МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ СЕРВИСА, ТУРИЗМА И ДИЗАЙНА (филиал) в г. Пятигорске

Методические указания
по выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Дискретная математика»

Пятигорск 2020

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры управления в технических системах протокол № ___ от _______________2020

Зав.кафедрой ФЭиЭ __________________________________Н.В. Баландина

Составитель: доцент кафедры ФЭиЭ Казаров Б.А.

Содержание

Введение

Дисциплина «Дискретная математика» входит в базовую часть ОП ВО подготовки бакалавра по направлению 10.03.01 «Информационная безопасность» и реализуется во 2 семестре.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте теории дискретной математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении исследовательских задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

В результате освоения содержания дисциплины студент должен:

Знать: основные понятия и законы теории множеств; методологию использования аппарата математической логики и способы проверки истинности утверждений; алгоритмы приведения булевых функций к нормальной форме и построения минимальных форм; основные понятия и законы комбинаторики и комбинаторных схем; понятия предикатов и кванторов; основные понятия и свойства графов; методы решения оптимизационных задач на графах; методологию организации, проведения и обработки данных вычислительного эксперимента.

Уметь: исследовать булевы функции, получать их представление в виде формул; пользоваться законами комбинаторики для решения прикладных задач; применять основные алгоритмы исследования неориентированных и ориентированных графов; применять методы дискретной математики при решении задач экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

Владеть: навыками решения задач дискретной математики; навыками составлять математические модели задач исследования в профессиональной деятельности.

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Дискретная математика» составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, рабочим учебным планом и рабочей программой дисциплины «Дискретная математика».

Тематический план лабораторных работ

№ Темы	Наименование тем лабораторных работ	Обьем часов
1	Лабораторная работа №1. Множества и операции над ними	2
4	Лабораторная работа №2. Операции над высказываниями	2
6	Лабораторная работа №3. Построение таблиц истинности булевых функций	2
6	Лабораторная работа №4. Тождественные преобразования булевых функций	2
7	Лабораторная работа №5. Нормальные формы алгебры логики	2
7	Лабораторная работа №6. Методы построения полинома Жегалкина	2
8	Лабораторная работа №7. Задачи комбинаторики	2
10	Лабораторная работа №8. Представление графов в памяти ЭВМ	2
13	Лабораторная работа №9. Построение минимального остовного дерева нагруженного графа	2
	Итого	**18**

Лабораторная работа № 1.
Множества и операции над ними

Цель работы*:* изучить основные понятия теории множеств и основные операции над множествами.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Теоретическая часть

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества. Под *множеством* понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Таково интуитивное определение понятия множества, данное основателем теории множеств Георгом Кантором. Это понятие в математике является первичным и, следовательно, не имеет строгого определения. Объекты, составляющие множество, будем называть его элементами. Множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C,..., а элементы множеств — строчными буквами a, b, c,.... Основное отношение между элементом a и содержащим его множеством *A,* обозначается так: $a \in A$ *(a* принадлежит *A).* Если *a* не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ *(a* не принадлежит A). Некоторые множества имеют общепринятые обозначения: *N* — множество натуральных чисел; *R* — множество действительных чисел; *Z* — множество целых чисел.

Имеется два существенно различных способа задания множеств. Можно либо указать правило для определения того, принадлежит или не принадлежит рассматриваемому множеству любой данный объект, либо дать полный перечень элементов этого множества.

Первый способ мы назовем описанием множества, а второй способ — перечислением множества. Например, обозначение $\{x \in U: \alpha(x)\}$ читается: «элементы множества *U,* обладающие свойством α» — это описание множества. Элементы перечисляемого множества принято заключать в скобки: {1, 2, 3,... } — множество натуральных чисел; {2, 4, 6,... } — множество четных чисел. Под многоточием в первом случае подразумеваются все последующие натуральные числа, а во втором — четные.

Нас часто будут интересовать множества логических возможностей, потому что анализ таких множеств часто играет основную роль при решении той или иной проблемы.

Множество, состоящее из некоторых элементов другого множества, называется подмножеством этого последнего множества. С целью изучения всех подмножеств данного множества введем следующую терминологию. Исходное множество будем называть *универсальным множеством;* подмножества, содержащие один элемент, будем называть *единичными множествами;* множество, вовсе не содержащее никаких элементов, будем называть *пустым множеством* и обозначать 0.

В качестве примера возьмем универсальное множество *U,* состоящее из трех элементов *{a,b,c}.* Собственные подмножества *U* — это множества, которые содержат некоторые, но не все элементы *U.* Этими подмножествами являются три множества из двух элементов {a, b}, {a, c}, {b, c} и три единичных множества {a}, {b}, {c}.

Будем считать подмножеством множества *U* и пустое множество 0, не содержащее элементов *U.*

Другими словами, множество A называется подмножеством множества B (обозначаем A ⊂ B), если все элементы множества *A* принадлежат *B.* Это означает справедливость следующего утверждения: для любого элемента a, если a ∈ A, то a ∈ *B* при условии *A* ⊂ *B.*

Будем говорить также, что множество A содержится в B или имеется включение множества A в B. Множества A и B называются равными или совпадающими (обозначается $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если $A \subset B$ и $B \subset A$. Таким образом, чтобы доказать равенство множеств, требуется установить два включения.

Определим основные операции над множествами.

Дополнением к множеству A называется множество элементов, которые не содержатся *в A*. Обозначают его $\bar{A}$ и читают «дополнение множества *A к U*».

Пересечением множеств A и *B* называется множество элементов, принадлежащих и *A* и *B*. Обозначают $A \cap B$ и читают «пересечение *A* и B».

Если A и *B* — непустые множества, пересечение которых пусто, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то их называют непересекающимися множествами.

Объединением множестве и *B* называется множество элементов, принадлежащих либо *A,* либо *B* (либо обоим). Обозначают $A \cup B$ и читают «объединение A и *B»*.

Разностью множестве и *B* называется множество элементов, принадлежащих *A* и не принадлежащих *B*. Обозначают $A \setminus B$ и читают «разность A и B».

Порядок выполнения работы

1. Для заданного множества $A \cup (A \cap B)$ требуется выбрать множество, равное ему:
   $(A \cap B)$ $(A \cup B)$ B A
2. Для заданного множества $A \cap (A \cup B)$ требуется выбрать множество, равное ему:
   A $(A \cup B)$ $(A \cap B)$ B
3. Для заданного множества $A \cup (\vec{A} \cap B)$ требуется выбрать множество, равное ему:
   $(A \cup B)$ $(A \cap B)$ $(A \setminus B)$ A
4. Для заданного множества $A \cap (\vec{A} \cup B)$ требуется выбрать множество, равное ему:
   $(A \cup B)$ B $(A \setminus B)$ $(A \cap B)$
5. Дан универс $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его подмножества $A = \{x|2 < x < 6\}$, $B = \{x \mid x$ - четно$\}$. Найдите множество $A \cup B$.
6. Дан универс $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его подмножества $C = \{x|x \geq 3)$, $D = \{1,2,4,5\}$. Найдите множество $C \cap D$.
7. Даны множества $A = \{x|x$ – кратно $2\}$, $B = \{x|x$ – кратно $3\}$, $C = \{x|x$ – кратно $5\}$ $A \subset N$, $B \subset N$, $C \subset N$. С помощью операций над множествами выразить множество всех чисел, делящихся на 30.
8. Даны множества $A = \{x|x$ – кратно $2\}$, $B = \{x|x$ – кратно $3\}$, $C = \{x|x$ – кратно $5\}$, ,$A \subset N$, $B \subset N$, $C \subset N$. С помощью операций над множествами выразить множество всех чисел, делящихся на 6, но не делящихся на 5.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение множества, подмножества.
2. Что такое элемент множества?
3. Перечислите основные операции над множествами и расскажите о каждой из них. Приведите примеры.
4. Какое множество называют пустым?

Лабораторная работа №2
Операции над высказываниями

Цель работы: изучить логические операции над высказываниями.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Теоретическая часть

Значение истинности составного высказывания определяется значениями истинности его компонент. Высказывания будем обозначать прописными буквами латинского алфавита X, Y, *Z* ....

Составные высказывания будем получать из простых с помощью логических операций: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность,* которые осуществляются при помощи логических связок: $\bar{\ }$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$. Наименования и обозначения логических операций представлены в таблице ниже.

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	не	$\bar{\ }$
Конъюнкция	и	$\wedge$
Дизъюнкция	или	$\vee$
Импликация	если…то	$\rightarrow$
Эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

При рассмотрении той или иной связки мы хотим знать, каким именно образом истинность составного высказывания, порожденного этой связкой, зависит от истинности его компонент. Очень удобно изображать эту зависимость, пользуясь таблицами истинности, которые называются также интерпретациями логических операций. Каждой строке таблицы истинности взаимно однозначно соответствует набор составляющих высказываний и соответствующее значение составного высказывания. Наборы из нулей и единиц, соответствующих составляющим высказываниям, в каждой строке таблицы истинности имеют стандартное расположение, т.е. расположены в лексикографическом порядке (порядке возрастания).

Пусть даны два произвольных высказывания X и Y.

Отрицанием высказывания *X* называется высказывание $\bar{X}$, которое истинно, когда *X* ложно, и ложно, когда *X* истинно.

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание X $\wedge$ Y, которое истинно только в том случае, когда X и Y оба истинны.

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание X $\vee$ Y, которое истинно, когда хотя бы одно из них

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание X → Y, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно, а Y ложно.

Эквивалентностью высказываний X и Y называется высказывание X ↔ Y, которое истинно тогда и только тогда, когда X и Y оба истинны или ложны.

Для образования составных высказываний наряду с единичным использованием каждой основной связки можно пользоваться основными связками многократно, получая более сложные составные высказывания — аналогично тому, как с помощью основных арифметических операций образуются сложные алгебраические выражения.

Например, составными будут высказывания:

$(X \wedge Y)$; $X \wedge \bar{X}$; $(X \vee Y) \vee \bar{X}$

Их следует читать «изнутри наружу», подобно алгебраическим выражениям, в которых сначала группируются величины, заключенные в самые внутренние скобки, затем эти скобки в свою очередь группируются и т. д. Если скобок нет, то операции надо выполнять в следующем порядке: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание. Каждое составное высказывание имеет свою таблицу истинности, которая может быть построена стандартным образом.

Новые высказывания могут быть образованы при помощи нескольких логических операций и составлять формулы, некоторые из которых рассматриваются как логические операции, осуществляемые при помощи других логических связок: $|$; $\downarrow$; $\oplus$.

Название	**Прочтение**	**Обозначение**
Штрих Шеффера	Антиконъюнкция	$\mid$
Стрелка Пирса	Антидизъюнкция	$\downarrow$
Сумма по модулю два	Антиэквивалентность	$\oplus$

Штрих Шеффера, X | Y или антиконъюнкция, по определению $(X \mid Y) = \overline{X \wedge Y}$.

Стрелка Пирса, или антидизъюнкция, по определению $X \downarrow Y = \overline{X \vee Y}$.

Сумма по модулю два, или антиэквивалентность, по определению $X \oplus Y = \overline{X \leftrightarrow Y}$.

Заметим, что таблицы истинности логических операций содержат 2^n строк, где n — число простых высказываний.

Порядок выполнения работы

Задание 1: Какие из следующих предложений являются высказываниями:

а) Москва–столица России; **б)** студент университета; **в)** $\sqrt{3}+2\sqrt{7}-28$; **г)** Луна есть спутник Марса; **д)** $a>0$; **е)** Луна есть спутник Земли; **ж)** число 2 является корнем алгебраического уравнения $2x^3-3x^2+1=0$; **з)** уравнение $x^3+x^2-x+1=0$ имеет своими корнями множество чисел $\{1;-1;2\}$.

Задание 2: Среди следующих высказываний укажите элементарные и сложные. В сложных высказываниях выделить грамматические связки:

1) число 27 не делится на 3; **2)** число 15 делится на 5 и 3; **3)** если число 126 делится на 9, то оно делится на 3; **4)** число 7 является делителем числа 42; **5)** число 1269 делится на 9 тогда и только тогда, когда 18 делится на 9; **6)** 45 кратно 3 и 42 кратно 3; **7)** 45 кратно 3 и 12 не кратно 3; **8)** $\sqrt{25}=5$ или $\sqrt{25}=-5$; **9)** $2\leq5$; **10)** Если число 212 делится на 3 и 4, то оно делится на 12; **11)** Число 212 – трехзначное и кратно 3 и 4, **12)** Число 999 – трехзначное и кратно 3 и 111.

Задание 3: Какие из следующих высказываний истинны:

а) если $2\times2=4$, то $2<3$; **б)** если $2\times2=4$, то $2>3$; в) если $2\times2=5$, то $2<3$; **г)** если $2\times2=5$, то $2>3$.

Задание 4: Пусть p и q обозначают высказывания: p={Я учусь в школе}, q ={Я люблю математику}. Прочтите следующие сложные высказывания:

а) $\bar{p}$; **б)** $\bar{\bar{p}}$; **в)** $p \wedge q$; **г)** $p \wedge \bar{q}$; **д)** $\bar{p} \wedge q$; **е)** $\bar{p} \wedge \bar{q}$; **ж)** $\overline{p \wedge q}$.

Задание 5: На вопрос, кто из трех учащихся изучал немецкий язык, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал немецкий язык?

Задание 6: По мишени произведено три выстрела. Рассмотрим высказывания p_k – мишень поражена k-м выстрелом», k =1,2,3.Что означают следующие высказывания: **а)** $p_1 \vee p_2 \vee p_3$; **б)** $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$; **в)** $(\overline{p}_1 \vee \overline{p}_2) \wedge p_3$?
Какие из этих трех высказываний истинны, если истинно p_3, а p_1 и p_2 – ложны?

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение высказывания.
2. Что называется отрицанием высказывания?
3. Что такое импликация; эквиваленция двух высказываний?
4. Перечислите важнейшие равносильности алгебры логики.
5. Какая формула называется тождественно-истинной; тождественно-ложной?
6. Что такое таблица истинности?

Лабораторная работа № 3
Построение таблиц истинности булевых функций

Цель работы: научиться строить таблицы истинности логических формул.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Теоретическая часть

Булевой функцией $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется любая функция, в которой аргументы и функция могут принимать значение либо 0, либо 1.

Булеву функцию от n переменных можно задать таблицей истинности, в которой наборы значений аргументов расположены в порядке возрастания их номеров: сначала идет набор, представляющий собой двоичное разложение 0 (этот набор имеет номер 0); затем идет набор, являющийся двоичным разложением 1, потом 2, 3 и т.д.

Отрицание - булева функция одной переменной, которая определяется следующей таблицей истинности

x	0	1	Обозначения
f(x)	1	0	¬x, $\bar{x}$

Элементарные булевы функции двух переменных приведены в следующей таблице.

x	0	0	1	1	название	обозначения
y	0	1	0	1		
$f_1(x,y)$	0	0	0	1	Конъюнкция	x&y, x·y, $x \wedge y$, min (x,y)
$f_2(x,y)$	0	1	1	1	Дизъюнкция	$x \vee y$, max(x,y), x + y
$f_3(x,y)$	1	1	0	1	Импликация	$x \to y$, $x \Rightarrow y$, $x \supset y$
$f_4(x,y)$	1	0	0	1	Эквивалентность	x~y, $x \leftrightarrow y$, $x \equiv y$
$f_5(x,y)$	0	1	1	0	Сумма по модулю_2	$x \oplus y$, x + y
$f_6(x,y)$	1	1	1	0	Штрих Шеффера	x | y
$f_7(x,y)$	1	0	0	0	Стрелка Пирса	$x \downarrow y$, $x \circ y$

С помощью суперпозиции элементарных булевых функций можно построить более сложные функции, которые могут зависеть от любого числа переменных. Запись булевых функций через элементарные булевы функции будем называть **формулой** реализующей данную функцию.

Для более компактной записи сложных функций введем следующие соглашения:

1) внешние скобки опускаются;

2) сначала производятся операции в скобках;

3) считается, что приоритет связок убывает в следующем порядке:, ($\wedge$,|, $\downarrow$), $\vee$, ($\to$, $\oplus$), $\leftrightarrow$.

Для равносильных связок (в скобках) приоритет определяется слева на право.

Пример 3.1. Расставить скобки в формулах:

1) $x \vee y \leftrightarrow z \oplus x$; 2) $x \downarrow y \vee z$; 3) $x \oplus y) \leftrightarrow z \to x \wedge y \vee \neg z$.

Решение: 1) в формуле $x \vee y \leftrightarrow z \oplus x$ скобки расставляются следующим образом: $((x \vee y) \leftrightarrow (z \oplus x))$;

2) т.к. операция $\downarrow$ сильнее операции $\vee$ согласно замечанию имеем $((x \downarrow y) \vee z)$;

3) в формуле (x ⊕ y) ↔ z → x ∧ y ∨ ¬z используя введенное старшинство связок; получаем, что данная формула равносильна ((x ⊕ y) ↔ (z → ((x ∧ y) ∨ (¬z)))).

Пример 3.2. Составить таблицы истинности для формул:
а) $x \leftrightarrow \overline{y} \rightarrow (y \oplus x)$; б) $x \mid ((\overline{y} \vee z) \downarrow (\overline{x \wedge z})$.

Решение:

а) используя введенное старшинство связок, получим, что данная формула равносильна x ↔ ($\overline{y} \rightarrow (y \oplus x)$), а таблица истинности примет вид:

x	y	$\overline{y}$	$(y \oplus x)$	$\overline{y} \rightarrow (y \otimes x)$	$x \leftrightarrow (\overline{y} \rightarrow (y \oplus x))$
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

б) составим таблицу истинности для формулы $x \mid ((\overline{y} \vee z) \downarrow (\overline{x \wedge z})$

x	y	z	$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{y} \vee \overline{z}$	$x \wedge z$	$\overline{x \wedge z}$	$(\overline{y} \vee \overline{z}) \downarrow (\overline{x \wedge z})$	F (x, y)
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

Формула называется тождественно **истинной (ложной),** если она принимает значение **1 (0)** при всех значениях входящих в нее переменных.

Пример 3.3. Является, ли формула $((x \rightarrow y) \wedge \overline{y}) \rightarrow \overline{x}$ тождественно истинной?

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	x → y	(x → y) ∧ $\overline{y}$	$((x \rightarrow y) \wedge \overline{y}) \rightarrow \overline{x}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Формула равна 1 при всех значениях входящих в нее переменных, следовательно, она тождественно истинная (тавтология).

Порядок выполнения работы

Задание 1: Составить таблицу истинности данной булевой функции:

1. $(x \oplus yz) \rightarrow x \vee z$
2. $(x \mid y) \rightarrow (\overline{z}y \oplus x)$
3. $(x \rightarrow \overline{y}) \oplus (z \vee x)$
4. $(x \vee y) \oplus (\overline{z} \leftrightarrow y)$
5. $(x \vee \overline{y \rightarrow z}) \oplus y$
6. $x \leftrightarrow (y \oplus z \vee y)$
7. $x \vee y\overline{z} \oplus y$
8. $(x \oplus y)z \vee \overline{x}$
9. $(x \rightarrow \overline{y}) \oplus (z \vee y)$
10. $(x \mid y)z \vee \overline{x}$

Задание 2: Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$?

Задание 3: Проверить, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1. $p \to p$	6. $\overline{p} \to p$	11. $p \vee (p \leftrightarrow \overline{p})$	16. $\overline{p} \vee \overline{p \to p}$
2. $p \vee \overline{p}$	7. $\overline{p} \leftrightarrow p$	12. $\overline{p \vee \overline{p}}$	17. $(p \to \overline{p}) \vee q$
3. $\overline{p \wedge \overline{p}}$	8. $(p \vee p) \to p$	13. $(p \to p) \vee \overline{p}$	18. $(0 \to p) \vee (q \to 1)$
4. $\overline{p} \leftrightarrow \overline{p}$	9. $p \wedge (p \oplus \overline{p})$	14. $p \leftrightarrow (\overline{p} \to (p \downarrow p))$	19. $(p \to 1) \vee q$
5. $0 \to p$	10. $p \mid \overline{p} \vee p$	15. $p \leftrightarrow p \vee \overline{p}$	20. $(\overline{p} \vee p) \vee q$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение булевой функции.
2. Перечислите способы задания булевой функции.
3. Перечислите двоичные функции двух переменных.
4. Расскажите о функциях штрих Шеффера и стрелка Пирса.
5. Порядок выполнения действий в формулах.

Лабораторная работа № 4
Тождественные преобразования булевых функций

Цель работы: научиться выполнять равносильные преобразования формул алгебры логики.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Теоретическая часть

Булевы функции f_1 и f_2 называются эквивалентными, если на всяком наборе ($a_1, a_2, ..., a_n$) нулей и единиц значения функций совпадают. Обозначение эквивалентных (равносильных) функций следующее: $f1 = f2$ или $f1 \equiv f2$.

Основные эквивалентности (H,H $_1$, H $_2$, H $_3$ ... означают некоторые булевы функции):

1. Закон двойного отрицания: $H = \overline{\overline{H}}$
2. Идемпотентность: $HH = H$, $H \vee H = H$
3. Коммутативность: $H_1 * H_2 = H_2 * H_1$, где символ $*$ означает одну из связок $\&, \vee, \oplus, \sim, |, \downarrow$.
4. Ассоциативность: $H_1 * (H_2 * H_3) = (H_1 * H_2) * H_3$, где символ $*$ означает одну из связок $\&, \vee, \oplus, \sim$.
5. Дистрибутивность: $H_1 \& (H_2 \vee H_3) = (H_1 \& H_2) \vee (H_1 \& H_3)$, $H_1 \vee (H_2 \& H_3) = (H_1 \vee H_2) \& (H_1 \& H_3)$.
6. Закон де Моргана: $\overline{H_1 \& H_2} = \overline{H_1} \& \overline{H_2}$, $\overline{H_1 \vee H_2} = \overline{H_1} \& \overline{H_2}$,
7. Правила поглощения: $H_1 \vee (H_2 \& H_1) = H_1$, $H_1 \& (H_2 \vee H_1) = H_1$
8. Законы склеивания: $H_1 \& H_2 \vee H_1 \& \overline{H_2} = H_1$, $(H_1 \vee H_2) \& (H_1 \vee \overline{H_2}) = H_1$
9. Законы инверсий: $H \vee \overline{H} = 1$, $H \& \overline{H} = 0$.
10. Правила операций с константами: $H \vee 1 = 1$, $H \& 1 = H$, $H \vee 0 = H$, $H \& 0 = 0$.

Все проведенные соотношения легко проверяются по таблицам истинности.

Пример 4.1. Упростить формулы, используя основные законы эквивалентности:

1) $x\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{z} \vee \bar{y}z = \bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y}z = \bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{x}$;

2) $$(x \to y) \wedge y \to x \overset{x \to y = \bar{x} \vee y}{=} \neg((x \to y) \wedge y) \vee x \overset{(6)}{=} (\neg(x \to y) \vee \neg y) \vee x \overset{x \to y = \bar{x} \vee y, (6)}{=}$$
$$= (x \wedge \neg y \vee \neg y) \vee x \overset{(3)}{=} (\neg y \vee \neg y \wedge x) \vee x \overset{(2)}{=} \neg y \vee x \overset{x \to y = \bar{x} \vee y}{=} y \to x;$$

3) $$x\bar{y}z \vee xy \vee xyz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z = xz(\bar{y} \vee y) \vee xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z = xz \vee xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z =$$
$$= (xz \vee x\bar{z}) \vee (xz \vee \bar{x}z) \vee xy = x(z \vee \bar{z}) \vee z(x \vee \bar{x}) \vee xy = x \vee z \vee xy = x(1 \vee y) \vee z = x \vee z;$$

4) $$\overline{\overline{x_1 \vee x_2x_3} \cdot \overline{\overline{\overline{x_1}x_2} \vee x_3}} = \overline{\overline{x_0}(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})} \vee \overline{(\overline{x_1}x_2)x_3} = (x_1 \vee x_2x_3) \vee (\overline{\overline{x_1}x_2} \vee x_3) = \overline{\overline{x_1}(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})} =$$
$$= x_1 \vee x_2x_3 \vee x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3.$$

Пример 4.2. С помощью равносильных преобразований упростить формулу

$$x\bar{y} \to (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}.$$

[illegible]

Любую запись а) - д) можно считать ответом.

Пример 4.3. Проверьте, будут ли эквивалентны следующие функции:

$(x \to z)(y \to z)$; $(x \vee y) \to z$.

С помощью равносильных преобразований получаем, что
$(x \to z)(y \to z) \equiv (\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee z) \equiv \bar{x}\bar{y} \vee z\bar{y} \vee \bar{x}z \vee z \equiv \bar{x}\bar{y} \vee z \equiv \overline{x \vee y} \vee z \equiv (x \vee y) \to z$, т.е. функции эквивалентны.

Пример 4.4. Доказать равносильность $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$.
$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x \wedge x \vee y \wedge x \vee x \wedge \bar{y} \vee y \wedge \bar{y} \equiv$
$\equiv x \vee y \wedge x \vee x \wedge \bar{y} \equiv x \wedge (1 \vee y \vee \bar{y}) \equiv x \wedge (1 \vee 1) \equiv x.$

Порядок выполнения работы

Задание 1: Доказать следующие равносильности:

1. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$
2. $x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \mid \bar{y}}$
3. $x \downarrow y \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$
4. $x \mid y \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$
5. $x \to \bar{y} \equiv y \to \bar{x}$
6. $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$
7. $x \vee (y \wedge x) \equiv x$
8. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \downarrow \bar{y}}$
9. $x \mid y \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$
10. $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$
11. $x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y$
12. $xy \to z \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
13. $x \oplus y \equiv \bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$
14. $(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \equiv x$
15. $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \equiv \bar{x}$
16. $(\bar{x} \vee y) \downarrow (\overline{\bar{y} \vee z}) \equiv \overline{(\bar{x} \vee y) \vee (\overline{\bar{y} \vee z})}$
17. $x \oplus (y \oplus z) \equiv (x \oplus y) \oplus z$
18. $x\bar{y} \to (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \equiv \overline{x\bar{y}z}$
19. $x \to (y \to z) \equiv x \wedge y \to z$
20. $\bar{x} \to \bar{y} \equiv 1 \oplus y \oplus xy$
21. $x \leftrightarrow y \equiv (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$

Задание 2: Показать, что формулы $\bar{b} \vee \bar{a}$, $a \wedge \bar{b} \to \bar{a}$, $a \wedge \bar{b} \to b$ имеют ту же таблицу истинности, что и импликация $a \to b$.

Задание 3: Проверьте, будут ли эквивалентны следующие функции:

1. $x \to (y \oplus z),\ (x \to y) \oplus (x \to z)$
2. $x \wedge (y \oplus z),\ (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
3. $x \wedge (y \leftrightarrow z),\ (x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$
4. $x \vee (y \mid z),\ (x \vee y) \mid (x \vee z)$
5. $x \oplus (y \to z),\ (x \to y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$
6. $x \mid (y \to z),\ (x \mid y) \to (x \mid z)$
7. $x \wedge (y \to z),\ xyz \vee \bar{x} \mid \bar{y}$
8. $x \vee (y \to z),\ (x \vee y) \to (x \vee z)$
9. $x \oplus (y \to z),\ (xy) \leftrightarrow (x \oplus z)$
10. $x \downarrow (y \leftrightarrow z),\ (x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$
11. $\bar{x} \downarrow (y \wedge \bar{z}),\ (x \leftrightarrow \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee z)$
12. $(y \vee \bar{x}) \oplus (\bar{y} \wedge z),\ (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$
13. $x \oplus y, y \oplus x$
14. $x \vee \bar{y}, \bar{x} \leftrightarrow y$
15. $\bar{x} \vee \bar{y}, \bar{x} \mid \bar{y}$
16. $\bar{x} \wedge \bar{y}, \bar{x} \downarrow \bar{y}$
17. $x(y \vee x), x$
18. $\bar{x} \wedge \overline{y \wedge x}, x$
19. $xy \downarrow z, z \downarrow xy$
20. $x \vee yz, (x \vee y)(x \vee z)$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Какие формулы называются эквивалентными?
2. Перечислите основные законы алгебры логики.
3. Значение каких логических функций зависит от порядка переменных?
4. Расскажите о способах доказательства равносильностей.
5. Перечислите свойства констант.

Лабораторная работа № 5
Нормальные формы алгебры логики

Цель работы: изучить алгоритмы построения ДНФ и КНФ.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Теоретическая часть

Множество всех булевых в базисе $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ образуют **булеву алгебру.** Если x - логическая переменная, $a = \sigma \in \{0,1\}$ то выражение

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x & если \quad \sigma = 1 \\ \bar{x} & если \quad \sigma = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x^{\sigma} = \begin{cases} 1 & если \quad x = \sigma \\ 0 & если \quad x \neq \sigma \end{cases},$$

называется литерой. Литеры x и $\neg x$ называются контрарными. **Конъюнктом** называется конъюнкция литер. **Дизъюнктом** называется дизъюнкция литер. **Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** называется дизъюнкция конечного числа конъюнктов. **Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** называется конъюнкция конечного числа дизъюнктов.

Пусть функция f записана в базисе $S1$. Данная функция приводится к нормальном форме следующим путем:

1. используем законы де Моргана, чтобы преобразовать формулу к виду, в котором знаки отрицания относятся только к отдельным переменным;

2. применяем правило снятия двойного отрицания: $\bar{\bar{x}} = x$;

3. далее следует использовать законы дистрибутивности, причем первый закон дистрибутивности для приведения к ДНФ, и второй закон дистрибутивности для приведения к КНФ.

Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо сами, либо их отрицания), причем в каждом отдельном конъюнкте или дизъюнкте любая переменная входит ровно один раз (либо сама либо ее отрицание), то эта форма называется **совершенной нормальной формой (СДНФ или СКНФ).**

Пример 5.1. По данной таблице истинности построить СДНФ.

Решение рассмотрим на примере функции $f(x, y, z)$, заданной таблично:

Таблица 5.1 – Табличное задание функции

x	y	z	Конституенты 1	Конституенты 0	$f(x,y,z)$
0	0	0	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$x \vee y \vee z$	0
0	0	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	$x \vee y \vee \bar{z}$	1
0	1	0	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$x \vee \bar{y} \vee z$	1
0	1	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	0
1	0	0	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \vee y \vee z$	0
1	0	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	1
1	1	0	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	1
1	1	1	$x \cdot y \cdot z$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	1

Конституенты_1 (или основные конъюнкции), включенные в таблицу, соответствуют конкретному набору нулей и единиц, которые принимают переменные x, y, z. Строятся конституенты_**1** по следующему правилу: переменная входит в произведение сама, если на данном наборе она принимает значение 1, в противном случае в произведение входит ее отрицание. **Правило для построения СДНФ:** следует выбрать строки, в которых функция равна 1, а затем взять дизъюнкцию соответствующих конституент **1**. Так для нашего примера, имеем

$$f(x,y,z)=\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z\vee\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}\vee x\cdot\bar{y}\cdot z\vee x\cdot y\cdot\bar{z}\vee x\cdot y\cdot z.$$

Пример 5.2. По данной таблице истинности построить СКНФ.

Конституенты_0 для набора нулей и единиц (которые принимают переменные x,y,z) строится следующим образом: переменная входит в дизъюнкцию сама, если на данном наборе она принимает значение 0, в противном случае в дизъюнкцию входит её отрицание. **Правило для построения СКНФ:** следует выбрать строки, в которых функция равна 0, а затем взять конъюнкцию соответствующих конституент_0. В результате получится искомая СКНФ. Так для нашего примера, имеем

$f(x,y,z)=(x\vee y\vee z)\cdot(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})\cdot(\bar{x}\vee y\vee z).$

Описанный способ нахождения СДНФ (СКНФ) по таблице истинности бывает часто более трудоемким, чем следующий алгоритм.

1.Для нахождении СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ.

2. Если в некоторый конъюнкт K не входит скажем переменная y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу $K\wedge(y\vee\bar{y})$ и, применяя 1-й закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ. Если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида $(y\vee\bar{y})$.

3. Если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них. В результате получается СДНФ.

Замечание: Для построения СКНФ дизъюнкт не содержащий скажем переменную y заменяем на эквивалентную формулу $D\vee y\cdot\bar{y}$ и, применяем 2-й закон дистрибутивности.

Пример 5.3. Построить СКНФ для функции F при помощи эквивалентных преобразований

$$F_1=x\,|\,(y\oplus z)=\bar{x}\vee\overline{(y\oplus z)}=\bar{x}\vee\overline{(\bar{y}z\vee y\bar{z})}=\bar{x}\vee\overline{\bar{y}z}\cdot\overline{y\bar{z}}=\bar{x}\vee(\bar{\bar{y}}\vee\bar{z})\cdot(\bar{y}\vee\bar{\bar{z}})=\bar{x}\vee(y\vee\bar{z})\cdot(\bar{y}\vee z)=$$
$$=(\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\cdot(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})\text{ - }СКНФ$$

Пример 5.4. С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. $F=\overline{((x\downarrow y)\to\bar{z})\leftrightarrow y}.$

Решение: Приведем функцию F к базису $S_1=\{\neg,\wedge,\vee\}$

$$F=\overline{(\bar{x}\cdot\bar{y}\to)\leftrightarrow y}=\overline{(\bar{\bar{x}\cdot\bar{y}}\vee\bar{z})\leftrightarrow y}=\overline{(x\vee y\vee\bar{z})\leftrightarrow y}=\overline{(x\vee y\vee\bar{z}\vee\bar{y})(\overline{x\vee y\vee\bar{z}}\vee y)}=$$
$$=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z\vee y}=\bar{\bar{x}}\cdot\bar{\bar{y}}\cdot z\cdot\bar{y}=(x\vee y\vee\bar{z})\bar{y}\text{ - }КНФ$$

Для приведения F к ДНФ, применим первый закон дистрибутивности.

$$F=x\bar{y}\vee y\bar{y}\vee\bar{z}\cdot\bar{y}=x\bar{y}\vee\bar{z}\cdot\bar{y}=x\bar{y}\vee\bar{z}\cdot\bar{y}\text{ - }ДНФ$$

Приведем функцию F к СДНФ:

$$F=x\bar{y}\vee\bar{z}\bar{y}=x\bar{y}(z\vee\bar{z})\vee\bar{z}\bar{y}(x\vee\bar{x})=x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z}\vee(\underline{\underline{\bar{z}\bar{y}x}}\vee\bar{z}\bar{y}\bar{x})=x\bar{y}z\vee x\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Приведем функцию F к СКНФ:

$$F=(x\vee y\vee\bar{z})\bar{y}=(x\vee y\vee\bar{z})(\bar{y}\vee x\bar{x})=(x\vee y\vee\bar{z})(\bar{y}\vee x)(\bar{y}\ldots$$
$$(\bar{y}\vee\bar{x}\vee z\bar{z})=(x\vee y\vee\bar{z})(\bar{y}\vee x\vee z)(\bar{y}\vee x\vee\bar{z})(\bar{y}\vee\bar{x}\vee z)(\bar{y}\vee\ldots$$

Пример 5.5. Привести функцию к ДНФ, используя 1-ый закон дистрибутивности.

$$x\cdot\bar{y}\cdot\overline{x\cdot y\cdot\bar{z}}\cdot(y\vee z)=x\cdot\bar{y}\cdot(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{\bar{z}})\cdot(y\vee z)=(x\cdot\bar{y}\cdot\bar{x}\vee x\cdot\bar{y}\cdot\bar{y}\vee x\cdot\bar{y}\cdot z)\cdot(y\vee z)=\text{- это КНФ}$$
$$=(0\vee x\cdot\bar{y}\vee x\cdot\bar{y}\cdot z)\cdot(y\vee z)=(x\cdot\bar{y}\vee x\cdot\bar{y}\cdot z)\cdot(y\vee z)=\text{- это другая КНФ}$$
$$=x\cdot\bar{y}\cdot y\vee x\cdot\bar{y}\cdot z\cdot y\vee x\cdot\bar{y}\cdot z\vee x\cdot\bar{y}\cdot z\cdot z=0\vee 0\vee x\cdot\bar{y}\cdot z\vee x\cdot\bar{y}\cdot z=x\cdot\bar{y}\cdot z\vee x\cdot\bar{y}\cdot z\text{ - это ДНФ}$$

Пример 5.6. Привести функцию к КНФ, используя второй закон дистрибутивности.

$$x\vee y\cdot\overline{x\cdot y\vee\bar{z}}=x\vee y\cdot(\overline{x\cdot y}\cdot\bar{\bar{z}})=x\vee y\cdot(\bar{x}\vee\bar{y})\cdot z=x\vee y\cdot z\cdot(\bar{x}\vee\bar{y})=(x\vee y\cdot z)\cdot(x\vee\bar{x}\vee\bar{y})=$$
$$=(x\vee y)\cdot(x\vee z)\cdot(1\vee\bar{y})=(x\vee y)\cdot(x\vee z)\text{ - это КНФ}$$

Пример 5.7. По данной таблице истинности построить СДНФ:

x	y	z	основные	$f(x,y,z)$

			конъюнкции	
0	0	0	$\bar x\cdot\bar y\cdot\bar z$	0
0	0	1	$\bar x\cdot\bar y\cdot z$	1
0	1	0	$\bar x\cdot y\cdot\bar z$	1
0	1	1	$\bar x\cdot y\cdot z$	0
1	0	0	$x\cdot\bar y\cdot\bar z$	0
1	0	1	$x\cdot\bar y\cdot z$	1
1	1	0	$x\cdot y\cdot\bar z$	1
1	1	1	$x\cdot y\cdot z$	1

Построим СКНФ для нашего примера на основании замечания.
1. Строим СДНФ для отрицания $\bar x\cdot\bar y\cdot\bar z\vee\bar x\cdot y\cdot z\vee x\cdot\bar y\cdot\bar z$.
2. Используем законы де Моргана, получаем

$$f=\overline{\overline{f}}=\overline{\bar x\cdot\bar y\cdot\bar z\vee\bar x\cdot y\cdot z\vee x\cdot\bar y\cdot\bar z}=\overline{\bar x\cdot\bar y\cdot\bar z}\wedge\overline{\bar x\cdot y\cdot z}\wedge\overline{x\cdot\bar y\cdot\bar z}=(x\vee y\vee z)\cdot(x\vee\bar y\vee\bar z)\cdot(\bar x\vee y\vee z).$$

Порядок выполнения работы

Задание 1: Какие из следующих функций записаны в нормальной форме, а какие нет?
1. $x\vee y\to z$; 2. $(x\cdot y\vee\bar x)\cdot(z\vee x)$; 3. $(x\vee z\vee\bar x)\cdot x\cdot y\cdot(\bar z\vee x)$;
4. $x\cdot y\vee\bar x\cdot y\cdot(x\vee y)$; 5. $x\cdot y\cdot z\cdot\bar x\cdot x\vee z\cdot\overline{y\vee x}$; 6. $(x\vee y\vee y\vee z)\cdot\bar z\cdot(z\vee x)$;
7. $x\cdot y\vee\bar x\cdot z\vee y\cdot z\cdot\bar x\vee z$; 8. $(x\vee y\vee z)(y\vee xy\vee\bar z)$; 9. $\overline{xyz}\vee\bar xy\vee x\overline{yz}$;
10. $\overline{xyz\vee x\bar yz}\vee xy\bar z$; 11. $(yz\vee xy\vee z)(x\vee y\vee\bar xz)$; 12. $\overline{xyz}\vee\overline{\bar xy}\vee\overline{xy\bar z}$;
13. $\overline{xy\vee z}\vee xy\vee\overline{\bar z\vee xy}$; 14. $(x\vee y\vee z\vee t)(x\vee y)t$; 15. $x\vee y\vee\bar z\vee(x\vee yz)$;
16. $\bar xyz\vee x\overline{yz}\vee yz(\bar x\vee z)$; 17. $x\vee y\vee\bar z\vee xy\vee\bar yz$; 18. $\overline{xyz}\vee(x\vee y)(\bar y\vee z)$;
19. $(x\vee\bar y\vee z)(\bar x\vee\bar y\vee z)(\bar x\vee y)$; 20. $xyz\vee xy\vee\overline{zt}\vee x\bar y\overline{zt}$; 21. $(x\vee y\vee z)\cdot x\cdot(z\vee x)$.

Задание 2: Привести следующие формулы к ДНФ и КНФ и по возможности упростить.
1. $x\vee yz$; 2. $x\leftrightarrow y$; 3. $x\leftrightarrow yz$;
4. $x\leftrightarrow y\leftrightarrow z$; 5. $xy\leftrightarrow\overline{xy}$; 6. $x\to(y\to z)$;
7. $\overline{xy}\vee(x\to y)$; 8. $xy\vee yz\vee\bar z$; 9. $x\vee\overline{yz}\vee\overline{xyz}$;
10. $\overline{\overline{\overline{x\vee y}\vee z}\cdot x}\vee x\cdot y$; 11. $(x\cdot y\vee z)\cdot(\bar y\vee\overline{x\cdot z})$; 12. $(\overline{xy}z\vee x)\cdot(\overline{x\vee y\vee\bar z}\vee xz)\vee y$;
13. $x\cdot y\cdot\overline{x\cdot\bar y\vee xyz}\vee\bar z)$; 14. $x\cdot y\to\overline{z\vee y}$; 15. $\overline{\bar z\to y}\vee\bar x\cdot z)$;
16. $(x\oplus\bar y)\to(z\oplus x)$; 17. $(x\downarrow y)\oplus z\cdot x$; 18. $(\bar x\vee z)\to(y\downarrow\bar z)$;
19. $(x\mid\bar y)\to x\cdot\overline{y\vee\bar z}$; 20. $\overline{x\vee\bar y}\leftrightarrow\overline{x\oplus z}$; 21. $\overline{x\cdot\bar y\vee xyz}\vee\bar z$.

Задание 3: Привести функции к совершенным формам (СДНФ и СКНФ) путем эквивалентных преобразований.
1. $xy\vee xy\bar z\vee z$; 2. $(x\vee z)\cdot(\bar x\vee y)$; 3. $x\vee y\vee z\bar x$;
4. $(x\vee y\vee z)\cdot y\cdot(\bar y\vee z)$; 5. $x\cdot y\cdot z$; 6. $\bar y\vee\bar x\cdot(yz\vee\bar z)$;
7. $(x\bar y\vee z)\cdot\bar x\cdot(x\bar z\vee y)$; 8. $xz\vee y\to\bar xz$; 9. $(\bar y\vee z)\oplus x\cdot y\cdot\bar z$;
10. $(\bar x\downarrow y)\vee y\bar z\wedge x$; 11. $\bar x\leftrightarrow\overline{x\cdot y\wedge\bar z}$; 12. $\overline{x\wedge\bar y}\downarrow\bar z$;
13. $\bar x\vee\bar y$; 14. $x\bar y(x\to y)$; 15. $(x\to y)\to x\vee\bar y$;
16. $x\to yz$; 17. $(x\to y)\to x$; 18. $xy\to(y\to x)$;
19. $x\vee y\to(x\to z)$; 20. $xy\to zt$; 21. $(\bar y\vee z)\oplus x\cdot y$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы:

1. Что такое элементарная дизъюнкция; элементарная конъюнкция?
2. Дайте определение ранга элементарной конъюнкции (дизъюнкции).
3. Дайте определение дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формы.
4. Дайте определение дизъюнктивной совершенной (конъюнктивной) нормальной формы.
5. Опишите алгоритм построения СДНФ (СКНФ).

Лабораторная работа № 6.
Методы построения полинома Жегалкина

Цель работы: научиться представлять булеву функцию в виде многочлена Жегалкина, используя методы преобразований и неопределенных коэффициентов.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Теоретическая часть

Множество булевых функций, заданных в базисе Жегалкина $S = \{\oplus, \wedge, 1\}$ называется алгеброй Жегалкина.

Основные свойства.

1. коммутативность $H_1 \oplus H_2 = H_2 \oplus H_1$, $H_1 \wedge H_2 = H_2 \wedge H_1$;
2. ассоциативность $H_1 \oplus (H_2 \oplus H_3) = (H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$, $H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3) = (H_1 \wedge H_2) \wedge H_3$;
3. дистрибутивность $H_1 \wedge (H_2 \oplus H_3) = (H_1 \wedge H_2) \oplus (H_1 \wedge H_3)$;
4. свойства констант $H \wedge 1 = H$, $H \wedge 0 = 0$, $H \oplus 0 = H$;
5. $H \oplus H = 0$, $H \wedge H = H$.

Утверждение 6.1. Через операции алгебры Жегалкина можно выразить все другие булевы функции:

$\bar{x} = 1 \oplus x$, $\quad x \vee y = x \oplus y \oplus xy$, $\quad x \sim y = 1 \oplus x \oplus y$,

$x \to y = 1 \oplus x \oplus xy$, $\quad x \downarrow y = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy$, $\quad x \mid y = 1 \oplus xy$.

Определение. Полиномом Жегалкина (полиномом по модулю 2) от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \ldots \oplus c_n x_n \oplus c_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus c_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где постоянные c_k могут принимать значения 0 или 1.

Если полином Жегалкина не содержит произведений отдельных переменных, то он называется линейным (линейная функция).

Теорема 6.1. Каждая булева функция представляется единственным образом в виде полинома Жегалкина.

Основные методы построения полиномов Жегалкина:

1. Метод, основанный на преобразовании формул. Используя утверждение 6.1. приводим формулу к виду содержащему связки из базиса S={⊕,&,1}; раскрываем скобки используя закон дистрибутивности (см. свойство 3); а затем применяем свойства 4 и 5.

2. Метод неопределенных коэффициентов. Полином Жегалкина, реализующий заданную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ищем в виде

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \ldots \oplus c_n x_n \oplus c_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus c_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Найдем коэффициенты c_k. Для этого последовательно придадим переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения из каждой строки таблицы истинности. В итоге получим систему из 2^n уравнений с 2^n неизвестными, имеющую единственное решение. Решив ее, находим коэффициенты

полинома $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример 6.1. Построить полином Жегалкина функции

а) $f(x, y) = x \to y$, б) $f(x, y, z) = \overline{((x \to y) \to \bar{z}) \leftrightarrow y}$.

Решение. а) 1 способ. Запишем искомый полином в виде $P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_{12} xy$

Пользуясь таблицей истинности

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \to y$	1	1	0	1

получаем, что

$f(0,0) = P(0,0) = c_0 = 1,$

$f(0,1) = P(0,1) = c_0 \oplus c_2 = 1,$

$f(1,0) = P(1,0) = c_0 \oplus c_1 = 0,$

$f(1,1) = P(1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_{12} = 1.$

Откуда последовательно находим, $c_0 = 1,$ $c_1 = 1,$ $c_2 = 0,$ $c_{12} = 1.$ Следовательно, $P(x,y) = 1 \oplus x \oplus xy.$

2 способ (метод преобразования формул.) Имеем

$x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x \cdot \bar{y}} = (x \cdot (y \oplus 1)) \oplus 1 = 1 \oplus x \oplus x \cdot y.$

б) 1 способ. Пусть полином Жегалкина имеет вид:

$P(x_1 y_1 z) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z \oplus c_{12} xy \oplus c_{13} xz \oplus c_{23} yz \oplus c_{123} xyz.$

$P(0,0,0) = c_0 = 1,$ (т.к. $f(0,0,0) = 1$).

$P(0,0,1) = c_0 \oplus c_3 = 0$ (т.к. $f(0,0,1) = 0$) $\Rightarrow 1 \oplus c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 1.$

$P(0,1,0) = c_0 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1.$

$P(1,0,0) = c_0 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0.$

$P(0,1,1) = c_0 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_{23} = 0 \Rightarrow c_{23} = 1.$

$P(1,0,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_3 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow 0 \oplus c_{13} = 1 \Rightarrow c_{13} = 1.$

$P(1,1,0) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_{12} = 0 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_{12} = 0 \Rightarrow c_{12} = 0.$

$P(1,1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_{12} \oplus c_{13} \oplus c_{23} \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_{123} = 0 \Rightarrow c_{123} = 1.$

Итак, получаем полином Жегалкина 3-й степени.

$P(x,y,z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus yz \oplus xyz.$

Пример 6.2. Построить полином Жегалкина для функции $f = (1011)$ методом неопределенных коэффициентов. Является ли f линейной.

Решение. Ищем полином Жегалкина $P(x,y)$ в виде:

$P(x,y) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 y \oplus c_3 xy.$

Используя таблицу истинности для f_2 , имеем

$P(0,0) = c_0 = 1 \Rightarrow c_0 = 1,$

$P(0,1) = c_0 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow 1 \oplus c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1.$

$P(1,0) = c_0 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow 1 \oplus c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0.$

$P(1,1) = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 = 1 \Rightarrow 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 1.$

Итак, $f = 1 \oplus y \oplus xy$ – не линейна.

Порядок выполнения работы

Задание 1: Построить полином Жегалкина, используя эквивалентные преобразования.

1. $x \leftrightarrow y,$
2. $x \to y,$
3. $xy \downarrow z,$
4. $(x \vee y)z,$
5. $x\bar{y} \mid \bar{z},$
6. $\bar{x}y(x \oplus y),$
7. $\overline{\overline{xyz} \vee \overline{xy}},$
8. $(x \to y)(y \to z),$
9. $(xy \vee \overline{xy}) \oplus \bar{z},$
10. $\bar{x} \downarrow \overline{yz},$
11. $(x \to y)(\bar{y} \to x),$
12. $x \vee y \vee z,$
13. $x \oplus y \downarrow z,$
14. $\bar{x} \vee \overline{yz} \vee \overline{xyz},$
15. $xy \to x \vee y \leftrightarrow x,$
16. $(\bar{x} \oplus y) \leftrightarrow (\bar{z}\bar{x}),$
17. $(z \wedge y) \oplus (\bar{y} \vee x \cdot \bar{z}),$
18. $(x \vee y) \to \bar{z} \mid y,$
19. $(x \leftrightarrow y) \downarrow (\bar{x} \oplus x \cdot \bar{z}),$
20. $(xz \leftrightarrow xyz) \vee (\overline{xy} \to \bar{z}).$

Задание 2: Постройте полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов.

1. $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$,
2. $x \to (y \to z)$,
3. $(x \mid y) \downarrow z$,
4. $xy(x \oplus y)$,
5. $\overline{xy}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z}$,
6. $(x \to y)(y \downarrow z)$,
7. $(x \to y) \vee \bar{z}) \mid x$,
8. $\bar{x}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}t \vee \bar{t}z$,
9. $x \downarrow y \to x \vee y \leftrightarrow x \mid y$,
10. $x \downarrow y \to x \mid y \oplus x$,
11. $\bar{z} \to x \leftrightarrow (\bar{x} \mid y)$,
12. $\overline{((x \mid y) \to z) \oplus y}$,
13. $\overline{(x \vee \bar{y}) \to (z \oplus \bar{x})}$,
14. $\overline{(x \mid \bar{y}) \oplus (z \to \bar{x})}$,
15. $(z \to x) \oplus (x \mid \bar{y})$,
16. $(x \vee \bar{y}) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$,
17. $(\bar{x} \vee \bar{y}) \to (\overline{z \oplus x})$,
18. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y \mid x)}$,
19. $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$,
20. $(x \vee \bar{y}) \to (\overline{z \leftrightarrow \bar{x}})$.

Задание 3: Постройте полином Жегалкина, если функции $f(x, y, z)$ и $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ заданны вектором своих значений:

1) (1010 0101);
2) (0011 1101);
3) (0011 1100);
4) (0101 0011);
5) (0010 0011);
6) (0101 1001);
7) (1111 0101);
8) (0111 1111);
9) (1101 1011);
10) (0010 0011);
11) (1111 1100 1011 1001);
12) (1101 0011 1101 0011);
13) (1100 1011 1111 1011);
14) (0101 0101 1110 0011);
15) (0000 1111 0101 1100);
16) (0011 1101 0011 1100);
17) (1111 1100 1011 1011);
18) (0101 1111 1101 0011);
19) (0000 1011 1011 1010);
20) (0001 1101 1010 1111).

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение полинома Жегалкина.
2. Всякую ли булеву функцию можно представить в виде многочлена Жегалкина?
3. Расскажите об алгоритме построения многочлена Жегалкина посредством СДНФ.
4. Расскажите об алгоритме построения многочлена Жегалкина методом треугольника.

Лабораторная работа № 7.
Задачи комбинаторики.

Цель работы – изучить основные формулы комбинаторики, комбинации элементов, правила суммы и произведения.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Теоретическая часть

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. Приведем наиболее употребительные из них.

Определение: Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$\mathrm{P}_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Заметим, что по определению:

$$0! = 1.$$

Пример: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$\mathrm{P}_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Определение: *Размещениями* называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Пример: Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$\mathrm{A}_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Определение: Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример: Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

$$C_{10}^2 = 10!/(2!\,8!) = 45.$$

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$\mathrm{A}_n^m = \mathrm{P}_m \cdot C_n^m.$$

Замечание. Выше предполагалось, что все n элементов различны, Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае *комбинации с повторениями* вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$$\mathrm{P}_n(n_1, n_2, \ldots) = n!/(n_1!\,n_2!\ldots),$$

где $n_1 + n_2 + ... = n$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

Порядок выполнения работы

1. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

3. В классе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?

4. Сколькими способами можно выбрать 4 делегата на конференцию, если в группе 20 человек?

5. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

6. Из трех математиков и десяти экономистов надо составить комиссию, состоящую из двух математиков и шести экономистов. Сколькими способами это можно сделать?

7. В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?

8. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?

9. Начальник транспортного цеха пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в совещании, если было всего 78 рукопожатий?

10. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, затем одну из трёх дверей, а за каждой из них её ожидают четыре двери. Пройдя дверь, крыса не может вернуться через неё обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение комбинаторики.
2. Что такое перестановки? Запишите формулу вычисления количества перестановок из n объектов.
3. Что такое размещения? Запишите формулу для вычисления размещений.
4. Что такое сочетания? Запишите формулу для вычисления сочетаний.
5. Чем отличаются сочетания от размещений?

Лабораторная работа № 8.
Представление графов в памяти ЭВМ.

Цель работы – изучить основные понятия теории графов, матрицы смежности и инцидентности.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

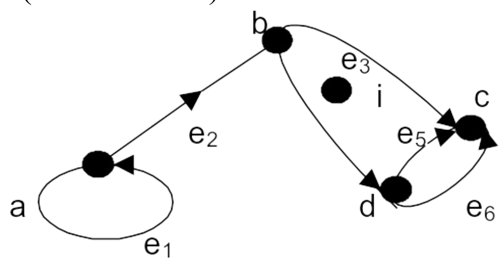
Теоретическая часть

Графом G(V, E) называется совокупность двух множеств – непустого множества V (множества вершин) и множества E неупорядоченных пар различных элементов множества V (E – множество ребер или дуг).

$$G(V, E)=\langle V; E\rangle,\quad V\neq\varnothing,\quad E\subset V\times V,\quad E=E^{-1}.$$

При этом дуга (a,b) называется исходящей из вершины a и заходящей в вершину b.

Элементы множества V называются вершинами (или узлами, или точками) графа G, а элементы из E – его ребрами (или линиями).



Дугу, выходящую из некоторой вершины и заходящую в ту же вершину, будем называть *петлей*, а дуги, выходящие из одной и той же вершины и заходящие в одну и ту же вершину, будем называть *кратными*. Так, дуги e_5 и e_6 являются кратными, а дуга e_1 – петлей. Вершину, из которой не выходит и в которую не заходит ни одна дуга, будем называть *изолированной*. Например, i – изолированная вершина.

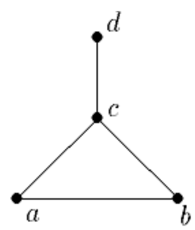
Вершина v инцидентна ребру e, если $v\in e$; тогда еще говорят, что e есть ребро при v. Две вершины, инцидентные ребру, суть его концевые вершины или концы; ребро соединяет свои концевые вершины.

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k, в которой любые два соседних элемента соединены ребром. Замкнутая цепь ($v_0=v_k$) называется циклом.

Граф называется связным, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

Способы задания графов

1. Геометрический



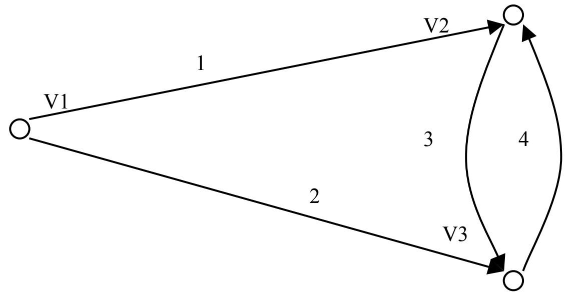
2. Матрица смежности - квадратная матрица, размерности, равной количеству вершин. При этом a[i, j]-целое число, равное количеству рёбер, связывающих i-ю, j-ю вершину. Если в графе нет петель, то диагональные элементы равны 0 . Если рёбра не повторяются, то все элементы 0 или 1. Если граф неориентированный, то матрица симметрична.

3. Матрица инцидентности – матрица размерности $m \times n$, где m – количество вершин, n – количество ребер или дуг.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \textit{если дуга } e_j \textit{ исходит из вершины } v_i \\ -1, \textit{если дуга } e_j \textit{ заходит в вершины } v_i \\ 2, \textit{если } e_j \textit{ петля при вершине } v_i \\ \quad 0 \textit{ в противном случае} \end{cases}$$

4. Список смежности (или список инцидентности) – список каждый элемент которого состоит из вершины графа и списка смежных с ней вершин.

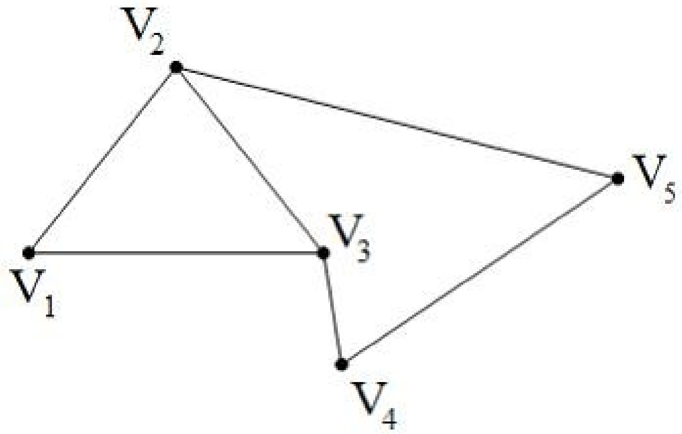
<u>Пример</u>. По графическому заданию графа составить матрицу смежности, матрицу инцидентности



<u>Решение</u>: Матрица смежности $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Матрица инцидентности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

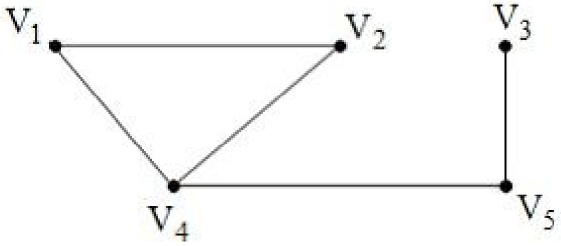
Порядок выполнения работы

Задание 1: Для графа G, изображенного на рисунке,



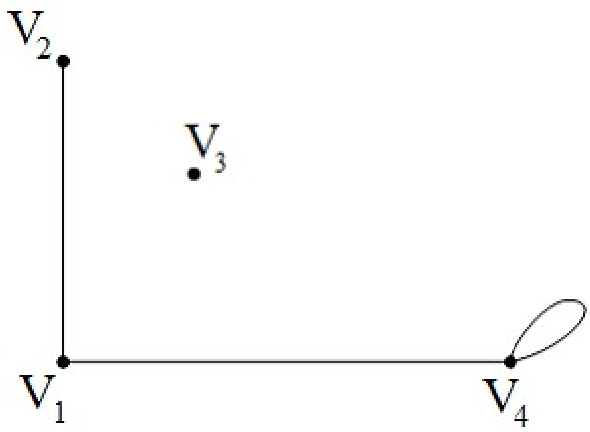
матрица смежности имеет вид …

Задание 2: Для графа G, изображенного на рисунке,



матрица смежности имеет вид …

Задание 3: Матрица смежности графа, изображенного на рисунке



имеет вид …

Задание 4: Длина минимального пути из вершины v_1 в v_7 в ненагруженном орграфе, заданном матрицей смежности:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

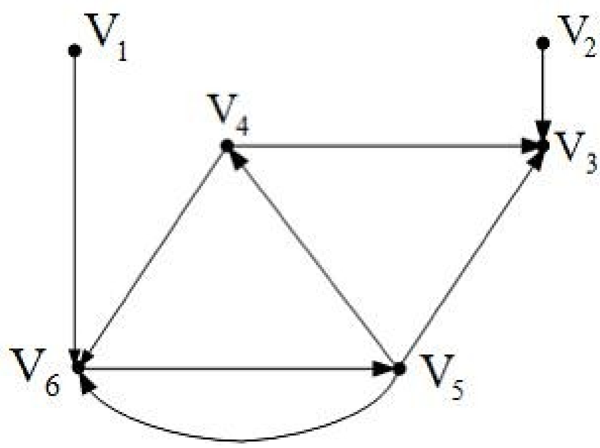
равна …

Орграф задан матрицей смежности

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

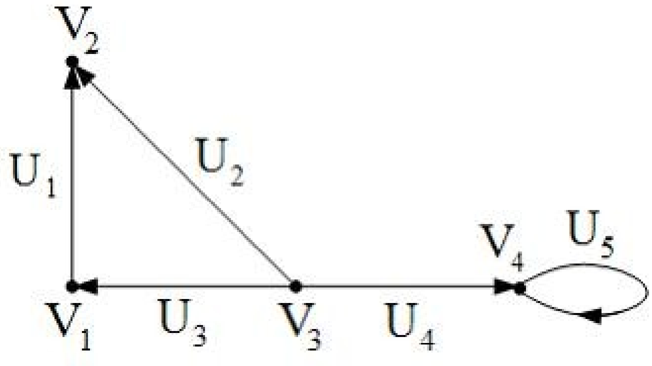
Тогда матрица сильной связности этого орграфа имеет вид…

Задание 5. Матрица смежности графа, изображенного на рисунке,



имеет вид …

Задание 6: Матрица инцидентности орграфа, изображенного на рисунке,



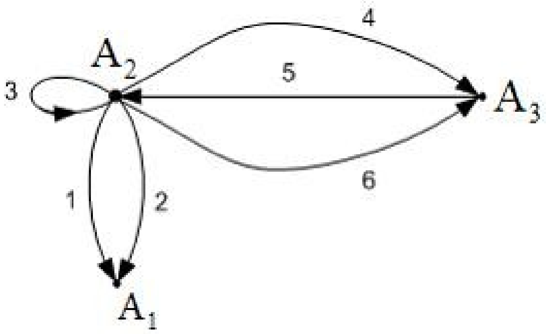
имеет вид …

Задание 7: Матрице инцидентности

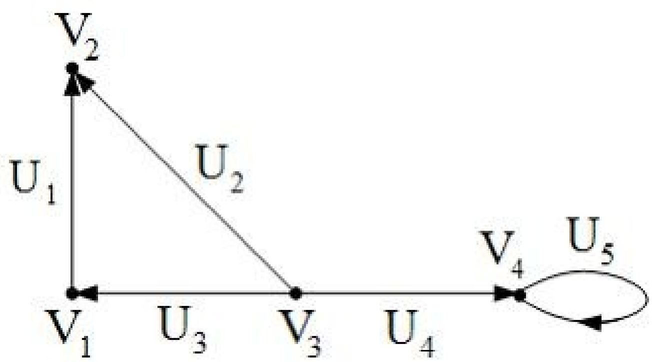
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует граф …

Задание 8: Матрица инцидентности мультиграфа G, изображенного на рисунке,

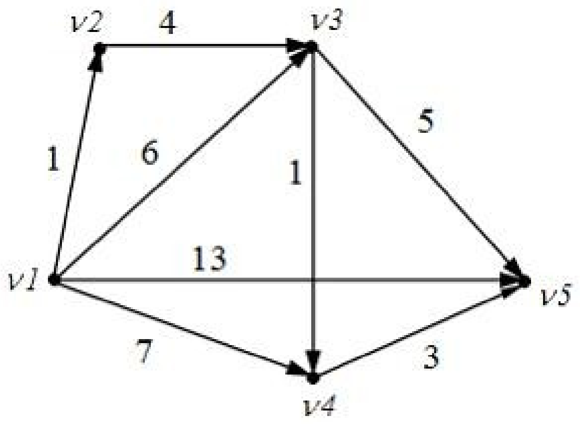


имеет вид … Матрица инцидентности орграфа, изображенного на рисунке,



имеет вид …

Задание 9: Кратчайший путь из вершины $v1$ в вершину $v5$ для нагруженного орграфа, представленного на рисунке,



равен …

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы:

1. Что такое граф?
2. Какие способы задания графа Вы знаете?
3. Чем отличается матрица смежности графа от матрицы инцидентности?
4. Найдите степени вершин для графов тетраэдра и куба.
5. Построить матрицы смежности и инцидентности для тетраэдра.
6. Оцените сверху количество дуг графа с n вершинами, на котором нет петель, противоположных и параллельных дуг.
7. Верно ли, что всякий путь является цепью, но не всякая цепь является путем?
8. Охарактеризуйте понятия пути, цепи, контура, цикла в графе. Приведите примеры.
9. Перечислите основные операции над графами. Дайте определения этих операций.

Лабораторная работа №9.

Построение минимального остовного дерева нагруженного графа

Цель работы: изучение алгоритма построения минимального остовного дерева нагруженного графа.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-2	способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Теоретическая часть

Граф $G = (X, A)$ называется *нагруженным*, если для каждого ребра (x_i,x_j) определена его длина (или вес) c_{ij}.

Пусть G - связный нагруженный граф. Задача построения *минимального остовного дерева* заключается в том, чтобы из множества остовных деревьев найти дерево, у которого сумма длин ребер минимальна.

Приведем типичные случаи, когда возникает необходимость построения минимального остовного дерева графа.

а) Нужно соединить n городов железнодорожными линиями (автомобильными дорогами, линиями электропередач, сетью трубопроводов и т.д.) так, чтобы суммарная длина линий или стоимость была бы минимальной.

б)Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

Задачу построения минимального остовного дерева можно решить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм Краскала.

Шаг 1. Установка начальных значений.

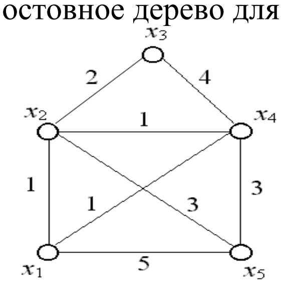
Вводится матрица длин ребер C графа G.

Шаг 2. Выбрать в графе G ребро минимальной длины. Построить граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин. Положить $i = 2$.

Шаг 3. Если $i = n$, где n - число ребер графа, то закончить работу (задача решена), в противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Построить граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_i. Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и инцидентную ему вершину, не содержащуюся в G_i. Присваиваем $i := i + 1$ и переходим к шагу 3.

Например, найдем минимальное остовное дерево для графа, изображенного ниже.



Шаг 1. Установка начальных значений.

Введем матрицу длин ребер C:

$C =$ [illegible]

.

Шаг 2. Выберем ребро минимальной длины. Минимальная длина ребра равна единице. Таких ребер три: (x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4). В этом случае можно взять любое. Возьмем (x_1, x_2). Построим граф G_2, состоящий из данного ребра и инцидентных ему вершин x_1 и x_2. Положим $i = 2$.

Шаг 3. Так как $n = 5$, то $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно одной из вершин x_1, x_2 и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_2 т. е. одной из вершин x_3, x_4, x_5. Таким образом, нужно выбрать ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5). Таких ребер длины единица два: (x_1, x_4) и (x_2, x_4). Можно выбрать любое. Возьмем (x_1, x_4). Вместе с этим ребром включаем в G_3 вершину x_4, не содержащуюся в G_2. Полагаем $i = 3$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

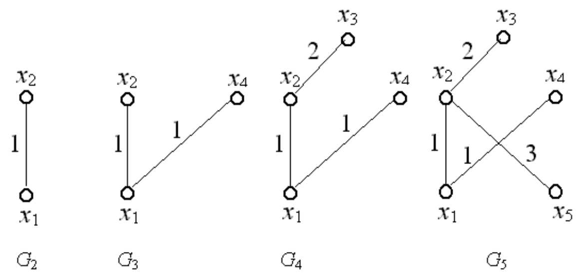
Шаг 4. Строим граф G_4, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_4, x_5). Такое ребро длины два одно: (x_2, x_3). Вместе с этим ребром включаем в G_4 вершину x_3, не содержащуюся в G_3. Полагаем $i = 4$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i \neq n$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Строим граф G_5, добавляя к графу G_3 новое ребро минимальной длины из ребер (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_4, x_5). Таких ребер длины три два: (x_2, x_5) и (x_4, x_5). Возьмем (x_2, x_5). Вместе с этим ребром включаем в G_5 вершину x_5, не содержащуюся в G_4. Полагаем $i = 5$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как $i = n$, то граф G_5 – искомое минимальное остовное дерево. Суммарная длина ребер равна $1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Процесс построения минимального остовного дерева изображен на рисунке.



Порядок выполнения работы

Пользуясь алгоритмом Краскала, найти минимальное остовное дерево для графа, заданного матрицей длин ребер.

Варианты заданий

1.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 4 & 6 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 13 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 12 & 6 & 20 & 14 \\ 12 & \infty & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & \infty & 10 & 12 \\ 20 & 4 & 10 & \infty & 6 \\ 14 & 6 & 12 & 6 & \infty \end{pmatrix}$

2.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & 3 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 10 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty & 4 & 5 \\ 1 & \infty & 2 & \infty & 1 \\ \infty & 2 & \infty & 1 & 1 \\ 4 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

3.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 3 & 5 & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 9 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 6 & \infty & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & \infty & 5 & 6 \\ 10 & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

4.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & \infty & 5 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & \infty & 1 & 6 \\ 1 & 5 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 11 & 7 \\ 7 & \infty & 3 & \infty & 4 \\ 2 & 3 & \infty & 1 & 5 \\ 11 & \infty & 1 & \infty & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$

5.1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 3 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} \infty & 2 & \infty & 5 & 5 \\ 2 & \infty & 8 & \infty & 7 \\ \infty & 8 & \infty & 10 & 1 \\ 5 & \infty & 10 & \infty & 13 \\ 5 & 7 & 1 & 13 & \infty \end{pmatrix}$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы.

1.Верно или неверно следующее утверждение: Минимальное остовное дерево может содержать циклы?

2.Постройте дерево наименьшей общей длины, ребра которого соединяют вершины правильного шестиугольника.

3. Сколько компонент связности может иметь дерево?

4. Можно ли построить дерево, все вершины которого имеют степень больше, чем единица?

5.Какая модель теории графов адекватна следующей задаче: Требуется построить схему электрической сети, в которой клеммы должны быть соединены с помощью проводов наименьшей общей длины.

6. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче:

Имеется сеть связи, соединяющая n узлов. Если выйдут из строя некоторые каналы, то связь между узлами может быть нарушена. Какие каналы можно удалить без нарушения связи? Какие каналы нужно удалить, чтобы связь не нарушалась, а общая стоимость всех каналов была минимальной?

7. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче:

Разрабатывается проект газопровода, соединяющего буровые скважины в Мексиканском заливе с находящейся на берегу приемной станцией. Следует выбрать проект, в котором строительство газопровода имеет минимальную стоимость.

8. Какая модель теории графов адекватна следующей задаче:

Пусть имеется n изолированных городов. Какое минимальное количество дорог между некоторыми городами надо построить, чтобы иметь возможность попасть из любого города в любой другой? Если заданы расстояния между городами, то как выбрать сеть дорог с минимальной общей длиной?

Учебно - методическое и информационное обеспечение дисциплины.
Список литературы

Основная литература:

Зарипова, Э. Р. Лекции по дискретной математике. Математическая логика: учебное пособие / Э. Р. Зарипова, М. Г. Кокотчикова, Л. А. Севастьянов. — Москва : Российский университет дружбы народов, 2014. — 120 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/22190.html

Дополнительная литература:

Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов : учебное пособие / Р. Хаггарти. — Москва : Техносфера, 2012. — 400 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12723.html

Интернет-ресурсы:

1. http://www.biblioclub.ru -ЭБС "Университетская библиотека онлайн"
2. http://e.lanbook.com - электронно-библиотечная система «ЛАНЬ»
3. http://elibrary.ru/ - eLIBRARY.RU - НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА