Cooley-Tukey в том, что алгоритм, построенный по методу Cooley-Tukey, обладает рядом очень хороших технологических свойств. Структура алгоритма и его базовые операции не зависят от числа отсчетов (меняется только число прогонов базовой операции "бабочка"). Алгоритм легко распараллеливается с использованием базовой операции и конвейеризуется, а также легко каскадируется (коэффициенты БПФ для  $2N$  отсчетов могут быть легко получены преобразованием коэффициентов двух БПФ по  $N$  отсчетов, полученных "прореживанием" через один исходных  $2N$  отсчетов). Алгоритм прост и компактен, не требует дополнительной оперативной памяти и допускает обработку данных "на месте". Существует целый ряд оптимизированных именно для этого алгоритма DSP-процессоров (это одновременно и причина, и следствие).

### 9.4 ДПФ и БПФ в MathCAD

В Mathcad входят два типа функций для дискретного преобразования Фурье: *fft/iff* и *cff/icc*. Эти функции дискретны: они берут в качестве аргументов и возвращают векторы и матрицы. Они не могут быть использованы с другими функциями.

Используйте функции *fft* и *iff*, если выполнены следующие два условия:

- аргументы вещественны, и
- вектор данных имеет  $2^m$  элементов.

Используйте функции *cfft* и *icfft* во всех других случаях. Первое условие необходимо, потому что функции *fft/iff* используют тот факт, что для вещественных данных вторая половина преобразования Фурье является комплексно сопряженной с первой. Mathcad отбрасывает вторую половину вектора-результата. Это сохраняет и время и память при вычислениях.

Пара функций *cfft/icfft* не использует симметрию в преобразовании. По этой причине необходимо использовать их для комплексных данных. Так как вещественные числа — подмножество комплексных чисел, можно также использовать пару *cfft/icfft* для вещественных чисел.

Второе условие требуется, потому что пара функций *fft/iff* использует высоко эффективный алгоритм быстрого преобразования Фурье. Для этого вектор аргумента, используемого с *fft*, должен иметь  $2^m$  элементов. В функциях *cfft/icfft* использован алгоритм, который допускает в качестве аргументов как матрицы, так и векторы произвольного размера. Когда эта пара функций используется с матрицей в качестве аргумента, вычисляется двумерное преобразование Фурье.

Обратите внимание, что, если использована функция *fft* для прямого преобразования, необходимо использовать функцию *iff* для обратного. Аналогично, если для прямого преобразования использована *cfft*, то для обратного необходимо использовать *icfft*.

Различные формулировки определения преобразования Фурье используют различные нормировочные коэффициенты и соглашения о знаке перед мнимой единицей в показателе экспоненты прямого и обратного преобразований. Функции *fft*, *iff*, *cfft* и *icfft* используют  $1/\sqrt{N}$  как нормировочный коэффициент и положительный показатель степени  $\sqrt{N}$  в прямом преобразовании. Функции *FFT*, *IFFT*, *CFFT* и *ICFFT* используют  $1/N$  как нормировочный коэффициент и отрицательный показатель степени  $N$  в прямом преобразовании. Необходимо использовать эти функции попарно. Например, если используется *CFFT* в прямом преобразовании, необходимо использовать *ICFFT* в обратном.

#### **Преобразование Фурье в вещественной области.** Для

вещественнозначных векторов с  $2^T$  элементами можно применять пару функций *fft/iff*. В алгоритме вычисления этих функций используются преимущества симметрии, существующей только для вещественных данных. Это позволяет сохранить и время, и память, необходимые для вычислений.

**fft (v)** Возвращает дискретное преобразование Фурье  $2^m$ -мерного - вещественнозначного вектора. Аргумент можно интерпретировать как результат измерений через равные промежутки времени некоторого сигнала.

Вектор **v** должен иметь  $2^m$  элементов. Результат — комплекснозначный вектор размерности  $1+2^{m-1}$ . Если **v** имеет размерность отличную от  $2^m$ , Mathcad выдает сообщение об ошибке “*неверный размер вектора*”.



Элементы вектора, возвращаемого *fft*, вычисляются по формуле

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} v_k e^{2\pi i(j/n)k}$$

В этой формуле  $n$  — число элементов в  $v$ ,  $i$  — мнимая единица.

Элементы в векторе, возвращенном функцией *fft*, соответствуют различным частотам. Чтобы восстанавливать фактическую частоту, необходимо знать частоту измерения исходного сигнала. Если  $v$  есть  $n$ -мерный вектор, переданный функции *fft*, и частота измерения исходного сигнала —  $f_s$ , то частота, соответствующая  $c_j$ , равна

$$f_k = \frac{k}{n} \cdot f_s$$

Обратите внимание, что это делает невозможным обнаружить частоты выше частоты измерения исходного сигнала. Это — ограничение налагаемое не Mathcad, а самой сутью проблемы. Чтобы правильно восстанавливать сигнал по его преобразованию Фурье, необходимо произвести измерения исходного сигнала с частотой, по крайней мере вдвое большей, чем ширина полосы частот.

*ifft(v)* Возвращает  $c_j$ , обратное дискретное преобразование Фурье; результат — вещественнозначный.

Вектор  $v$  должен иметь  $1+2^m$  элементов, где  $m$  — целое. Результат есть комплекснозначный вектор размерности  $2^{m+1}$ . Если  $v$  имеет размерность, отличную от  $1+2^m$ , Mathcad выдает сообщение об ошибке “*неверный размер вектора*”.

Аргумент  $v$  — вектор, подобный созданному функцией *fft*. Чтобы вычислить результат, Mathcad сначала создает новый вектор  $w$ , комплексно сопряженный  $v$ , и присоединяет его к вектору  $v$ . Затем Mathcad вычисляет вектор  $d$ , чьи элементы вычисляются по формуле:

$$d_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} w_k e^{-2\pi i(j/n)k}$$

Это та же самая формула, что и для *fft*, кроме знака минус в функции *exp*. Функции *fft* и *ifft* — точные обращения. Для всех вещественнозначных  $v$  справедливо *ifft(fft(v))=v*.

**Преобразование Фурье в комплексной области.** Имеются две причины, по которым не могут быть использованы пары преобразований *fft/ifft*, обсужденные в предыдущем разделе:

Данные могут быть комплекснозначны. Это означает, что Mathcad не может больше использовать симметрию, имеющую место в вещественном случае.

Вектор данных может иметь размерность, отличную от  $2^m$ . Это означает, что Mathcad не может пользоваться преимуществом высокоэффективного алгоритма БПФ, используемого парой *fft/ifft*.

Комплексное преобразование Фурье требует следующих функций:

*cfft(A)* Возвращает дискретное преобразование Фурье комплекснозначных вектора или матрицы. Возвращаемый массив

имеет тот же самый размер, что и массив, используемый как аргумент.

**icfft (A)** Возвращается обращение дискретного преобразования Фурье вектора или матрицы данных. Функция *icfft* — обратная к функции *cfft*. Подобно *cfft*, эта функция возвращает массив того же самого размера, что и аргумент.

Пара преобразований *cfft/icfft* может работать с массивами любого размера. Однако они работают значительно быстрее, когда число строк и столбцов может быть представлено в виде произведения большого количества меньших сомножителей. Например, векторы с длиной  $2^m$  относятся к этому классу, так же как и векторы, имеющие длины, подобные 100 или 120. С другой стороны, вектор, чья длина — большое простое число, замедлит вычисление преобразования Фурье.

Функции *cfft* и *icfft* — обратные друг к другу. То есть  $\text{icfft}(\text{cfft}(v))=v$ . Рисунок 3 показывает примеры использования преобразования Фурье в Mathcad.

Когда в качестве аргумента *cfft* используется матрица, результат есть двумерное преобразование Фурье исходной матрицы.

**Альтернативные формы преобразования Фурье.** Определения преобразования Фурье, обсужденные выше, не являются единственно возможными. Например, следующие определения для дискретного преобразования Фурье и его обращения можно найти в книге Ronald Bracewells, *The Fourier Transform and Its Applications* (McGraw-Hill, 1986):

$$F(v) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=1}^n f(\tau) e^{-2\pi i(v/n)k}$$

$$f(\tau) = \sum_{v=1}^n F(v) e^{2\pi i(\tau/n)k}$$

Эти определения весьма распространены в технической литературе. Чтобы использовать эти определения вместо обсужденных в предыдущем разделе, используйте функции *FFT*, *IFFT*, *CFFT* и *ICFFT*. Они отличаются следующим:

Вместо коэффициента  $1/n$  перед обеими формулами в прямом преобразовании стоит коэффициент  $1/n$ , и коэффициент 1 в обратном преобразовании.

Знак минус появляется в показателе экспоненты прямого преобразования и исчезает в формуле обратного.

Функции *FFT*, *IFFT*, *CFFT* и *ICFFT* используются аналогично функциям, обсужденным в предыдущем разделе.

## 10. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Номер варианта  $N_{\text{вар}} := 7$

Длительность импульса  $\tau := 1$

Период сигнала  $T_1 := 10$

Частота сигнала  $f_s := \frac{1}{T_1}$        $f_s = 0.1$

Задание времени  $t := -5, -4.999..55$

Частота дискретизации  $f_d := \frac{1}{\tau} \cdot (10 + N_{\text{вар}})$        $f_d = 17$

Период дискретизации  $T_d := \frac{1}{f_d}$        $T_d = 0.059$

$K := 1024$

$k := 0..1024-1$

Дискретное время  $td_k := -5 + k \cdot T_d$

### 10.1 Прямоугольный импульс (от 0 до $\tau$ )

$$y11(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y12(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \text{mod}(t, T_1) \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Y11_k := y11(td_k) \quad c11 := \text{fft}(Y11) \\ j := 0.. \text{last}(c11)$$

$$A11 := \sqrt{\text{Re}(c11)^2 + \text{Im}(c11)^2}$$

$$Y12_k := y12(td_k) \quad c12 := \text{fft}(Y12)$$

### 10.2 Симметричный прямоугольный импульс ( $-\tau/2$ до $\tau/2$ )

$$y21(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t + \frac{\tau}{2} \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y22(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \text{mod}\left(t + \frac{\tau}{2}, T_1\right) \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Y21_k := y21(td_k) \quad c21 := \text{fft}(Y21)$$

$$Y22_k := y22(td_k) \quad c22 := \text{fft}(Y22)$$

### 10.3 Треугольный импульс

$$y_{31}(t) := \begin{cases} \frac{2 \cdot \left(t + \frac{\tau}{2}\right)}{\tau} & \text{if } \frac{-\tau}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{-2 \cdot \left(t + \frac{-\tau}{2}\right)}{\tau} & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y_{32}(t) := \begin{cases} \frac{2 \cdot \left(\text{mod}\left(t + \frac{\tau}{2}, T1\right)\right)}{\tau} & \text{if } \frac{-\tau}{2} \leq \text{mod}\left(t + \frac{\tau}{2}, T1\right) - \frac{\tau}{2} \leq 0 \\ \frac{-2 \cdot \left(\text{mod}(t, T1) + \frac{-\tau}{2}\right)}{\tau} & \text{if } 0 \leq \text{mod}(t, T1) \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Y_{31}_k := y_{31}(td_k) \quad c_{31} := \text{fft}(Y_{31}) \quad A_{31} := \sqrt{\text{Re}(c_{31})^2 + \text{Im}(c_{31})^2}$$

$$Y_{32}_k := y_{32}(td_k) \quad c_{32} := \text{fft}(Y_{32}) \quad A_{32} := \sqrt{\text{Re}(c_{32})^2 + \text{Im}(c_{32})^2}$$

## 10.4 Гауссовский пульс

$$y41(t) := \begin{cases} \frac{-17t^2}{\tau^2} & \text{if } \frac{-\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad y42(t) := \begin{cases} \frac{-17t2^2}{\tau^2} & \text{if } 0 \leq t2 + \frac{\tau}{2} \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Y41_k := y41(td_k) \quad c41 := \text{fft}(Y41) \quad A41 := \sqrt{\text{Re}(c41)^2 + \text{Im}(c41)^2}$$

$$Y42_k := y42(td_k) \quad c42 := \text{fft}(Y42) \quad A42 := \sqrt{\text{Re}(c42)^2 + \text{Im}(c42)^2}$$

## 10.5 Импульс в виде полупериода синуса

$$y51(t) := \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{\tau}\right) & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad y52(t) := \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi \cdot \text{mod}(t, T1)}{\tau}\right) & \text{if } 0 \leq \text{mod}(t, T1) \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Y51_k := y51(td_k) \quad c51 := \text{fft}(Y51) \quad A51 := \sqrt{\text{Re}(c51)^2 + \text{Im}(c51)^2}$$

$$Y52_k := y52(td_k) \quad c52 := \text{fft}(Y52) \quad A52 := \sqrt{\text{Re}(c52)^2 + \text{Im}(c52)^2}$$

