МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Математика

Направление подготовки	09.03.02 Информационные системы и технологии
Профиль	Информационные системы и технологии
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная
Учебный план	2020г
Изучается	в 1,2 семестрах

Пятигорск, 2020г.

1.ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ

Содержание практических занятий соответствует темам теоретического курса «Математика» и способствует углублению знаний и получению практических навыков по выполнению необходимых вычислений и расчетов.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование знаний по основным разделам дисциплины, необходимым студентам как для освоения базовых и специальных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2. НАИМЕНОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ Темы	Наименование работы	Обьем часов	Форма проведения
	1 семестр		
1	Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы.	1,5	
1	Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.	1,5	
2	Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы.	1,5	
2	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	1,5	
3	Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями.	1,5	
3	Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.	1,5	
3	Векторное пространство, его размерность и базис.	1,5	
4	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.	1,5	
5	Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.	1,5	
5	Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.	1,5	
5	Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Общее уравнение линий второго порядка.	1,5	
6	Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости	1,5	

	в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.		
6	Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.	1,5	
6	Прямая линия в пространстве. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой.	1,5	
6	Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.	1,5	
9	Способы задания последовательности. Вычисление предела последовательности с помощью определения. Ограниченные и неограниченные последовательности.	1,5	
9	Вычисление предела последовательности. Число e.	1,5	
9	Вычисление предела функции. Односторонние пределы функций.	1,5	
	Итого за 1 семестр	27	
	2 семестр		
10	Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования.	1,5	
10	Дифференцирование сложной и обратной функций.	1,5	
10	Геометрический и механический смысл производной.	1,5	
10	Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.	1,5	
11	Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции.	1,5	
11	Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.	1,5	
11	Исследование функций при помощи производных и построение их графиков.	1,5	
12	Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.	1,5	
13	Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.	1,5	
14	Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.	1,5	
14	Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций	1,5	
15	Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	1,5	
16	Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела.	1,5	

	Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения.		
19	Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.	1,5	
19	Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент.	1,5	
20	Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум.	1,5	
21	Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.	1,5	
21	Приложения двойного интеграла.	1,5	
26	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.	1,5	
27	Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.	1,5	
29	Системы дифференциальных уравнений, основные понятия. Интегрирование нормальных систем. Системы уравнений с постоянными коэффициентами.	1,5	
30	Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.	1,5	
31	Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.	1,5	
32	Функциональные ряды. Сходимость и равномерная сходимость. Степенные ряды. Сходимость степенного ряда. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.	1,5	
	Итого за 2 семестр	**36**	
	Итого	**63**	

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Раздел 1. Алгебра

Практическое занятие 1. Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы.

Цель занятия: сформировать умение выполнять действия над матрицами, вычислять ранг матрицы; использовать изученные алгоритмы при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

Прямоугольная таблица из $m \cdot n$ чисел, содержащая m – строк и n столбцов называется *матрицей* и обозначается

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают $A = \| a_{ij} \|$, $i = 1,2,\ldots, m$; $j = 1,2,\ldots, n$.

Сложение матриц.

Пусть даны две матрицы A и B одинакового строения. Их суммой называется матрица $C = A + B$ того же строения, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5-3 \\ 4+1 & 1-2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов. Действие сложения матриц может быть распространено на случай любого конечного числа слагаемых одинаковых строений.

Разностью B - A матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X, что

$$A + X = B.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица O, все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей. Очевидно, $A + O = A$, $A - A = O$.

Разность $O - A$ обозначается через $-A$. Матрица $-A$ называется *противоположной* матрице A.

Умножение матриц.

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α, надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \| a_{ij} \| = \| \alpha a_{ij} \|$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$, $\alpha A = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицы B на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A.

Элемент матрицы $C = B \cdot A$, расположенный в i-ой строке и j –ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i – ой строки матрицы B на соответствующие элементы j – го столбца матрицы A.

Следует отметить, что умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Например $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 5 \\ -1\cdot(-2) + 3\cdot 3 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 - 1\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Рассмотрим некоторую, *не обязательно квадратную* матрицу A. Выберем какие-нибудь s номеров строк $i_1, i_2, \ldots, i_s$ и s номеров столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_s$.

Определение. *Минором порядка* s матрицы A (соответствующим выбранным строкам и столбцам) называется определитель порядка s, образованный элементами, стоящими на пересечении выбранных строк и столбцов, т.е. число

$$M\begin{smallmatrix} i_1\ldots i_s \\ j_1\ldots j_s\end{smallmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & \ldots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}.$$

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка s, сколькими способами можно выбрать номера строк $i_1, i_2, ..., i_s$ и столбцов $j_1, j_2, ..., j_s$.

Определение. В матрице A размеров $m\times n$ минор порядка s называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $s+1$ равны нулю или миноров порядка $s+1$ у матрицы A вообще нет.

Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров, но все базисные миноры имеют один и тот же порядок. Действительно, если все миноры порядка $s+1$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка $s+2$, а, следовательно, и всех бóльших порядков.

Определение. *Рангом матрицы* называется порядок базисного минора, или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы, по определению, считают нулем.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$. Из определения ранга следует, что для матрицы A размеров $m\times n$ справедливо соотношение $0\le r(A)\le \min(m,n)$.

Рассмотрим способы вычисления ранга матрицы:

а) *Метод окаймляющих миноров*

Пусть в матрице найден минор M k-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\neq 0$. Существует только один минор третьего порядка, окаймляющий выбранный минор M_2. Вычислим его.

$$M_3=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 5\cdot 7+2\cdot 4\cdot(-3)+3\cdot 7\cdot(-2)-$$

$$-3\cdot 5\cdot(-3)-4\cdot 7\cdot(-1)-2\cdot(-2)\cdot 7=-35-24-42+45+28+28=0.$$

Значит, минор M_2 базисный, а ранг матрицы равен его порядку, т.е. $r(A)=2.$

Ясно, что перебирать таким способом миноры в поисках базисного – задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Существует, однако, более простой способ нахождения ранга матрицы – при помощи элементарных преобразований.

б) *Метод элементарных преобразований*

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называют следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановку строк;
4) такие же преобразования столбцов.

Преобразования 1 и 2 выполняются поэлементно.

Комбинируя преобразования первого и второго вида, мы можем к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк.

Теорема. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

Идея практического метода вычисления ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

заключается в том, что с помощью элементарных преобразований данную матрицу A приводят к виду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в котором «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Условимся называть матрицу B такого вида треугольной (иначе, ее называют диагональной, трапециевидной или лестничной). После приведения матрицы A к треугольному виду можно сразу записать, что $r(A) = r$.

В самом деле, $r(A) = r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга). Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \dots \cdot b_{rr} \neq 0,$$

а любой минор порядка $r+1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B. Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B.

Пример: Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение: Поменяем местами первую и вторую строку (т.к. первый элемент второй строки −1 и с ней будет удобно выполнять преобразования). В результате получим матрицу, эквивалентную данной.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Обозначим i -тую строку матрицы – C_i. Нам необходимо привести исходную матрицу к треугольному виду. Первую строку будем считать ведущей, она будет участвовать во всех преобразованиях, но сама остается без изменений.

На первом этапе выполним преобразования, позволяющие получить в первом столбце нули, кроме первого элемента. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2 $(C_2 - 2C_1)$, к третьей строке прибавим первую $(C_3 + C_1)$, а из третьей вычтем первую, умноженную на 3 $(C_3 - 3C_1)$. Получаем матрицу, ранг которой совпадает с рангом данной матрицы. Обозначим ее той же буквой A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из четвертой строки вторую. При этом имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получена матрица треугольного вида, и можно сделать вывод, что $r(A) = 2$, т. е. числу ненулевых строк. Коротко решение задачи можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \times C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - 2C_1, C_3 + C_1, C_3 - 3C_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

A = (2 ; 1 ; 0 ; 3)   и   B = (1 ; 0 ; –1 ; –2).

Вычислите следующие выражения:

а) A+B;

б) A–B.

Задача 2. Даны матрицы

A = (5 ; –2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 4 ; –3 ; 7 ; 2), B = (2 ; 2 ; 3 ; –1 ; 4 ; 1 ; 5 ; –3 ; 0), C=(1 ; –1 ; 2 ; 0 ; 1 ; 4 ; –5 ; 3 ; 6), D = (–1 ; 2 ; 3), F = (–2 ; 3 ; 1).

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) A+B;

б) B–D;

в) A+B–C;

г) A^T+B;

д) D^T+F;

е) F^T+A.

Задача 3. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

$A = (2 ; 1 ; 0 ; 3)$ и $B = (1 ; 0 ; -1 ; -2)$.

Вычислите следующие выражения:
а) A–2B;
б) 3A+2B;
в) 2A–4B.

Задача 4. Даны матрицы

$A = (5 ; -2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 4 ; -3 ; 7 ; 2)$, $B = (2 ; 2 ; 3 ; -1 ; 4 ; 1 ; 5 ; -3 ; 0)$, $C = (1 ; -1 ; 2 ; 0 ; 1 ; 4 ; -5 ; 3 ; 6)$, $D = (-1 , 2, 3)$, $X = (-2 ; 3 ; 1)$.

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):
а) 2A+B;
б) 2B–D;
в) A+2B–3C;
г) $3A^T+B$;
д) D^T+2X;
е) 2X–D.

Задача 5. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка

$A = (2 ; 1 ; 0 ; 3)$ и $B = (1 ; 0 ; -1 ; -2)$

Вычислите A·B, B·A и A·B–B·A.

Задача 6. Даны матрицы

$A = (5 ; -2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 4 ; -3 ; 7 ; 2)$, $B = (2 ; 2 ; 3 ; -1 ; 4 ; 1 ; 5 ; -3 ; 0)$, $C = (1 ; -1 ; 2 ; 0 ; 1 ; 4 ; -5 ; 3 ; 6)$, $D = (-1 ; 2 ; 3 ; 0 ; 4 ; 5)$, $F = (-2 ; 3 ; 1)$

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):
а) A·B и B·A;
б) D·C и C·D;
в) A·F и F·A;
г) D·F и F·D;
д) F·A;
е) $F^T \cdot A$.

Задача 7. Вычислить ранг матрицы двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 18 & -6 & -12 & -24 \\ 0 & 6 & 7 & 23 & 11 \end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 13 & 0 \\ 7 & 7 & -6 & 3 & 12 \\ -16 & -11 & -17 & 56 & -36 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 & 8 & 11 \\ 2 & -2 & -5 & 1 & 0 \\ 9 & 41 & -10 & 37 & 55 \end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & 15 & -9 & 20 & 7 \\ 3 & -1 & -6 & 1 & 2 \\ 6 & -18 & -9 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 13 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 4 & -27 & -2 \end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & 10 & -7 \\ 3 & 5 & -14 & 2 & 2 \\ 16 & 55 & -103 & 64 & -21 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -9 & 8 & 16 \\ 1 & 2 & -5 & 6 & 12 \\ 5 & 6 & -19 & 20 & 40 \end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 12 & 0 & 9 \\ -2 & 4 & 6 & 11 & 8 \\ 2 & 29 & 48 & 22 & 43 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 1 \\ 15 & -11 & 7 & 20 & 7 \end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -12 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & -9 & 0 \\ 5 & 20 & -30 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

Вопросы:

1. Какие матрицы можно складывать и по какому правилу?
2. Какими свойствами обладает операция сложения матриц? Есть ли отличия от свойств сложения чисел?
3. Пусть заданы матрицы A размера $m_1 \times n_1$ и B размера $m_2 \times n_2$. Какому условию должны удовлетворять числа $m_{1,2}$ и $n_{1,2}$, чтобы была определена операция сложения матриц A + B?

4. Как умножить матрицу на число?

5. Какими свойствами обладают операция умножения матрицы на число? Есть ли отличия от свойств умножения чисел?

6. Пусть заданы матрицы A размера $m_1\times n_1$ и B размера $m_2\times n_2$. Какому условию должны удовлетворять числа $m_{1,2}$ и $n_{1,2}$, чтобы было определено произведение матриц $A\cdot B$?

7. Дайте определение ранга матрицы.

8. Какие алгоритмы вычисления ранга матрицы Вы знаете?

Практическое занятие 2. Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.

Цель занятия: сформировать умение вычислять определитель n-го порядка, вычислять обратную данной матрицу; использовать изученные алгоритмы при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

Вычисление определителей

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок) называется определителем матрицы A.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заметим, что не квадратная матрица не имеет определителя.

Число $a_{11}\ a_{22}\ -\ a_{21}\ a_{12}$ называется определителем второго порядка и обозначается символом $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

Схематически формула дл я вычисления определителя третьего порядка выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель третьего порядка также равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}; \qquad \Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

$$\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}; \qquad \Delta=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$$

$$\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}; \qquad \Delta=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

Например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\Delta=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислить определитель любого порядка. В качестве примера рассмотрим определитель четвертого порядка и разложим его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(5+0-3-4-0+15)+$$

$$+1(5+0-9-12-0+10)+2(15+8+9-36-3-10)-3(0-2+3+9-0-1)=$$

$$=13-6+2\cdot(-17)-3\cdot 9 = 13-6-34-27=-54$$

Рассмотренный определитель можно вычислить другим способом. А именно, умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки и, наконец, умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими с элементами четвертой строки. Тогда получим определитель 4-го порядка, в первом столбце которого стоят нули, кроме первой строки, т.е. имеем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 24-30+36+12-36-60=-54$$

Обратная матрица и ее нахождение.

Пусть задано некоторое число a и пусть существует такое число m, что am = 1. Число m в этом случае называется обратным для a. Если, теперь, рассмотрим квадратную матрицу n–го порядка, то единичная матрица E будет играть роль единицы. Естественно поставить вопрос о существовании обратной матрицы, т.е. такой матрицы, которая в произведении с данной дает единичную матрицу E.

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица X (того же порядка n) называется обратной для A, если AX = XA = E.

Квадратная матрица n-го порядка называется особенной (вырожденной), если ее определитель равен нулю. Если же Δ (A) $\neq 0$, то A называется несобственной (невырожденной) матрицей.

Для нахождения обратной матрицы, рассмотрим матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и пусть } \qquad \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Обратной матрицей A^{-1} будет матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где Aij есть алгебраическое дополнение элемента aij определителя $\Delta = \Delta$ (A).

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 0 - 3 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Проверка: A A-1 = E

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка A = (2 ; 1 ; 0 ; 3) и B = (1 ; 0 ; –1 ; –2).
Вычислите следующие выражения:
а) detA;
б) detB
в) det(A·B).
Проверьте, что det(A·B)= detA·detB.

Задача 2. Даны квадратные матрицы 3– го порядка
A = (5 ; –2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 4 ; –3 ; 7 ; 2) и B = (2 ; 2 ; 3 ; –1 ; 4 ; 1 ; 5 ; –3 ; 0)
Вычислите следующие выражения:
а) detA;
б) detB
в) det(A·B).
Проверьте, что det(A·B)= detA·detB.

Задача 3. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Задача 4.Задана квадратная матрица 3– го порядка, найти обратную матрицу.
(2 ; 3 ; 1 ; 3 ; 4 ; 2 ; 1 ; 1 ; 2) , (4 ; 3 ; 0 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1) , (0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 8 ; 1 ; 1 ; 4 ; 2),
(1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9) .

Вопросы:

1. Что называется определителем квадратной матрицы?
2. Дайте определение минора и алгебраического дополнения элемента a_{ik}.
3. Чему равен определитель матрицы 1–го порядка? Как вычислить определитель, разлагая его по первой строке? Напишите соответствующую формулу для определителя 2–го, 3–го и 4–го порядков.
4. Как вычислить определитель, разлагая его по произвольной строке (столбцу)? Сформулируйте соответствующую теорему и напишите формулы разложения определителя по i–ой строке (k–му столбцу).
5. Напишите разложение определителя по первой строке через дополнительные миноры, а не алгебраические дополнения.
6. Сформулируйте свойства определителей и докажите их для определителей 3–го порядка.
7. Для квадратных матриц A и B 3–го порядка докажите формулу $\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$.
8. Какая матрица называется обратной?
9. Каковы условия существования обратной матрицы?
10. Может ли матрица иметь две обратных?

Практическое занятие 3. Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы.

Цель занятия: сформировать умение решать невырожденные системы линейных уравнений; использовать изученные алгоритмы при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Здесь a_{ik} ($i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$) — коэффициенты системы, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные и $b_1, \ldots, b_n$ – свободные члены.

Совокупность n чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ называется решением системы, если при подстановке их в каждое уравнение вместо неизвестных все уравнения обращаются в тождества.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. Если система решений не имеет, то она называется несовместной.

Квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется основной матрицей (или просто матрицей) системы.

Матрица порядка $n\times(n+1)$

$$A_{\text{расш}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

составленная из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы.

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами:

$x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ — определитель матрицы системы и Δ_k — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой k–ого столбца столбцом свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ 2x-3y+z=3 \\ 4x+y-2z=10 \end{cases}$$

Решение: Найдем основной и дополнительные определители.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6-6+8-36-1+8=-21 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 10 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30-9+20-90-5+12=-42$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -6-60+20+36-10+20=0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -30+10+24+60-3-40=21$$

По формулам Крамера имеем

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-42}{-21}=2; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{0}{-21}=0; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{21}{-21}=-1.$$

Ответ: $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \;\; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что основная матрица A невырожденная.

Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Помножив матричное уравнение $A \cdot X = B$ на матрицу A^{-1} слева, получим формулу, на которой основан матричный метод решения систем линейных уравнений:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Замечание. Отметим, что матричный метод решения систем линейных уравнений в отличие от метода Гаусса имеет ограниченное применение: этим методом могут быть решены только такие системы линейных уравнений, у которых, во-первых, число неизвестных равно числу уравнений, а во-вторых, основная матрица невырожденная.

Пример. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A \cdot X = B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30.$$

Обратную матрицу A^{-1} составим одним из методов, описанных в пункте 3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

По формуле матричного метода решения систем линейных уравнений получим

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вопросы и задачи:

Используя а) формулы Крамера, б) метод обратной матрицы найти решения следующих систем линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

Вопросы:

1. Сформулируйте правило Крамера.
2. Какие варианты решения системы уравнений возможны в случае, когда определитель матрицы системы равен нулю?
3. Можно ли применить правило Крамера для однородной системы уравнений?
4. Сколько решений имеет однородная система n линейных уравнений с n неизвестными в случае, когда определитель ее матрицы не равен нулю?
5. Какое решение однородной системы с определителем, отличным от нуля, получается по правилу Крамера и почему?

Практическое занятие 4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель занятия: сформировать умение решать системы линейных уравнений; использовать изученные алгоритмы при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = в_m \end{cases}$$

Будем производить над системой следующие элементарные преобразования:

1. Вычеркивание уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$.
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.
3. Перемена местами двух уравнений.

Пусть теперь $a_{11} \neq 0$.(Если $a_{11} = 0$,то мы поменяем местами первое уравнение с тем уравнением, где коэффициент при x_1 отличен от нуля). Исключим теперь x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению прибавим первое уравнение, умноженное на ($-\frac{a_{21}}{a_{11}}$), затем прибавим к третьему уравнению первое, умноженное на $(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$ и т.д. к последнему уравнению прибавим первое, умноженное на $(-\frac{a_{m1}}{a_{11}})$. При этом получим систему

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = a_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = a_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mr}x_r + \cdots + c_{mn}x_n = a_m \end{cases}$$

Далее, применив те же рассуждения к полученной системе, исключим из уравнений, начиная с третьего x_2 и т.д.

Продолжая этот процесс, мы придем к одному из двух случаев:

1. Либо после определенного шага получиться система, содержащая уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = в$ и $в \neq 0$. Тогда наша система не имеет решений, т.е. несовместна.

2. либо система не содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = в$ и $в \neq 0$. Тогда рано или поздно мы придем к системе

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = a_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = a_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = a_r \end{cases}$$

Возможны два случая:

a) $r = n$. Тогда последнее уравнение последней системы имеет вид: $c_{nn}x_n = a_n$, откуда $x_n = \frac{a_n}{c_{nn}}$.

Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} и т.д. из первого уравнения системы находим x_1.

b) $r < n$. Тогда система имеет бесчисленное множество решений.

Замечание. С практической точки зрения процесс решения системы можно облегчить, если вместо преобразований над самой системой производить преобразования над соответствующей расширенной матрицей системы.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножив первую строку на $-\frac{3}{2}$, затем умножив первую строку на $-\frac{5}{2}$, наконец, умножив первую строку на -1, сложим первую строку последовательно со второй, с третьей и с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

В последней матрице мы умножили вторую и третью строку на 2. Далее 1 и 2 строки оставляем без изменения. Сперва умножим вторую строку на $-\dfrac{3}{7}$ и сложим с третьей строкой, затем умножим вторую строку на $-\dfrac{2}{7}$ и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{52}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Последнюю матрицу мы получили умножив третью строку на $\dfrac{1}{2}$ и сложив с четвертой строкой. Последняя четвертая строка означает, что мы имеем уравнение:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -7$$

следовательно, по сказанному выше система несовместна.

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножим сперва первую строку на (-1) и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой и, наконец, умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторую матрицу мы получим сложив сперва вторую строчку с третьей, затем сложив вторую строчку с четвертой. Нулевые строчки выбрасываем. Остается система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ \quad x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \end{cases} \qquad (*)$$

Будем считать x_3 и x_4 свободными неизвестными, обозначая их: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$

Из второго уравнения системы (*) найдем x_2

$$x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2$$

Подставив x_2 в первое уравнение, получим:

$x_1 + 2(10\alpha - 17\beta - 2) - 3\alpha + 5\beta = 1$ или

$x_1 + 20\alpha - 34\beta - 4 - 3\alpha + 5\beta = 1$ или

$x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5$.

Таким образом, данная система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5 \\ x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2 \end{cases} \qquad \alpha \in (R)$$

Вопросы и задачи:

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13 \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$

Вопросы:

1.Как решается система линейных уравнений методом Гаусса?

2.Как преобразуется матрица системы при применении метода Гаусса?

3.Являются ли системы уравнений, соответствующие матрицам, получающимся в результате элементарных преобразований строк расширенной матрицы, эквивалентными? Обоснуйте ответ.

Практическое занятие 5. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями.

Цель занятия: сформировать умение выполнять линейные операции над векторами и действия над векторами, заданными проекциями; использовать изученные алгоритмы при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

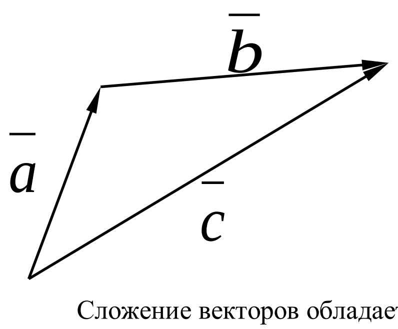
Направленный отрезок будем называть вектором и обозначать $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *или* $\bar{a}, \bar{в}, \ldots$

Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают и обозначают $\bar{o}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину равную нулю.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых. Два вектора называются равными, если выполнены следующие три условия: 1) длины векторов равны, 2) векторы параллельны (коллинеарны), 3) векторы направлены в одну и ту же сторону.

1. Сложение векторов

Суммой $\bar{a} + \bar{в}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{в}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\bar{a}$ в конец вектора $\bar{b}$ при условии, что вектор $\bar{b}$ приложен к концу вектора $\bar{a}$ (правило треугольника) и записывают $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.



Сложение векторов обладает следующими основными свойствами:

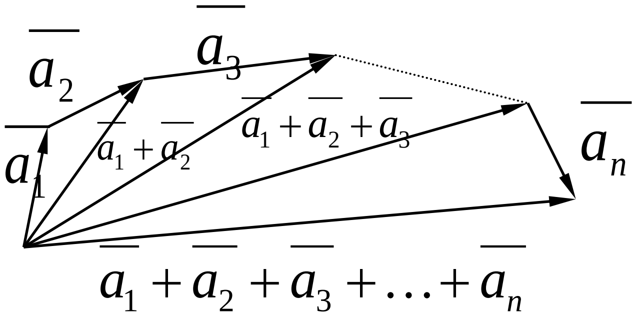
1. Коммутативность: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

2. Ассоциативность: для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ выполняется равенство $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$

3. Прибавление нулевого вектора к любому вектору $\bar{a}$ не меняет последнего: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}.$

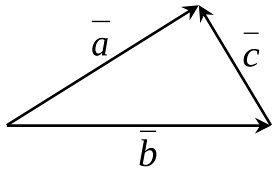
4. Сумма вектора $\bar{a}$ и противоположного вектора $\bar{a}^1$ равна нулевому вектору, т. е. $\bar{a} + \bar{a}^1 = 0$

Из второго свойства следует, что если даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots \overline{a_n}$, расположенные так, что конец предыдущего вектора является началом последующего, то сумма $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}$, будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\bar{a}_1$ в конец вектора $\bar{a}_n$.

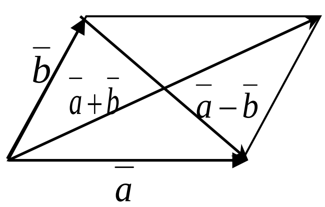


2. <u>Вычитание векторов</u>

Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой третий вектор $\overline{c}$, что $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$ и обозначает $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$. Чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно их отнести к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора – вычитаемого в конечную точку вектора – уменьшаемого.



<u>Замечание.</u> Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) правилом параллелограмма: если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\overline{a} + \overline{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а вторая диагональ, идущая из конца вектора $\overline{b}$ в конец вектора $\overline{a}$ есть разность $\overline{a} - \overline{b}$.



3. <u>Произведение вектора на число</u>

Произведением $\alpha\overline{a}$ (или $\overline{a}\alpha$) вектора $\overline{a}$ на вещестренное число α называется вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, (причем вектор $\overline{b}$ имеет длину, равную $|\alpha||\overline{a}|$) и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\overline{a}$ в случае $\alpha > 0$ и противоположное направление в случае $\alpha < 0$.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число можно выразить так: при умножении вектора $\overline{a}$ на число α вектор $\overline{a}$ растягивается (сжимается) в α раз.

При этом, если $\alpha > 1$, то $\overline{a}$ растягивается, если $0< \alpha <1$, то вектор $\overline{a}$ сжимается и вектор $\alpha\overline{a}$ сохраняет то же направление, что и вектор $\overline{a}$.

Если же $\alpha < 0$, то вектор $\overline{a}$ растягивается при $|\alpha| > 1$ и сжимается при $|\alpha| < 1$ и при этом происходит изменение направления на противоположное.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1. $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$ (распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов).
2. $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ (распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел).
3. $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$ (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Так как по определению вектор есть направленный отрезок, а проекции направленного отрезка на оси координат находят как разности одноименных координат конца и начала направленного отрезка, то точно также находят проекции вектора на координатные оси. Эти проекции и называются координатами вектора.

Например, пусть даны точки A(3, -2, 5) и B(-1, 2, 3). Тогда координатами вектора $\overline{AB}$ будут: -1-3=-4; 2-(-2)=4, 3-5=-2 и обозначают $\overline{AB}$ ={-4, 4, -2}.

В дальнейшем, координаты (проекции на оси) мы будем обозначать $\overline{a}$ ={x, y, z}.

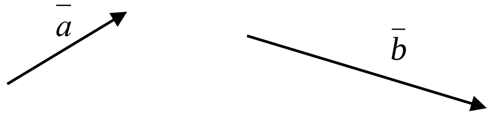
Отметим, что действия над векторами можно произвести в координатах.

Пусть даны векторы в координатах: $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

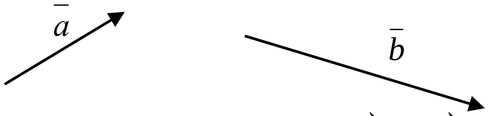
Тогда: $\overline{a} + \overline{b} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$, $\overline{a} - \overline{b} = \{x_1 - x_2,\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$, $\alpha\overline{a} = \{\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1\}$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. По данным векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *постройте векторы* $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$ *и* $-\vec{a}-\vec{b}$



Задача 2. По данным векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ постройте векторы $3\vec{a}$, $-1/2\vec{b}$ *и* $2\vec{a}+1/3\vec{b}$.



Задача 3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ *и* $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны. Какой геометрический смысл имеет это условие?

Задача 4. Определите координаты начала вектора $\vec{a} = \{3;1;-2\}$, если его конец совпадает с точкой $M(1;-1;2)$.

Задача 5. Пусть в некотором базисе $\vec{a} = \{2;-1;3\}$ *и* $\vec{b} = \{1;-2;-4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}+2\vec{b}$ в этом базисе.

Вопросы:

1. Что называется геометрическим вектором?
2. Какие векторы считаются равными?
3. Как определяется длина вектора?
4. Что такое орт вектора АВ?
5. Как определяется угол между векторами?
6. Какие векторы называются ортогональными?
7. Какие векторы называются коллинеарными?
8. Какие векторы называются компланарными? Как определяется сумма векторов АВ и ВС?
9. Как определяется сумма векторов АВ и АС?
10. Как определяется произведение вектора и действительного числа?
11. Как определяется разность векторов АВ и АС?
12. Какими свойствам обладают линейные операции с векторами?
13. Что такое координаты вектора в фиксированном базисе?
14. Как сложить векторы, если заданы их координаты в некотором базисе?
15. Как умножить вектор на число, если заданы его координаты в некотором базисе?

Практическое занятие 6. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Цель занятия: сформировать умение вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения векторов; использовать изученные алгоритмы при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Скалярное произведение векторов

Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Скалярными произведениями двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$(\overline{a}\overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\vartheta, \quad \text{где } \vartheta - \text{угол между векторами}$$

Можно дать другое определение скалярного произведения двух векторов. Из теории проекций известно, что

$$пр_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\vartheta \quad \text{и } пр_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\cos\vartheta.$$

Т.о. скалярное произведение двух векторов есть число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на первый вектор.

$$(\overline{a}\overline{b}) = |\overline{b}|пр_{\overline{b}}\overline{a} \quad или \quad (\overline{a}\overline{b}) = |\overline{a}|пр_{\overline{a}}\overline{b}.$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими основными свойствами:

1. Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обращается в нуль в том случае, когда по крайней мере один из векторов является нулевым или если векторы перпендикулярны.

2. Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно произведению длин этих векторов, если данные векторы параллельны, т. е. $\varphi = 0$.

$$\left(\overline{a}\,\overline{b}\right) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 0 = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$$

Отсюда следует, что скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату длины этого вектора, т. е. $\left(\overline{a}\cdot\overline{a}\right) = |\overline{a}|^2$

3. Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством умножения: $\left(\overline{a}\,\overline{b}\right) = \left(\overline{b}\overline{a}\right)$.

4. Скалярное произведение обладает распределительным свойством относительно суммы векторов: $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{a}\bar{c})+(\bar{b}\bar{c})$.

Пусть даны два вектора в координатах: $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$. Скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который обладает следующими свойствами:

1) $\bar{c}\perp\bar{a}$ и $\bar{c}\perp\bar{b}$, то есть вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, где лежат вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) Длина вектора $\bar{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) вектор $\bar{c}$ направлен в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ к второму вектору $\bar{b}$ вокруг вектора $\bar{c}$ представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\bar{c}$.

Векторное произведение обозначают символом $\bar{c}=[\bar{a}\bar{b}]$ или $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$.

а) Основные свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулевому вектору в том и только в том случае, когда эти векторы параллельны.

Из этого свойства следует, что векторное произведение любого вектора на самого себя, т.е. $[\bar{a}\bar{a}]=0$.

2. Векторное произведение двух векторов антикоммутативно, а именно:

$$[\bar{a}\bar{b}]=-[\bar{b}\bar{a}]$$

3. Векторное произведение обладает свойствами сочетательности относительно числового множителя: $\alpha[\bar{a}\bar{b}]=[\alpha\bar{a}\cdot\bar{b}]$ или $[\bar{a}\cdot\alpha\bar{b}]$.

4. Векторное произведение векторов обладает распределительным свойством относительно векторов.

Векторное произведение векторов в координатах

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в координатах $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда

$$[\bar{a}\bar{b}]=\bar{c}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Пример. Пусть даны векторы $\bar{a}=\{2,-1,4\}$ и $\bar{b}=\{3,1,0\}$

$$[\bar{a}\bar{b}]=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+2l_3+12l_2+3ll_3-4l_1=-4l_1+12l_2+5l_3.$$

т.е. $[\bar{a}\bar{b}]=\bar{c}=\{-4,12,5\}$.

Смешанное произведение векторов.

Пусть даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Если из трех векторов любые два вектора умножить векторно, а затем полученный вектор $\bar{d}$ = [$\bar{a}$ $\bar{b}$] умножить на третий вектор $\bar{c}$ скалярно, то в результате мы получим число, которое и называется смешанным произведением трех векторов и обозначают: либо $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, либо ([$\bar{a}$ $\bar{b}$]$\bar{c}$).

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Смешанное произведение векторов в координатах.

Пусть даны три вектора в координатах

$\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}, \bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}.\bar{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$. Тогда смешанное произведение этих векторов можно вычислить по формуле:

$$([\bar{a}\bar{b}]\bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Многие задачи геометрии, физики, механики решаются методами векторной алгебры.

Пример. Вычислить, какую работу производит сила $\overline{F}$ = {3, -5, -2} когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A (2, 5, -3) в положение B (3, -1, -2).

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{S} = \overline{AB}$

$\overline{S}$ = {3-2; -1-5; -2+3} = {1; -6; 1}

Тогда величина искомой работа равна скалярному произведению ($\overline{F}\cdot\overline{S}$), т.е.

$W = (\overline{F}\ \overline{S}) = 3\cdot1 + (-5)\cdot(-6) - 2\cdot1 = 31$.

Пример. Найти угол, образованный векторами: $\bar{a}$ ={3,0,-4} и $\bar{b}$ ={-1,1,-2}.

Решение. $\cos\varphi = \dfrac{3\cdot(-1)+0\cdot1+(-4)\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+0+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{5}{5\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Пример. Даны координаты вершин треугольника A(1,2,0), B(3,0,-3) и C(5,2,6). Найти площадь этого треугольника.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$\overline{AB}$ = {3-1, 0-2, -3-0} = {2, -2, -3}

$\overline{AC}$ = {5-1, 2-0, 6-0} = {4, 0, 6}

Найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $[\overline{AB}\cdot\overline{AC}] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$

$$-12e_1 - 12e_2 + 8e_3 - 12e_2 = -12e_1 - 24e_2 + 8e_3$$

Итак, $[\overline{AB}\cdot\overline{AC}] = \bar{d}$ = {-12, -24, 8}.
Найдем модуль векторного произведения

$$|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]| = |\bar{d}| = \sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2} = \sqrt{144+576+64} = \sqrt{784} = 28.$$

Искомая площадь треугольника: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\right| = \dfrac{1}{2}\cdot28 = 14$ кв. ед.

Пример. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках O(1,1,2), A(2,3,-1), B(2,-2,4), C(-1,1,3).

Решение. Тетраэдр построен на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}$ и $\overline{OC}$ Найдем координаты этих векторов: $\overline{OA} = \{1,2,-3\}$, $\overline{OB} = \{1,-3,2\}$, $\overline{OC} = \{-2,0,1\}$. Тогда искомый объем:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\left[\overline{OA}\cdot\overline{OB}\right]\cdot\overline{OC}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|-3-8+18-2\right| = \frac{1}{6}\cdot5 = \frac{5}{6}$$

$V = \dfrac{5}{6}$ куб. ед.

Пример. Вычислить модуль вектора $\bar{a}$ = {6,3,-2}.

Решение. Если дан вектор $\bar{a}$ = {x, y, z}, то $|\bar{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Следовательно, имеем

$|\bar{a}| = \sqrt{6^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{49} = 7$.

Пример. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ = {12,-15,-16}.

Решение. $|\bar{a}| = \sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2} = \sqrt{625} = 25$.

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|} = \frac{12}{25}; \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5}; \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|} = \frac{-16}{25}.$$

<u>Пример</u>. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол φ = 60^0, причем $|\overline{a}| = 5$ и $|\overline{b}| = 8$. Определить $|\overline{a} + \overline{b}|$ и $|\overline{a} - \overline{b}|$.

<u>Решение</u>. Рассмотрим скалярное произведение ($\overline{a} + \overline{b}$) и ($\overline{a} + \overline{b}$) т.е.

$(\overline{a} + \overline{b})^2 = (\overline{a}\,\overline{a}) + 2(\overline{a}\,\overline{b}) + (\overline{b}\,\overline{b}) = |\overline{a}|^2 + 2|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 60^0 + |\overline{b}|^2 = 25+2\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2} +64 = 129$,

следовательно $|\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{129}$.

Аналогично, рассмотрим $(\overline{a} - \overline{b})^2$

$(\overline{a} - \overline{b})^2 = |\overline{a}|^2 - 2(\overline{a}\,\overline{b}) + |\overline{b}|^2 = 25-2\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2} +64 = 49$. $\quad |\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{49} = 7$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Определить, при каких значениях α и β векторы $\overline{a}$ ={-2, 3, β} и $\overline{b}$ ={α, -6, 2} коллинеарны.

Задача 2. Даны три вектора $\overline{p}$ = {3,-2,1}, $\overline{q}$ = {-1,1,-2}, $\overline{r}$ = {2,1,-3}. Найти разложение вектора $\overline{c}$ = {11,-6,5} по базису $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

Задача 3. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\overline{a}| = \sqrt{3}$, $|\overline{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{q} = \overline{a} - \overline{b}$.

Задача 4. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ = {5,2,5} на ось вектора $\overline{b}$ = {2,-1,2}.

Задача 5. Даны вершины тетраэдра: A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Задача 6. Найти орт вектора $\overline{a} = 3e_1 + 4e_2 - 12e_3$.

Задача 7. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\overline{a}$ = {1,-3,1} и $\overline{b}$ = {2,-1,3}.

Задача 8. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами A(1;2;1), B(3;-1;7) и C(7;4;-2). Убедиться, что этот треугольник равнобедренный. Сделать чертеж.

Задача 9. Зная одну из вершин треугольника A(2;-5;3) и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB}$ = {4;1;2} и $\overline{BC}$ = {3;-2;5}. Найти остальные вершины и координаты вектора $\overline{CA}$.

Вопросы:

1. Что называется скалярным произведением двух векторов? Физический смысл скалярного произведения векторов.
2. Основные свойства скалярного произведения векторов.
3. Как определяется скалярное произведение двух векторов в координатах?
4. Как найти угол между двумя данными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$?
5. Что называется векторным произведением двух векторов?
6. Геометрический и физический смысл векторного произведения двух векторов.
7. Как можно найти площадь треугольника, в трехмерном пространстве, если известны вершины данного треугольника?
8. Как найти векторное произведение двух векторов в координатах?
9. Как найти орт вектора $\overline{a}$ = {x, y, z}?
10. Основные свойства векторного произведения векторов
11. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл.
12. Основные свойства смешанного произведения векторов.
13. Смешанное произведение трех векторов в координатах.

Практическое занятие 7. Векторное пространство, его размерность и базис.

Цель: сформировать представление о векторных пространствах и их свойствах, о возможности применения при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

<u>Определение.</u> Пусть V - произвольное непустое множество, элементы которого мы будем называть векторами, K – поле, элементы которого мы будем называть скалярами. Пусть на множестве V определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком $+$ и называть сложением векторов. Пусть также на множестве V определена внешняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения. Другими словами определены два отображения:

$$V \times V \to V, \quad \forall x, y \in V, (x, y) \to x + y \in V;$$

$$K \times V \to V, \quad \forall \lambda \in K, \forall x \in V, (\lambda, x) \to \lambda \cdot x \in V.$$

Множество V вместе с этими двумя алгебраическими операциями называется векторным пространством над полем K, если выполняются следующие аксиомы:

1. Сложение ассоциативно, т.е.

$$\forall x, y, z \in V, \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

2. Существует нулевой вектор, т.е.

$$\exists 0 \in V: \forall x \in V, x + 0 = 0 + x = x.$$

3. Для любого вектора существует противоположный ему:

$$\forall x \in V, \exists y \in V: x + y = y + x = 0.$$

Вектор y, противоположный вектору x, обычно обозначается $-x$, так что

$$\forall x \in V, \exists (-x) \in V: x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

4. Сложение коммутативно, т.е. $\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x$.

5. Умножение вектора на скаляр подчиняется закону ассоциативности, т.е.

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$$

где произведение $\alpha\beta$ есть произведение скаляров, определенное в поле K.

6. $\forall x \in V, \quad 1 \cdot x = x$, где 1 - это единица поля K.

7. Умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения векторов:

$$\forall \lambda \in K, \forall x, y \in V, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

8. Умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения скаляров:

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

<u>Определение.</u> Векторное пространство V над полем вещественных чисел R называется вещественным векторным пространством.

<u>Теорема.</u> (Простейшие свойства векторных пространств.)

1. В векторном пространстве существует единственный нулевой вектор.
2. В векторном пространстве любой вектор имеет единственный противоположный ему.
3. $\forall \lambda \in K, \forall x \in V, \lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ или $x = 0$.
4. $\forall x \in V, \quad (-1)x = -x$.

Примеры векторных пространств.

1) Множество числовых вещественных функций одной переменной, непрерывных на интервале (0; 1) относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число.

2) Множество многочленов от одной буквы с коэффициентами из поля K относительно сложения многочленов и умножения многочленов на скаляр.

3) Множество комплексных чисел относительно сложения комплексных чисел и умножения на действительное число.

4) Множество матриц одного и того же размера с элементами из поля K относительно сложения матриц и умножения матриц на скаляр.

Следующий пример является важным частным случаем примера 4.

5) Пусть $n \in N$ - произвольное натуральное число. Обозначим через K^n множество всех столбцов высоты n, т.е. множество матриц над полем K размера $n \times 1$.

Множество K^n является векторным пространством над полем K и называется арифметическим векторным пространством столбцов высоты n над полем K.

В частности, если вместо произвольного поля K взять поле действительных чисел R, то векторное пространство R^n называется вещественным арифметическим векторным пространством столбцов высоты n.

Аналогично, векторным пространством является и множество матриц над полем K размера $1 \times n$ или, иначе, строк длины n. Оно обозначается также через K^n и также называется арифметическим векторным пространством строк длины n над полем K.

Системы векторов векторного пространства.

<u>Определение.</u> Системой векторов векторного пространства называют любое конечное непустое множество векторов этого пространства.

Обозначение: $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

<u>Определение.</u> Выражение

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ - скаляры поля K, $e_1, e_2, ..., e_n \in V$ – векторы векторного пространства V, называется линейной комбинацией системы векторов $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Скаляры $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение. Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то такую линейную комбинацию называют тривиальной, в противном случае – нетривиальной.

Пример. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ система из трех векторов векторного пространства V. Тогда

$$0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$

– тривиальная линейная комбинация данной системы векторов;

$$-e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3$$

– нетривиальная линейная комбинация данной системы векторов, т.к. первый коэффициент этой комбинации $\alpha_1 = -1 \neq 0$.

Определение. Если какой-либо вектор x векторного пространства V может быть представлен в виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n,$$

то говорят, что вектор x линейно выражается через векторы системы $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. В этом случае говорят также, что система $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ линейно представляет вектор x.

Пример. Пусть $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ – система из двух столбцов арифметического вещественного векторного пространства столбцов высоты 2. Тогда столбец $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы системы или данная система столбцов линейно представляет столбец x. Действительно,

$$x = 2e_1 - 3e_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ -4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Вопросы и задачи:

1. Обозначим буквой A множество бесконечных последовательностей вещественных чисел, имеющие предел: $A = \{(a_k), k \in N \,|\, (\lim\limits_{k\to\infty} a_k) \in R\}$.

Определим на множестве A покомпонентное сложение последовательностей и покомпонентное умножение последовательности на число. Докажите, что A является векторным пространством.

2. Обозначим буквой A множество бесконечных последовательностей вещественных чисел, имеющие одинаковый предел $a \in R : A = \{(a_k), k \in N \,|\, \lim\limits_{k\to\infty} a_k = a\}$. Определим сложение на A и умножение на число как в задаче 1.

а) Докажите, что если $a \neq 0$, то множество A не является векторным пространством. Какая аксиома векторного пространства не выпроняется?

б) Докажите, что если $a = 0$, то множество A является векторным пространством.

Практическое занятие 8. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

Цель: сформировать представление о векторных пространствах и их свойствах, о возможности применения при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, действующий из некоторого пространства L в то же пространство L.

Любой ненулевой вектор x, удовлетворяющий уравнению:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

называется собственным вектором линейного оператора $\hat{A}$, при этом число λ называется собственным значением линейного оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному вектору x.

Если задан базис линейного пространства L и в этом базисе линейный оператор $\hat{A}$ имеет матрицу A, то приведенное выше уравнение можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}.$$

При этом вектор x называется собственным вектором матрицы A, а число λ называется собственным значением матрицы A, соответствующим собственному вектору x.

Теорема.

Множество собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ совпадает со множеством корней характеристического уравнения этого оператора вне зависимости от того, в каком базисе задана матрица оператора $\hat{A}$. Уравнение

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

называется характеристическим уравнением матрицы A.

В развернутом виде характеристическое уравнение запишется следующим образом:

$$\det\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Для вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы A порядка n необходимо:

1. Составить характеристическое уравнение и найти все его различные действительные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, которые и будут собственными значениями матрицы.
2. Для каждого собственного значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ найти общее решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x}=0,$$

оно и будет задавать собственные векторы, которым соответствует собственное значение λ_i.

Пример.

Найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\det|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=\det\begin{vmatrix} 0-\lambda\cdot 1 & 1-\lambda\cdot 0 & 2-\lambda\cdot 0 \\ 4-\lambda\cdot 0 & 0-\lambda\cdot 1 & 1-\lambda\cdot 0 \\ 3-\lambda\cdot 0 & -1-\lambda\cdot 0 & 1-\lambda\cdot 1 \end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-\lambda)^2(1-\lambda)+1\cdot 1\cdot 3+2\cdot 4\cdot(-1)-2\cdot(-\lambda)\cdot 3-1\cdot 4\cdot(1-\lambda)-(-\lambda)\cdot 1\cdot(-1)=$$

$$=\lambda^2-\lambda^3+3-8+6\lambda-4+4\lambda-\lambda=-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9,$$

то характеристическое уравнение имеет вид

$$-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9=0.$$

Один из корней этого уравнения находится методом подбора. Проверим, является ли число $\lambda=1$ корнем этого уравнения:

$$-1^3+1^2+9\cdot 1-9=0 \text{ —}$$

верно. Вынесем в левой части уравнения множитель $(\lambda-1)$ за скобку:

$$-\lambda^3+\lambda^2+9\lambda-9=-\lambda^2(\lambda-1)+9(\lambda-1)=(9-\lambda^2)(\lambda-1)=(3+\lambda)(3-\lambda)(\lambda-1)=-(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-3).$$

Характеристическое уравнение, таким образом, принимает вид $-(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$, откуда $\lambda_1=-3, \quad \lambda_2=1, \quad \lambda_3=3$.

Соответствующая однородная система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для собственного значения $\lambda_1=-3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3=0. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = -3$, в координатной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

где c_1 — произвольное действительное число, не равное нулю.

Система линейных уравнений для определения собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_2 = 1$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ -3\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_2 = 1$, в координатной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -c_2 \\ -3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_2 \neq 0.$$

Аналогичным образом определяется множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 7c_3 \\ 11c_3 \\ 5c_3 \end{pmatrix}, \quad c_3 \neq 0.$$

Вопросы и задачи:

1. Найти собственные значения и собственные векторы, привести к диагональному виду матрицу линейного оператора:

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 7. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.Определите, является ли международная торговля двух стран А и Б сбалансированной, если вектор национальных доходов х и структурная матрица А этих стран

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 12\,000\,000\,000 \\ 7\,000\,000\,000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Вопросы:

1. Что такое собственное значение матрицы?
2. Что такое собственный вектор матрицы?
3. Что такое характеристический многочлен матрицы?
4. Сколько различных собственных значений может иметь матрица?
5. Сколько различных собственных векторов могут соответствовать одному собственному значению матрицы?
6. Как найти все собственные значения матрицы?

Раздел 2. Аналитическая геометрия

Практическое занятие 9. Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.

Цель: сформировать умение составлять уравнение прямой по данным задачи, определять параметры прямой по заданному уравнению.

Теоретическая часть:

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением 1–й степени и, обратно, каждое уравнение 1–й степени определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: y=kx+b, где k – угловой коэффициент прямой, b – начальная ордината.

Пример: Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1)$ и образующей с прямой $3x - y + 2 = 0$ угол в 45°.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o,y_o)$ имеет вид:

$$y - y_0 = k_1(x - x_0), \text{ т.е. } y - 1 = k_1(x + 2)$$

В равенстве необходимо определить угловой коэффициент k_1. Для этого воспользуемся условием, что искомая прямая образует с данной прямой $3x–y+2=0$ угол в 45°. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 3$. Тогда имеем:

$$tg45^\circ = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{3 - k_1}{1 + 3k_2},$$

откуда $1 + 3k_1 = 3 - k_1$, или $k_1 = \frac{1}{2}$. Подставив $k_1 = \frac{1}{2}$, получим: $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$ или $x - 2y + 4 = 0$ – искомое уравнение прямой.

Общее уравнение прямой: Ax+By+C=0, где A, B, C – произвольные числа. Очевидно, A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях.

Замечание. Прямая линия в отрезках отсекает от координатного угла прямоугольный треугольник, площадь которого определяется формулой $S_\Delta = \frac{1}{2}|a||b|$.

Пример. Дана прямая 5x-3y-30=0. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой от координатных осей.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках, разделив все члены данного уравнения на 30: $\frac{x}{6} - \frac{y}{10} = 1$. Из уравнения видно, что a=6;b=-10. Следовательно, $S_\Delta = \frac{1}{2}|6||-10| = 30$ кв.ед.

Нормальное уравнение прямой: $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$, где θ - угол, который образует прямая с положительным направлением оси OX.

Пример. Дано уравнение прямой 5x – 12y + 26 = 0. Привести к нормальному виду.

Решение. Для перехода от общего уравнения прямой к нормальному необходимо обе части общего уравнения умножить на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак выбирается противоположным знаку C. В данном уравнении A=5, B= -12, C=26. Так как C>0, то нормирующий множитель берем со знаком минус, т.е. $M = -\frac{1}{\pm\sqrt{25+144}} = -\frac{1}{13}$. Умножив на $M = -\frac{1}{13}$ данное уравнение, получим: $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$ - нормальное уравнение прямой: $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $P = 2$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Дано общее уравнение прямой 3x – 2y + 12= 0. Составьте уравнение этой прямой с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.

Задача 2. Составьте уравнение прямой с угловым коэффициентом k = 2, проходящей через точку M(–1;2).

Задача 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;1)$ и $M_2(1;–3)$.

Задача 4. Дано общее уравнение прямой $12x – 5y – 60 = 0$. Написать:

1) уравнение с угловым коэффициентом;
2) уравнение в отрезках;
3) нормальное уравнение.

Задача 5. Прямая на плоскости отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв.ед.

Вопросы

1. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости? Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Для каких прямых угловой коэффициент не определяется?
3. Исследование общего уравнения прямой на плоскости.
4. Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках?

5. Запишите нормальное уравнение прямой.
6. Запишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Практическое занятие 10. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

Цель: сформировать умение вычислять угол между двумя прямыми, определять параллельность или перпендикулярность прямых, находить расстояние от точки до прямой и применять полученные умения при решении задач профессиональной деятельности

Теоретическая часть:

Пусть даны две прямые $\left.\begin{matrix} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{matrix}\right\}$. Угол между двумя прямыми на плоскости может быть вычислен по формуле: $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1=k_2$. Необходимое и достаточное условием перпендикулярности двух прямых заключается в том, что произведение их угловых коэффициентов равно (-1): $k_1k_2=-1$.

Замечание. Если уравнения двух прямых заданы в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то угловые коэффициенты этих прямых будут иметь вид: $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$.

1) Пусть прямые параллельны. Тогда $k_1=k_2$ или $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2}$, т.е. если в уравнениях двух прямых соответствующие коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, то прямые параллельны. Если при этом имеем отношение $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

2) Пусть прямые перпендикулярны. Тогда выполняется равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $\dfrac{A_1}{B_1} \cdot \dfrac{A_2}{B_2} = -1$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ - это есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде.

Пример. Даны уравнения двух прямых: $2x - y + 3 = 0$ и $4x - 2y + 5 = 0$. Как расположены эти прямые? Здесь $A_1 = 2$, $B_1 = -1$, $C_1 = 3$, $A_2 = 4$, $B_2 = -2$, $C_2 = 5$. Здесь выполняются соотношения: $\dfrac{2}{4} = \dfrac{-1}{-2} \neq \dfrac{3}{5}$, т.е. прямые параллельны.

Пример. Даны уравнения двух прямых $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$. Как расположены эти прямые?

Решение. Выпишем коэффициенты при переменных x и y: $A_1 = 3$ $B_1 = -2$, $C_1=1$, $A_2 = 2$, $B_2 = 3$, $C_2 = 4$. Рассмотрим выполнение условие перпендикулярности. Имеем: $A_1A_2 + B_1B_2 = 3\cdot 2 - 2\cdot 3 = 0$. Условие выполнено. Следовательно, данные прямые перпендикулярны.

Чтобы найти расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой, необходимо: 1)уравнение данной прямой привести к нормальному виду; 2)подставить вместо текущих координат, координаты точки $M_0(x_0,y_0)$.

$|d| = |\, x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - P|$

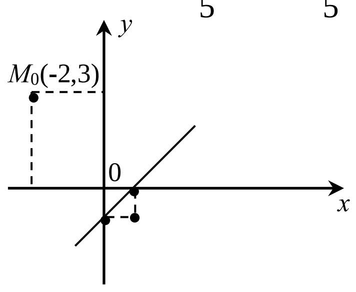
Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-2,3)$ до прямой $3x - 4y - 2 = 0$.

Решение. Приводим данное уравнение к нормальному виду, умножая его на нормирующий множитель

$$M = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}\cdot$$

Получим нормальное уравнение $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - \dfrac{2}{5} = 0\cdot$

Тогда отклонение $d = \dfrac{3}{5}\cdot(-2) - \dfrac{4}{5}\cdot 3 - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{6}{5} - \dfrac{12}{5} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{20}{5} = -4$



Отрицательное значение для отклонения d, указывает на то, что данная точка $M_0(-2,3)$ лежит от данной прямой с той же стороны, что начало координат. Искомое расстояние $|d| = |-4| = 4$.

Вопросы и задачи:

1. Провести через точку пересечения прямых $x–y–3=0$, $2x+3y–11=0$, прямую, параллельную прямой $5x – 4y – 17 = 0$.
2. Луч света, проходящий через точку $M_1(3;–1)$, отражается от прямой $2x–y-1=0$ и после этого проходит через точку $M_2(5;3)$. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.
3. Найти проекцию точки $M(3;2)$ на прямую $3x – 2y + 1 = 0$.
4. Даны вершины треугольника: $A(3;1)$, $B(-5; -5)$, $C(-1;4)$. Найти уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.
5. Даны вершины треугольника: $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.
6. Не вычисляя координаты вершин треугольника, написать уравнения прямых, проведенных через эти вершины параллельно противолежащим сторонам. Стороны треугольника заданы уравнениями: $5x–2y+6=0$; $4x–y+3=0$ и $x+3y–7=0$.
7. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8;6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв.ед.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2; 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5; -1)$ и $B(3; 7)$.
9. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми: $3x – 4y – 10 = 0$; $6x – 8y+5=0$.

Вопросы:

1. Дайте определение угла между двумя прямыми. Как определяется косинус угла между двумя прямыми на плоскости?
2. Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности прямых, заданных а) общими уравнениями; б) уравнениями с угловым коэффициентом.
3. Как определить расстояние между а) точкой и прямой; б) двумя параллельными прямыми?
4. Можно ли считать условие $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ признаком параллельности прямых?

Практическое занятие 11. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Общее уравнение линий второго порядка.

Цель: сформировать представление об уравнении кривой второго порядка, уравнениях окружности, эллипса, гиперболы и научиться определять основные параметры кривых по заданному уравнению; применять полученные знания при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром. Каноническое уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$. Если $x_0 = y_0 = 0$, то центр окружности находится в начале координат и уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$

Пример. Определить центр и радиус окружности, данной уравнением: $x^2+y^2-8x+6y+21=0$.

Решение. Данное уравнение представляет окружность, так как отсутствует член с произведением координат и коэффициенты при квадратах координат равны между собой. Приводим данное уравнение к каноническому виду. Для этого перепишем данное уравнение в виде:

$(x^2-8x)+(y^2+6y)+21=0$ или

$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)+21-16-9=0$ или

$(x-4)^2+(y+3)^2=4$

Откуда заключаем, что центр окружности имеет координаты $C(4,-3)$ и $R = 2$.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Обозначим расстояние между фокусами $2c$. Сумму расстояний до фокусов $2a$. Ось X направим через фокусы, а ось Y перпендикулярна оси X и делит расстояние между фокусами пополам. Тогда точки F_1, F_2 - фокусы эллипса имеют координаты. $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Пусть точка $M(x;y)$ - лежит на эллипсе.

Тогда $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=2a$. Имеем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ Возводим в квадрат

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(cx - a^2\right)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$
$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

Поскольку по условию $\left(a^2 - c^2\right) > 0$, то обозначим $\left(a^2 - c^2\right) = b^2$.

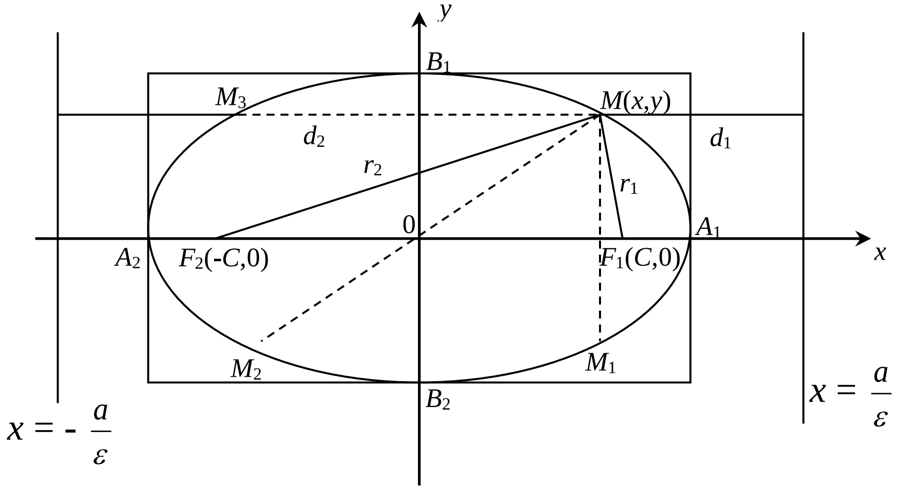
Получаем $\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right); \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$

Окончательно получаем: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Если $a = b$, то эллипс становится окружностью.

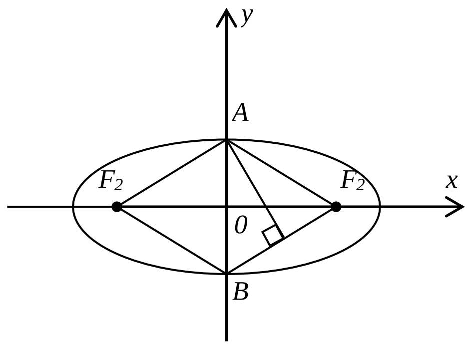
Величина $\dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается через букву ε.

Прямые $x = \pm\ \dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстоянии $\dfrac{a}{\varepsilon}$ от его центра, называются директрисами эллипса. Директрисы эллипса обладают свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.



Пример. Сторона ромба равна 5 и высота 4,8. Через две вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.

Решение: По условию задачи $AF_1 = 5$ и $AK = 4{,}8$. Тогда площадь ромба $S = AF_1 \cdot AK = 4{,}8 \cdot 5 = 24$.



С друой стороны, как известно, площадь равна половине произведения диагоналей, т.е. $S = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot F_1F_2$; но $AB = 2b$, $F_1F_2 = 2c$. Тогда $S = 2bc = 24$, откуда $b = \dfrac{12}{c}$. Далее, $AO^2 + OF_1^2 = AF_1^2$ или $b^2 + c^2 = 25$.

Следовательно, для определения c имеем: $\dfrac{144}{c^2} + c^2 = 25$ или $c^4 - 25c^2 + 144 = 0$.

Обозначим $c^2 = t$. Тогда имеем: $t^2 - 25t + 144 = 0$;

$$t_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2};\ t_1 = 16,\ t_2 = 9.$$

Так как $c > 0$, то $c_1 = 3$, $c_2 = 4$. Тогда $b_1 = 4$, $b_2 = 3$. Известно, что для эллипса $a^2 = b^2 + c^2$, тогда $a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $a = 5$.

Искомыми уравнениями эллипса будут: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (если фокусы лежат на оси Ox) и $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (если фокусы лежат на оси Oy).

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.

Обозначим расстояние между фокусами $2c$. Разность расстояний до фокусов $2a$. Ось X направим через фокусы, а ось Y перпендикулярна оси X и делит расстояние между фокусами пополам. Тогда точки F_1, F_2 - фокусы гиперболы имеют координаты. $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Пусть точка $M(x;y)$ - лежит на гиперболе.

Тогда $\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \pm 2a$. Имеем

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$. Далее проведем цепочку преобразований.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ Возводим в квадрат

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(cx - a^2\right)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

Поскольку по условию $\left(a^2 - c^2\right) < 0$, то обозначим $\left(a^2 - c^2\right) = -b^2$.

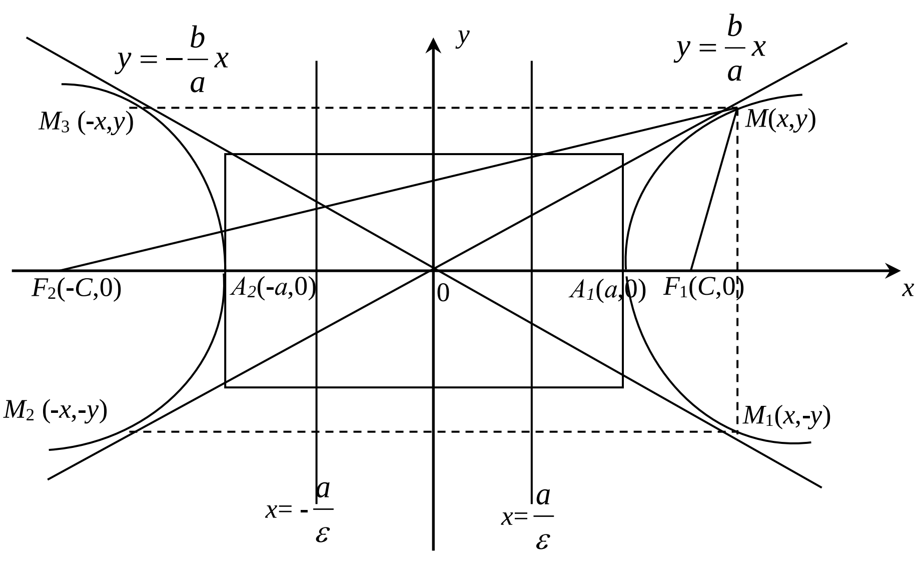
Получаем $\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$; $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$;

Окончательно получаем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Если гипербола задана своим каноническим уравнением, то главными осями гиперболы являются оси координат, а центр гиперболы находится в начале координат.

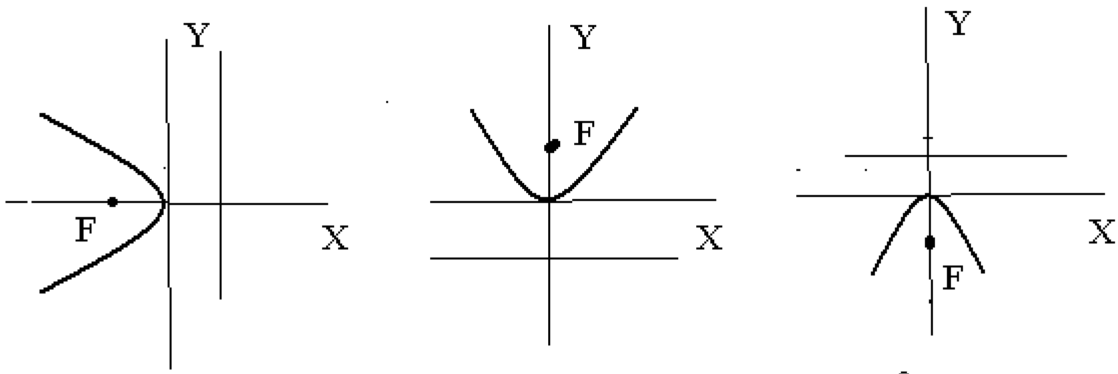
Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершине, называется основным прямоугольником гиперболы. Данный прямоугольник имеет вершины в точках A_1 (a, b), A_2 $(a, -b)$, A_3 $(-a, -b)$, A_4 $(-a, b)$. Диагональ основного прямоугольника называются асимптотами гиперболы. Уравнения асимптот имеют вид: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси гиперболы и отстоящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от ее центра, называются директрисами гиперболы.



Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равностоящих от одной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$. Парабола симметрична относительно оси OY. В первой четверти имеем $y = \sqrt{2px}$ возрастающая функция. Точка O с координатами O(0;0) называется вершиной параболы.

Иногда приходится рассматривать уравнения вида $y^2 = -2px$; $x^2 = 2py$; $x^2 = -2py$. Эти уравнения являются уравнениями параболы, но не являются каноническими.



$y^2 = -2px$ $x^2 = 2py$ $x^2 = -2py$

Общим уравнением линии второго порядка называется уравнение вида:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ где } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Дано уравнение эллипса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

Задача 2. В эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ вписан правильный (равносторонний) треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большой оси. Найти координаты двух других вершин треугольника.

Задача 3. В эллипс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят чрез фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

Задача 4. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Задача 5. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиус-векторы этой точки и угол между ними.

Задача 6. Вычислить параметр параболы $y^2 = 2px$, если известно, что она касается прямой $x - 2y + 5 = 0$.

Задача 7. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота – 6 м.

Задача 8. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой p = 0,1 м. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстояние 2 м от места выхода.

Вопросы:

1. Что такое окружность? Запишите каноническое уравнение окружности. Какие особенности имеет общее уравнение окружности?
2. Дайте определение эллипса. Запишите его каноническое уравнение. Проведите с помощью канонического уравнения исследование формы эллипса.
3. Что такое эксцентриситет и директрисы эллипса?
4. Как определяются фокальные радиусы эллипса?
5. Запишите общее уравнение кривой второго порядка.
6. Дайте определение гиперболы. Запишите каноническое уравнение гиперболы. Какая гипербола называется сопряженной данной?
7. Сделайте чертеж гиперболы. Напишите уравнения асимптот гиперболы.

8. Дайте определение параболы. Запишите каноническое уравнение параболы. Что такое параметр параболы?

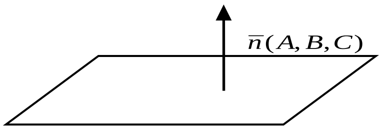
Практическое занятие 12. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.

Цель: сформировать представление о различных способах задания плоскости, научиться определять расположение плоскости в пространстве по заданному уравнению, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Если фиксирована произвольная декартова прямоугольная система координат, то плоскость (P) определяется уравнением первой степени относительно совокупности переменных x, y, z.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D произвольные постоянные, причем хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля, вектор $\overline{n}$ = {A, B, C} перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором плоскости.



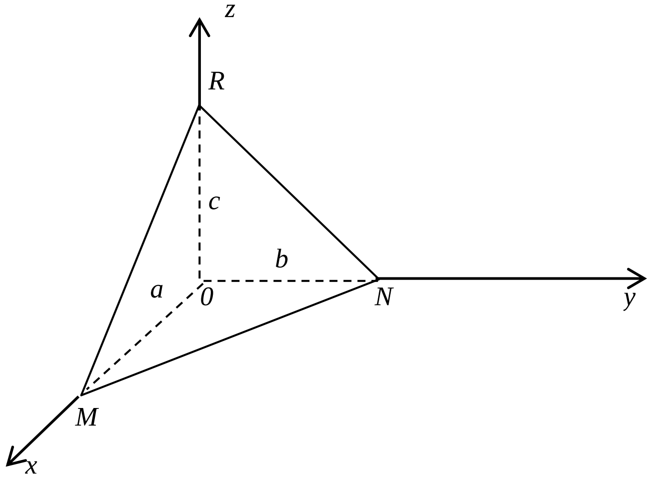
Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Свободный член равен нулю, т. е. $D=0$: $Ax+By+Cz=0$	плоскость проходит через начало координат
2. Один из коэффициентов при текущих координатах равен 0 и	
а) $D\neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной оси:	
$A=0,\ \ тогда\ \ By+Cz+D=0$	плоскость параллельна оси Ox
$B=0,\ \ тогда\ \ Ax+Cz+D=0$	плоскость параллельна оси Oy
$C=0,\ \ тогда\ \ Ax+By+D=0$	плоскость параллельна оси Oz
б) $D=0$, тогда плоскость проходит через соответствующую координатную ось:	
$A=0,\ \ тогда\ \ By+Cz=0$	плоскость проходит через ось Ox
$B=0,\ \ тогда\ \ Ax+Cz=0$	плоскость проходит через ось Oy
$C=0,\ \ тогда\ \ Ax+By=0$	плоскость проходит через ось Oz
3. Два коэффициента при текущих координатах равны 0 и	
а) $D\neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:	
$B=0,\ \ C=0,\ \ тогда\ \ Ax+D=0$	плоскость параллельна плоскости Oyz (перпендикулярна оси Ox)
$A=0,\ \ C=0,\ \ тогда\ \ By+D=0$	плоскость параллельна плоскости Oxz (перпендикулярна оси Oy)
$A=0,\ \ B=0,\ \ тогда\ \ Cz+D=0$	плоскость параллельна плоскости Oxy (перпендикулярна оси Oz)
б) $D=0$, тогда плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:	
$B=0, C=0,\ тогда\ Ax=0\ или\ x=0$	уравнение плоскости Oyz
$A=0, C=0,\ тогда\ By=0\ или\ y=0$	уравнение плоскости Oxz
$A=0, B=0,\ тогда\ Cz=0\ или\ z=0$	уравнение плоскости Oxy

<u>Различные виды уравнений плоскости</u>

1. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость не проходит через начало координат, а отсекает от осей координат соответственно отрезки a, b, c, т. е. плоскость проходит через точки $M(a,0,0)$, $N(0,b,0)$ и $R(0,0,c)$.



Уравнение такой плоскости: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

2. Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$((\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2}) \cdot \overline{M_1M_3}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(2,1,3)$, $B(1,0,4)$ и $C(1,1,5)$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1-2 & 0-1 & 4-3 \\ 1-2 & 1-1 & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(x-2)-1(y-1)-1(z-3)+2(y-1)=$$

$= -2x + 4 - y + 1 - z + 3 + 2y - 2 = -2x + y - z + 6 = 0$ или

$2x - y + z - 6 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $2x - z + 5 = 0$.

Задача 3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; параллельна оси Ox; параллельна оси Oy; параллельна оси Oz.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; 2; 1)$ и параллельной векторам $\overline{a} = \{1; 1; 1\}$ и $\overline{b} = \{1; 1; -1\}$.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярно данной плоскости.

Задача 6. Две грани куба лежат на плоскостях: $2x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x-2y+z+5= 0$. Вычислить объем этого куба.

Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку G(4,2,-5).

Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения плоскости.
2. Как найти расстояние от точки до плоскости?
3. Покажите, что всякое уравнение первой степени относительно совокупности переменных x, y, z определяет плоскость в прямоугольной системе координат в трехмерном пространстве.

Практическое занятие 13. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Цель: сформировать умение находить расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями, определять параллельность или перпендикулярность плоскостей, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Пусть даны две плоскости (P_1) и (P_2). Пусть даны их общие уравнения:
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. При этом

$$cos\varphi = \frac{(\overline{n}_1\overline{n}_2)}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

Условие параллельности плоскостей: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Расстояние от точки $M_o(x_o,y_o,z_o)$до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Пример. Вычислить расстояние от точки M(-9,6,6) до плоскости 2x – 6y – 3z +9 =0.

Решение: $d = \dfrac{|2\cdot(-9) - 6\cdot 6 - 3\cdot 6 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{63}{7} = 9$.

Пример. Найти острый угол между плоскостями:

5x - 3y + 4z - 4 = 0, (1)

3x - 4y - 2z + 5 = 0. (2)

Решение: По формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{15+12-8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}\right|, \quad \cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}};$$

$$\cos\varphi = 0{,}4990; \quad \varphi = 60°04'.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить расстояние от точки М до плоскости α, если: 1) М (-2,7,1), α : *2x-6y+3z+1=0;*
2) М (1,-3,4), α :*2x-6y-3z+27=0.*

Задача 2. Найти величину острого угла между плоскостями:
11x-8y-7z-15=0, 4x-10y+z-2=0; 2) 2x+3y-4z+4=0, 5x-2y+z-3=0.

Задача 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки М1 (0,0,2) и М2 (0,1,0) и образующей угол 45 градусов с плоскостью OYZ.

Вопросы.

1.Как определить величину угла между двумя плоскостями?

2.Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

3.Можно ли считать условие $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ признаком параллельности плоскостей? Что можно сказать об этих плоскостях?

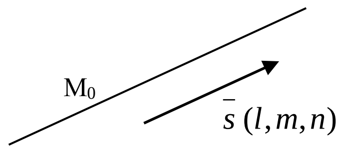
4.Как Вы думаете, какое из приведенных ниже уравнений соответствует плоскости, проходящей через точки М(0,-3,2) и N(5,4,-1) параллельно оси *Oy*: *3x+5z-10 = 0, 3y-z-10 = 0, 2x-5y+10 = 0, 3x-5z+10 = 0?*

Практическое занятие 14. Прямая линия в пространстве. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой.

Цель: сформировать умение составлять необходимое уравнение прямой в пространстве, определять параметры прямой по уравнению**,** применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Положение прямой в трехмерном пространстве будет вполне определено, если зададим на прямой определенную точку M_0 при помощи ее радиус – вектора $\overline{Z}_0$ и вектор $\overline{S} \neq 0$, которому прямая параллельна. Вектор $\overline{S}$ при этом называется направляющей.



Параметрические уравнения прямой в пространстве: $\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tl \\ y &= y_0 + tm \\ z &= z_0 + nt \end{aligned}\right\}$, канонические уравнения: $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$, уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Любая прямая в трехмерном пространстве может быть выражена также уравнениями двух плоскостей: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, которые определяют общее уравнение прямой в пространстве, если плоскости, определяемые этими уравнениями, различны и не параллельны.

Пример. Дано общее уравнение прямой: $\begin{cases} 2x-3y+z-5=0, \\ 3x+y-2z-2=0 \end{cases}.$

Требуется привести данное уравнение к каноническому виду. Для этого сначала найдем точку $M_o(x_o,y_o,z_o)$, лежащую на данной прямой.

Положим $z=z_0=0$ в и решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+y=2 \end{cases}.$$

Умножив второе уравнение на 3 и сложив с первым уравнением, получим $11x=11$, $x=1$. Из второго уравнения $y=2–3x=2–3=–1$. Итак, точка $M_o(1,–1,0)$ найдена.

Находим направляющий вектор $\bar{s}=[\bar{n}_1\bar{n}_2]$, где $\bar{n}_1=\{2;-3;1\}$, $\bar{n}_2=\{3;1;-2\}$.

$$\bar{s}=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6l_1+3l_2+2l_3+9l_3-l_1+4l_2=5l_1+7l_2+11l_3$$

Итак, точка $M_o(1,–1,0)$ и $\bar{s}=\{5;7;11\}$ найдены. Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{11}.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Составить параметрические уравнения прямых: $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x+5y+2z+1=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y+4z-8=0, \\ 6x+3y+2z-18=0. \end{cases}$

Задача 2. Определить координаты направляющего вектора прямой 1) $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y-z\quad=0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x+y-z+5=0 \\ 3x+2y+4z+7=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3x-y+7z-1=0 \\ -x+2y+11z+5=0 \end{cases}$.

Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения прямой линии в пространстве.
2. Что такое направляющий вектор прямой?
3. Как определить координаты направляющего вектора прямой по общему ее уравнению?
4. Как преобразовать общее уравнение прямой к каноническому?

Практическое занятие 15. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Цель: сформировать умение вычислять угол между двумя прямыми в пространстве, расстояние от точки до прямой, кратчайшее расстояние между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Углом между двумя прямыми в пространстве будем называть любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данным. Очевидно, за угол φ между прямыми можно взять угол между их направляющими векторами: $\bar{s}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$ и $\bar{s}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$, косинус которого можно найти по формуле:

$$\cos\varphi=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Углом между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

$Al+Bm+Cn=0$ – условие параллельности прямой и плоскости.

$\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$ – условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Вопросы и задачи:
Задача 1. Вычислить косинус угла между прямыми:

1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{5}$ и $\begin{cases} x=5t-4 \\ y=-2t \\ z=-t+1 \end{cases}$; 2) $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ и $\begin{cases} x=t-3 \\ y=5t+1 \\ z=-t+2 \end{cases}$;

3) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-11}{1}$ и $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-3t+2 \\ z=-t+4 \end{cases}$; 4) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t+1 \\ z=5 \end{cases}$.

Задача 2. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ и плоскости $x+y-z-3=0$.

Вопросы.
1. Как определить угол между двумя прямыми в пространстве?
2. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в трехмерном пространстве?
3. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в трехмерном пространстве?
4. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Раздел 3. Математический анализ. Введение в анализ.

Практическое занятие 16. Способы задания последовательности. Вычисление предела последовательности с помощью определения. Ограниченные и неограниченные последовательности.

Цель: сформировать умение вычислять предел последовательности, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Если по некоторому закону каждому натуральному n поставлено в соответствие вполне определенное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность: $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

a_n – члены последовательности занумерованы всеми натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров.

Примеры числовых последовательностей:

1) $a, a+d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots$ - арифметическая прогрессия.
2) $b, bq, \ldots, bq^{n-1}, \ldots$ - геометрическая прогрессия.
3) 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, … - последовательность десятичных приближений к $\sqrt{2}$, со все возрастающей точностью.

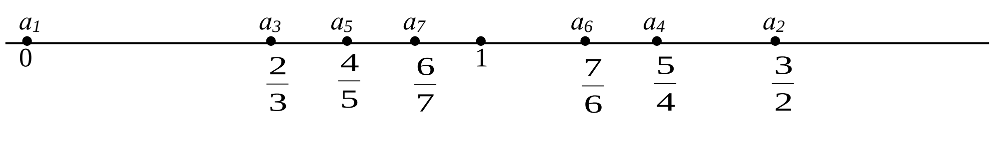
Иногда последовательность задается тем, что указано непосредственно выражением для a_n (пример 1, 2). В других случаях нам может быть неизвестно выражение для общего члена a_n, как в примере 3. Тем не менее: последовательность считается заданной, если мы владеем правилом, по которому может быть вычислен любой член последовательности лишь только известен его номер.

Предел числовой последовательности

Дана последовательность $\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$. Выпишем ее члены

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
$a_1=0$	$a_2=\dfrac{3}{2}$	$a_3=\dfrac{2}{3}$	$a_4=\dfrac{5}{4}$	$a_5=\dfrac{4}{5}$	$a_6=\dfrac{7}{6}$	$a_7=\dfrac{6}{7}$

Изобразим члены этой последовательности на числовой оси:



Можно заметить, что члены последовательности a_n с ростом n как угодно близко приближаются к единице. При этом абсолютная величина разности $|a_n-1|$ становится все меньше и меньше. Действительно:

$|a_1-1| = |0-1| = 1$ $\quad |a_2-1| = |\dfrac{3}{2}-1| = \dfrac{1}{2}$ $\quad |a_3-1| = |\dfrac{2}{3}-1| = \dfrac{1}{3}$ и т.д.

$|a_n-1|$ = $\left|1+\dfrac{(-1)^n}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$, т.е. с ростом n $|a_n-1|$ будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа.

Число А называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$ если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такой номер N (зависящий от ε) $N = N_\varepsilon$, что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ верно неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n\to\infty$.

Иногда говорят, что если А есть предел числовой последовательности $\{a_n\}$, то эта последовательность сходится к А. Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших n члены последовательности $\{a_n\}$ как угодно мало отличаются от числа А. Важно отметить, что номер N, вообще говоря, не может быть указан раз и навсегда: он зависит от выбора числа ε. При уменьшении ε, соответствующий номер N_ε, вообще говоря увеличивается.

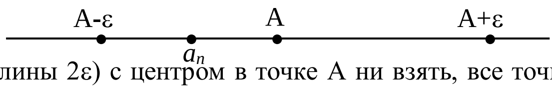
Для геометрической интерпретации понятия предела числовой последовательности распишем неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

Изобразим числа А, А + ε, А-ε и значение a_n точками на числовой оси. Получим наглядно геометрическое истолкование предела последовательности:



Какой бы малый отрезок (длины 2ε) с центром в точке А ни взять, все точки a_n начиная с некоторой из них должны попасть внутрь этого отрезка (так, что вне его может остаться лишь конечное число этих точек).

<u>Пример</u>

Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

План решения:

1. По определению число a называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon):\ n>N(\varepsilon)\Longrightarrow |a_n-a|<\varepsilon.$$

Это означает, что $\forall\varepsilon>0$ неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$ имеет решение $n>N(\varepsilon)$.

2. Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

т.е. решим это неравенство относительно n.

3. Если решение имеет вид $n>N(\varepsilon)$, то a — предел числовой последовательности $\{a_n\}$.

Замечание. Если решение неравенства $|a_n-a|<\varepsilon$ нельзя представить в виде $n>N(\varepsilon)$, то число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Пример. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3-2} = 2.$$

Решение.

1. По определению число 2 называется пределом числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon): \ n > N(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\frac{2n^3}{n^3-2} - 2\right| < \varepsilon.$$

2. Найдем, при каких n справедливо неравенство

$$\left|\frac{2n^3}{n^3-2} - 2\right| < \varepsilon,$$

т.е. решим это неравенство относительно n.

3. Неравенство имеет решение $n > N(\varepsilon) = \sqrt[3]{4/\varepsilon + 2}$. Следовательно, 2 — предел числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-2}\right\}$.

Ответ. $n > \sqrt[3]{4/\varepsilon + 2}$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

1. $a_n = \dfrac{2n-2}{3n-1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$ 2. $a_n = \dfrac{4n-2}{2n+3}, \quad a = 2.$

3. $a_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$ 4. $a_n = \dfrac{5n+2}{3n+1}, \quad a = \dfrac{5}{3}.$

5. $a_n = \dfrac{5n+2}{n+1}, \quad a = 5.$ 6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+2}, \quad a = 4.$

7. $a_n = \dfrac{3-n^3}{1+n^3}, \quad a = -1.$ 8. $a_n = \dfrac{6n-2}{2n+1}, \quad a = 3.$

9. $a_n = \dfrac{3+8n^2}{1+4n^2}, \quad a = 2.$ 10. $a_n = \dfrac{3n}{n+1}, \quad a = 3.$

Задача 2. Написать последовательности с общими членами:

1) $x_n = \dfrac{2n}{3n-2}$; 2) $x_n = n!$; 3) $x_n = \dfrac{1}{n}$;

4) $x_n = -2^n$; 5) $x_n = \dfrac{1}{2^n}$; 6) $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;

7) $x_n = \dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}$; 8) $x_n = \dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$;

9) $x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ для } n \text{ нечетных;} \\ \dfrac{n}{n+1} \text{ для } n \text{ четных;} \end{cases}$ 10) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

Задача 3. Написать формулу общего члена последовательности по данным ее первым членам:

1) $\frac{1}{3}, \ \frac{1}{6}, \ \frac{1}{9}, \ \frac{1}{12}, \ \frac{1}{15}, \ \ldots;$

2) $\frac{1}{3\cdot 4}, \ \frac{1}{5\cdot 6}, \ \frac{1}{7\cdot 8}, \ \frac{1}{9\cdot 10}, \ \ldots;$

3) $\frac{1}{6}, \ \frac{4}{11}, \ \frac{7}{16}, \ \frac{10}{21}, \ \frac{13}{26}, \ \ldots;$

4) $\frac{3}{5}, \ \frac{7}{8}, \ \frac{11}{11}, \ \frac{15}{14}, \ \frac{19}{17} \ \ldots;$

5) $\frac{1}{3}, \ \frac{1}{9}, \ \frac{1}{27}, \ \frac{1}{81}, \ \frac{1}{243}, \ \frac{1}{729} \ \ldots;$

6) $0, \ \frac{1}{3}, \ \frac{2}{4}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{4}{6}, \ \frac{5}{7}, \ \ldots;$

7) $\frac{3}{5}, \ \frac{12}{17}, \ \frac{27}{37}, \ \frac{48}{65}, \ \frac{75}{101}, \ \ldots.$

Вопросы

1. Дайте определение числовой последовательности.
2. Перечислите способы задания числовой последовательности.
3. Какая последовательность называется ограниченной; ограниченной сверху; ограниченной снизу; неограниченной? Приведите примеры перечисленных последовательностей.
4. Дайте определение предела последовательности.
5. Как называется последовательность, имеющая конечный предел?
6. Какая последовательность называется монотонной?
7. Привести примеры:
1) возрастающей ограниченной последовательности;
2) возрастающей неограниченной последовательности;
3) убывающей ограниченной последовательности;
4) убывающей неограниченной последовательности.

Практическое занятие 17. Вычисление предела последовательности с помощью определения. Число е.
Цель: сформировать умение вычислять предел последовательности, применять полученные умения при решении практических задач.
Теоретическая часть:

Последовательность a_n имеющая своим пределом 0 называется бесконечно малой величиной или, просто, бесконечно малой.

Леммы о бесконечно малых.

Лемма 1. Сумма любого конечного числа бесконечного малых есть также величина бесконечно малая.

Лемма 2. Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.

Бесконечная последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если она по абсолютной величине становится и остается большей сколь угодно большего наперед заданного числа E>0, начиная с некоторого места $|x_n| > E \quad (\text{для} \quad n > N_E)$.

Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой и сохраняет определенный знак (+ или -) то в соответствии со знаком, говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел +∞ или -∞ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad x_n \to \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Если $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то ее обратная величина $a_n = \dfrac{1}{x_n}$ будет бесконечно малой (верно и обратно).

Последовательность точек расширенной числовой прямой может иметь на этой прямой только один предел.

Теоремы о пределах. Предельный переход в равенствах и неравенствах

1. Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при всех их изменениях равны: $x_n = y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то равны и эти пределы A= B.

2. Если для двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ всегда выполняется неравенство $x_n \ge y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то A ≥ B.

3. Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ всегда выполняются неравенства $x_n \le y_n \le z_n$ причем $x_n \to A \quad z_n \to A$ (т.е. к общему пределу A), то и последовательность $\{y_n\}$ имеет тот же предел, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Арифметические операции над полследовательностями

1. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, $\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$

2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то их произведение также имеют конечный предел $\lim x_n\, y_n = a \cdot b$

3. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ причем b≠0, то их отношение также имеет конечный предел $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281$$ - иррациональное число.

<u>Пример</u>

Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}.$$

Решение. Здесь $(2n+1)^2-(n+1)^2 = 3n^2+2n$ — многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2) и n^2+n+1 — многочлен второй степени (бесконечно большая последовательность порядка n^2).

1. Вынесем в числителе множитель n^2, получим

$$(2n+1)^2-(n+1)^2 = n^2\left(3+\frac{2}{n}\right).$$

2. Вынесем в знаменателе множитель n^2, получим

$$n^2+n+1 = n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3+2/n)}{n^2(1+1/n+1/n^2)}.$$

4. Сокращая n^2 и используя теорему о пределе частного, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(3+2/n)}{\lim_{n\to\infty}(1+1/n+1/n^2)} = 3.$$

Ответ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1} = 3.$

Вопросы и задачи:

Вычислить пределы:

Задача 1.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}.$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}.$ 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)^2-(1+n)^2}{(1+n)^2-(2-n)^2}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}.$ 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n+2)^2}{(n-2)^3-(n+2)^3}.$

Задача 2.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+3}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n+5}\right)^{n+3}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n}{3n^2-2n+5}\right)^{n+2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+1}\right)^{3n^2}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3}{n^3-2}\right)^{n-n^3}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{3n^2+1}$.

Задача 3.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$.

Задача 4.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Вопросы

1. Дайте определение бесконечно малой последовательности. Приведите пример.
2. Сформулируйте леммы о бесконечно малых.
3. Какая последовательность называется бесконечно большой?
4. Охарактеризуйте взаимосвязь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.
5. Какие арифметические операции можно выполнять над последовательностями? Опишите алгоритм выполнения арифметических операций над последовательностями.
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

Практическое занятие 18. Вычисление предела функции. Односторонние пределы функций.

Цель: сформировать умение вычислять предел функции, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Число А называется пределом функции y=f(x) при x стремящемся к *a*, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что при $|x-a|<\delta(\varepsilon)$ выполняем неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Число А называется правосторонним пределом или пределом справа функции f(x) в точке x=*a* если для $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$, что при $0<x-a<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A$

Число А называется левосторонним пределом или пределом слева функции f(x) в точках x=*a*, если для любого $\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$, что при $0<a-x<\delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=A$.

Пример. Показать, что $\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$.

Пусть $\varepsilon>0$ – производное число. Найдем такое число $\delta>0$ что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-1|<\delta$ выполнялось бы неравенство $|x^2-1|<\varepsilon$

$|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|=|(x-1)(x-1+2)|=|(x-1)^2+2(x-1)|\le|(x-1)^2|+2|x-1|\le\delta^2+2\delta<\varepsilon$

$\delta^2+2\delta-\varepsilon<0$ $\qquad\qquad$ $\delta^2+2\delta-\varepsilon=0$

$\delta=-1\sqrt{1+\varepsilon}$ $\qquad\qquad$ $\delta_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+\varepsilon}$ т.к $\delta>0$

т.е. по любому $\varepsilon=0{,}3$ $\delta=-1+\sqrt{1{,}3}$.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, т.е. если для $\forall\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, что для всех $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$. Бесконечно малую функцию $|\alpha(x)|$ называют также бесконечно малой величиной.

Функция f(x) называется бесконечно большой при $x\to a$, если для $\forall$ M>0 существует такое $\delta>0$, что $|f(x)|>M$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Примеры вычисления предела

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2-x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+3)}{x(x-1)}=-3$ (разложение на множители).

3) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x-4}-2}{x-8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(\sqrt{x-4}-2)(\sqrt{x-4}+2)}{(x-8)(\sqrt{x-4}+2)}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(x-4-4)}{(x-8)(\sqrt{x-4}+2)}=\dfrac{1}{4}$

(умножение на сопряжение).

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{3x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{3}$ (деление на старшую степень).

Вопросы и задачи:

Вычислить предел функции:

Задача 1.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-7x^2+5x-4}{x^4+x^2+x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+2}{x^2-x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+x}{2x^3+x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3-14}{5x^4+x^3+x^2+x-1}$.

Задача 2.

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+11x+15}{x+3}=-1.$ 2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x+2}=-10.$

3. $\lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{6x^2+5x-1}{x+1/2}=-1.$ 4. $\lim\limits_{x\to-1/3}\dfrac{9x^2+12x+3}{x+1/3}=6.$

5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{x+1}=-5.$ 6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5.$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2-9x+3}{x-1}=3.$ 8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-15x+9}{x-3}=9.$

9. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6x^2+20x+6}{x+3}=-16.$ 10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-3x-2}{x-1}=7.$

Задача 3.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$.

Вопросы

1. Дайте определение предела функции, предела функции слева (справа).
2. Дайте определение функции y=f(x) при $x\to\infty$.
3. Сформулируйте определение бесконечно малой (бесконечно большой) функции.
4. Перечислите свойства бесконечно малых функций.
5. Охарактеризуйте связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

Раздел 4. Математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Практическое занятие 19. Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования.

Цель: сформировать умение вычислять производную функции, применять полученные умения при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

I. Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Иными словами, если функция $u=\varphi(x)$ *имеет в точке* x *производную* u', *то в этой точке*

$$(Cu)' = Cu' \quad (C = const).$$

Пример

$$y = 5\cos x, \qquad y' = (5\cos x)' = 5(\cos x)' = -5\sin x.$$

II. Производная от алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.

Более точно: если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, то

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Пример

$$y = x^5 - 3x^2 + 2x - 1,$$

$$y' = (x^5)' - (3x^2)' + (2x)' - (1)' = 5x^4 - 6x + 2.$$

III. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, то справедлива формула

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Пример

$y = (x^2 - 3x)\sin x$,

$y' = (x^2 - 3x)'\sin x + (x^2 - 3x)(\sin x)' = (2x - 3)\sin x + (x^2 - 3x)\cos x$.

Пример

$y = (x-1)(x-2)(x-3)$,

$y' = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$

IV. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют в точке x производные, причем в этой точке $v \neq 0$, то справедлива формула

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$. В соответствии с формулой находим

$$y' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \qquad (x \neq 1).$$

При вычислении производной функции целесообразно пользоваться следующими формулами:

$y = \frac{a}{u}$; $y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u'$ (a — постоянная величина);

$y = u^n$; $y' = nu^{n-1} \cdot u'$

(n — любое действительное число)

$$y = \sqrt{u}; \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u';$$

$y = a^u$; $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $y = e^u$; $y' = e^u u'$; $a > 0$, $a \neq 1$;

$y = \log_a u$; $\quad y' = \frac{1}{u} u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a}$;

$y = \ln u$; $\quad y' = \frac{1}{u} u'$;

$y = \sin u$; $\quad y' = \cos u \cdot u'$;

$y = \cos u$; $\quad y' = -\sin u \cdot u'$;

$y = \mathrm{tg}\, u$; $\quad y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$;

$y = \mathrm{ctg}\, u$; $\quad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$;

$y = \sec u$; $\quad y' = \sec u\, \mathrm{tg}\, u \cdot u'$;

$y = \mathrm{cosec}\, u$; $\quad y' = -\mathrm{cosec}\, u \cdot \mathrm{ctg}\, u \cdot u'$;

$y = \arcsin u$; $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

$y = \arccos u$; $\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

$y = \mathrm{arctg}\, u$; $\quad y' = \frac{1}{1+u^2} u'$;

$y = \mathrm{arcctg}\, u$; $\quad y' = -\frac{1}{1+u^2} u'$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти производную функции в точке x=0:

1. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^3 + x^2 \sin\dfrac{2}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^2 \cos\dfrac{1}{9x}\right) + 2x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x \cos\dfrac{1}{5x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \operatorname{tg}\left(x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x \sin\dfrac{3}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right)} - 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Задача 2. Найти производные функций:

1. 1. $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$
2. $y = \sqrt{x}$
3. $y = -ctg\ x - x$
4. $y = \dfrac{1}{x^2}$
5. $y = \sqrt[3]{x^2}$
6. $y = 5\sin x + 3\cos x$
7. $y = 5(tg\ x - x)$
8. $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$
9. $y = 2^{x^2}$
10. $y = x\sqrt{x}$

Вопросы
1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования.

Практическое занятие 20. Дифференцирование сложной и обратной функций

Цель: сформировать умение вычислять производную сложной и обратной функции, применять полученные умения при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

Пусть даны функция $f(u)$ аргумента u и функция $\varphi(x)$ аргумента x. С их помощью можно образовать сложную функцию

$$f(\varphi(x))$$

аргумента x. В этом случае говорят, что мы «взяли функцию от функции» или произвели «суперпозицию» функций. Точный смысл таков: по заданному x находится число $\varphi(x)$; это число берется в качестве значения аргумента для функции $f(u)$; то, что при этом получится, и есть значение $f(\varphi(x))$ для данного x.

Говорят еще, что функция $f(\varphi(x))$ получается из $f(u)$ с помощью подстановки $u = \varphi(x)$.

<u>Пример</u> $y = u^3$. Если взять $u = x^2 - 3x + 1$, то получим сложную функцию $y = (x^2 - 3x + 1)^3$.

<u>Пример</u> $y = \sqrt{u}$, $u = 2 - x$. Тогда $y = \sqrt{2 - x}$.

<u>Пример</u> $y = \dfrac{1}{u + |u|}$, $u = \sin x$. Тогда $y = \dfrac{1}{\sin x + |\sin x|}$.

Установим важную теорему, позволяющую весьма просто вычислять производные сложных функций.

Теорема. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений u и x существуют конечные производные $f'(u)$ и u', то существует и конечная производная от y по x, причем $y' = f'(u)u'$, т. е.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Пример $y=\left(1+x^2\right)^5$. Положим $y=u^5$, $u=1+x^2$. $y'=5u^4u'=5\left(1+x^2\right)^4\left(1+x^2\right)'=10x\left(1+x^2\right)^4$.

Пример $y=\sin 3x$, т. е. $y=\sin u$, где $u=3x$. $y'=\cos u\ u'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$.

В случае сложной функции, полученной в результате *нескольких* суперпозиций, производная находится повторным применением формулы несколько раз.

Пример $y=(1+\sin 2x)^3$,
$y'=3(1+\sin 2x)^2(1+\sin 2x)'=3(1+\sin 2x)^2\cos 2x(2x)'=6(1+\sin 2x)^2\cos 2x$.

Пусть дана функция $y=f(x)$ (однозначная), E - ее область задания, ε - область изменения.

Возьмем какое-нибудь значение y из области изменения ε. Если функция $y=f(x)$ *возрастающая* (или *убывающая*), то взятому y отвечает лишь одно значение x из E, для которого $y=f(x)$, и тем самым мы получаем некоторую однозначную функцию $x=g(y)$, которую называют обратной для функции $y=f(x)$. Она имеет своей областью задания множество ε, а областью изменения E; E и ε поменялись ролями.

Теорема. Пусть $y=f(x)$ и $x=g(y)$ - взаимно обратные, возрастающие (или убывающие) и непрерывные функции, заданные в некоторых промежутках. Если в точке x существует конечная производная $f'(x)\neq 0$, то в соответствующей точке y функция $g(y)$ также имеет производную (по y), причем

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

что можно записать и так:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Если функция имеет нулевую или бесконечную производную, то обратная функция в соответствующей точке имеет бесконечную или соответственно нулевую производную.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти производные заданных функций:

1. $y=2^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. 2. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 3. $y=\ln^2(1-\cos x)$.

4. $y=\ln(\arcsin\sqrt{x})$. 5. $y=\dfrac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+\ln^2 3}$. 6. $y=\dfrac{\operatorname{sh}2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

7. $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 8. $y=\operatorname{arctg}3^{\sqrt{x}}$. 9. $y=\ln(1+\sqrt{\operatorname{th}x})$.

10. $y=\ln\sin 3-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Задание 2. Вычислить производную функции

а) $y=5^x+x\ln x$, в точке $x_0=1$;

б) $y(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x\ \ -4x^3+5$, в точке $x_0=1$;

в) $f(x)=2x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0=4$;

г) $f(x)=4x^3+6x+3$ в точке $x_0=1$.

Задание 3. Вычислить производные:

а)

1) $y=\arcsin 5x$; 2) $y=\arcsin\sqrt{x}\ (x>0)$; 3) $y=\arcsin mx$;
4) $y=\arccos 6x$; 5) $y=\arccos(1-x^2)$; 6) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

б)

1) $y = \operatorname{arctg} 5x$; 2) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; 3) $y = \operatorname{arctg} 3x^2$;

4) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y = \operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x^2}$.

в)

1) $y = \ln(ax+b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln\sin x$;

4) $y = \ln \operatorname{arctg} x$; 5) $y = x\ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;

7) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Вопросы

1. Какая функция называется сложной?
2. Объясните правила дифференцирования сложной функции.
3. Какая функция называется обратной данной?
4. Каковы правила дифференцирования обратной функции?

Практическое занятие 21. Геометрический и механический смысл производной.

Цель: сформировать умение применять геометрические и физические приложения производной функции при решении задач профессиональной деятельности.

Теоретическая часть:

Скорость v точки M, движущейся по прямой, есть производная от расстояния s по времени t, т. е.

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Угловой коэффициент касательной к непрерывной кривой $y = f(x)$ есть производная от y по x (в соответствующей точке):

$$tg\alpha = y'$$

или

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

При этом если существует касательная, то существует и производная, и наоборот. Случаю касательной, не параллельной оси Oy, отвечает конечная производная; случаю касательной, параллельной оси Oy, отвечает бесконечная производная.

Пример Точка движется по прямой по закону $s = t^3$ (путь s измеряется в метрах, время t - в секундах). Найти ее скорость в момент $t = 5$.

Решение. Скорость в любой момент t равна: $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2$.

Поэтому $v|_{t=5} = 3\cdot 5^2 = 75\ м/сек$.

Пример Точка, оставаясь на прямой, совершает колебательное движение по закону $s = \sin t$. В какие моменты времени скорость обращается в нуль?

Решение. Скорость в любой момент имеет значение

$$v = \frac{ds}{dt} = \cos t$$

Поэтому $v = 0$ при $t = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n = 0,1,2,...$

Пример Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Угловой коэффициент касательной в любой точке дается формулой

$$k = y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Поэтому для точки $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ $k = -\frac{1}{4}$. Как известно из аналитической геометрии, уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом k, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

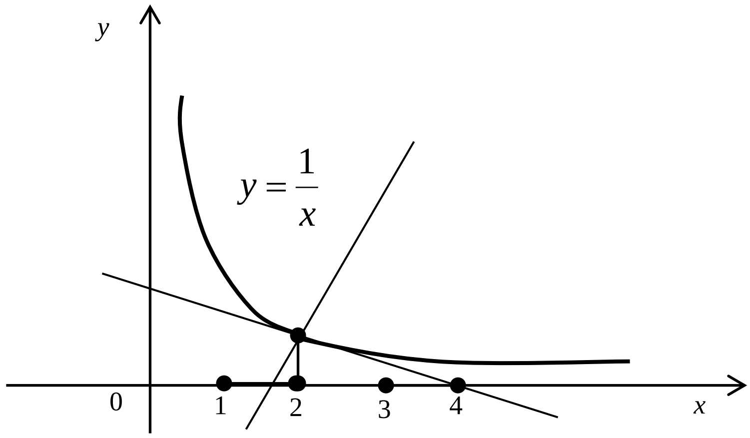
В нашем случае мы получаем

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2),$$

или

$$x+4y-4=0\,.$$

Это и есть уравнение искомой касательной, изображенной на рисунке.



Угловой коэффициент нормали к кривой в точке $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ имеет значение

$$k_{норм}=-\frac{1}{k_{кас}}=4$$

(в силу условия перпендикулярности двух прямых). Следовательно, уравнение нужной нам нормали имеет вид

$$y-\frac{1}{2}=4(x-2)$$

или

$$8x-2y-15=0\,.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Точка движется по прямой по закону $S=5t^3-3t^2+4$, где путь S измеряется в сантиметрах, а время t – в секундах. Найти среднюю скорость за промежуток времени от $t_1=1$ до $t_2=(1+\Delta t)$, считая $\Delta t=$ 0,5; 0,3; 0,1. Определить также истинную скорость в момент t = 1 сек.

Указание. 1) Найти ΔS; 2) $V_{ср}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Задача 2. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции *y* в точке:

1. $y=x-x^2,\quad a=1.$
2. $y=x^2+x+1,\quad a=-1.$
3. $y=x^3+x,\quad a=1.$
4. $y=\sqrt{x}-2,\quad a=4.$
5. $y=x^2+\sqrt{x^3},\quad a=1.$
6. $y=\sqrt[3]{x^2}-9,\quad a=-27.$
7. $y=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}},\quad a=9.$
8. $y=32\sqrt[4]{x}-x,\quad a=16.$
9. $y=x^2-x-1,\quad a=1.$
10. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2},\quad a=2.$

Задача 3. Составить уравнения касательной и нормали к графикам функций, заданным параметрически:

1. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \quad t_0=\pi/2. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=2t-t^2, \quad t_0=1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t, \quad t_0=\pi/6. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=t-t^2, \\ y=t-t^3, \quad t_0=1. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t, \quad t_0=\pi/2. \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\arcsin t, \quad t_0=-1. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\operatorname{arctg} t, \quad t_0=1. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x=\ln \operatorname{tg} t, \\ y=1/\sin^2 t, \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$
10. $\begin{cases} x=t\sin t+\cos t, \\ y=\sin t-t\cos t, \quad t_0=\pi/4. \end{cases}$

Вопросы

1. Каков геометрический смысл производной?
2. Каков механический смысл производной?
3. Запишите уравнение касательной к графику функции в общем виде.

Практическое занятие 22. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.

Цель: сформировать умение вычислять производные неявных и параметрически заданных функций, показательно-степенной функции, производные высших порядков и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Пусть необходимо вычислить производную функции, заданной параметрически, если зависимость *y* от *x* задана посредством параметра t:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

то зависимость y' от x задается посредством параметра t формулами

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}. \end{cases} \qquad (1)$$

Вычисляем $f'(t)$ и $g'(t)$, подставляем в формулу (1) и записываем ответ.

Пример

Найти производную y'_x, если

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\,\frac{\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - (1+\sqrt{1+t^2})}{t^2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (1), получаем

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y' = \dfrac{1+t^2}{t}. \end{cases}$$

Если независимая переменная *x* и функция *y* связаны уравнением вида *f(x,y)=0*, которое не разрешено относительно *y*, то *y* называется неявной функцией *x*. Несмотря на то, что уравнение *f(x,y)=0* не разрешено относительно *y*, оказывается возможным найти производную от *y* по *x*. Прием вычисления производной неявной функции состоит в том, что обе части уравнения *f(x,y)=0* дифференцируются по *x* с учетом, что *y* есть функция *x*. Из полученного уравнения определяется y'.

Пример Найти производную от неявной функции 5x+3y-7=0.

Дифференцируя по x обе части равенства и учитывая, что: 1) y есть функция x и что 2) производная правой части равенства равна 0, получаем $5 + 3y' = 0;\ 3y' = -5;\ y' = -\frac{5}{3}.$

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $y' = f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка. Эта производная сама является *функцией* от x и, может быть, в свою очередь имеет производную. Производную от функции $y' = f'(x)$ называют *второй* производной (или производной *второго порядка*) от функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов

$$y'',\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad f''(x),\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2},\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x).$$

Может случиться, что и вторая производная в свою очередь имеет производную; эту производную называют *третьей* производной (или производной *третьего порядка*) от функции $y = f(x)$ и обозначают каким-либо из символов

$$y''',\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad f'''(x),\quad \frac{d^3f(x)}{dx^3},\quad \frac{d^3}{dx^3}f(x).$$

Аналогично вводится *четвертая, пятая* и другие производные - производные любого порядка. Для обозначения производной n-го порядка употребляются символы:

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

Иногда для указания той переменной, по которой берется производная, пишут

$$y''_{xx}, \quad y'''_{xxx}, \quad \ldots$$

или, более коротко,

$$y''_{x^2}, \quad y'''_{x^3}, \quad \ldots$$

Пример

$y = 2x^3, \quad y' = 6x^2, \quad y'' = 12x, \quad y''' = 12, \quad y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = 0$.

Пример

$y = 2x^3 - 5x^2 + 1, \quad y' = 6x^2 - 10x, \quad y'' = 12x - 10, \quad y''' = 12, \quad y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = 0$.

Пример

$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x$, значения последующих производных чередуются в том же порядке.

Чтобы имело смысл говорить о конечном или бесконечном значении $y^{(n)}$ в точке x_0, нужно, чтобы $y^{(n-1)}$ как функция от x была определена и конечна в некотором промежутке, содержащем точку x_0. Таким образом, когда говорят, что в точке x_0 имеется конечная или бесконечная *n*-я производная, то тем самым подразумевают существование конечной $(n-1)$-й производной в некотором промежутке, содержащем точку x_0.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить производную функции:

а)

1) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln \frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}\right);$

2) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln \frac{1 - x\sqrt{2} + x^2}{1 + x\sqrt{2} + x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}\right);$

3) $y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} \ln \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}\right).$

б)

1. $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$. 2. $y = x^x 3^{\sqrt{x}}$.
5. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$. 6. $y = x^{\sqrt{x}}\, 2^{\sin x}$.
7. $y = x^{2^{\cos x}}$. 8. $y = x^{\operatorname{tg} x}$.
9. $y = (\sin 3x)^{\ln \sin 3x}$. 10. $y = x^{2^x}\, 3^x$.

Задание 2. Найти производные n-го порядка заданных функций:

1. $y = \sin 2x + \cos 3x$. 2. $y = \sin(3x + 1) + \cos 2x$. 3. $y = 2^{3x}$.
4. $y = \ln(2x + 4)$. 5. $y = \frac{x}{x + 1}$. 6. $y = \frac{x + 1}{2x + 3}$.
7. $y = 3^{2x+1}$. 8. $y = \ln(3x + 1)$. 9. $y = 5^{2x+4}$.
10. $y = \sqrt{x}$.

Вопросы

1. Какая функция считается заданной неявно?
2. Запишите формулы дифференцирования функции, заданной неявно.
3. Для дифференцирования каких функций целесообразно применение метода логарифмического дифференцирования?
4. Дайте определение производной порядка n. Как обозначаются производные высших порядков?
5. Опишите особенности дифференцирования функций, заданных параметрически.

Практическое занятие 23. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции.

Цель: сформировать умение применять производные для вычисления предела двух бесконечно малых или двух бесконечно больших, применять формулу Тейлора при замене функции многочленом, использовать полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Речь пойдет о вычислении предела отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших. В первом случае говорят, что имеют дело с «неопределенностью типа $\frac{0}{0}$», во втором случае – с «неопределенностью типа $\frac{\infty}{\infty}$». Конечно, сами по себе символы $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ лишены смысла, и их используют лишь для обозначения типа неопределенности.

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\ln x}$ – неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+5x-1}{2x^3+3}$ – неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Следующая теорема основывается на теореме Коши и дает полезное общее правило для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, в литературе обычно называющееся *правилом Лопиталя*:

Пусть при $x\to a$ *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тогда*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если второй предел (конечный или бесконечный) существует. При этом предполагается, что в некоторой окрестности точки а (за исключением, быть может, самой этой точки) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x)\neq 0$ при $x\neq a$.

Правило сохраняет силу и тогда, когда рассматриваются лишь значения $x<a$ *или* $x>a$, *а также в случае* $a=\infty$, $+\infty$ *или* $-\infty$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{\sec^2 x}=5.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos \pi x}{\frac{1}{x}}=-\pi$$

Пример.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{\left(x^2-3\right)\left(2x-3\right)}=4.$$

Может случиться, что отношение производных опять приводит к неопределенности. Но к отношению производных можно снова применить установленное правило (если, конечно, выполнены условия его применимости), т.е. перейти к отношению вторых производных. Если и здесь получается неопределенность, то переходим к третьим производным, и т. д. Коль скоро на каком-то шаге мы получим предел, который сможем вычислить, то найденное его значение и будет искомым пределом отношения функций.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Имеется еще ряд особых случаев вычисления пределов, однако все они легко сводятся к случаям неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$:

а) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, где $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ – случай неопределенности типа $0\cdot\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$, где $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ – случай $\infty-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}$, где либо $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ – случай 0^0, либо $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to 0$ – случай ∞^0, либо $f(x)\to 1$ и $g(x)\to\infty$ – случай 1^∞.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg} x\cdot\ln\sin x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2 x}{\sin x}=-\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\sin x\right)=0$

Формула Тейлора для многочлена

Рассмотрим многочлен *n*-й степени

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n \qquad (1)$$

($c_0, c_1, c_2\ldots c_n$ – постоянные). Продифференцируем эту функцию *n* раз:

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1},$$
$$f''(x)=1\cdot 2c_2+2\cdot 3c_3x+\ldots+(n-1)nc_nx^{n-2},$$
$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3c_3+\ldots+(n-2)(n-1)nc_nx^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot nc_n.$$

Если во всех этих формулах положить $x=0$, то получим $f(0)=c_0$, $f'(0)=c_1$, $f''(0)=2!c_2$, $f'''(0)=3!c_3,\ldots,$ $f^{(n)}(0)=n!c_n$,

откуда

$$c_0=f(0),\ c_1=\frac{f'(0)}{1!},\ c_2=\frac{f''(0)}{2!},\ c_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставив эти значения в равенство (1), найдем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (2)$$

Здесь коэффициенты многочлена выражены через его значение и значения его производных в точке $x=0$.

Оказывается справедливой и более общая формула. Пусть *a* – какое-нибудь число. Положим $x-a=t$, t – новая переменная. Тогда

$$f(x)=f(t+a)=c_0+c_1(t+a)+c_2(t+a)^2+c_3(t+a)^3+\ldots+c_n(t+a)^n;$$

это – многочлен степени *n* относительно *t*. Раскрыв скобки и сгруппировав члены, получим

$$f(x)=C_0+C_1t+C_2t^2+C_3t^3+\ldots+C_nt^n$$

($C_0, C_1, C_2, C_3\ldots C_n$ – новые коэффициенты) или, вернувшись к переменной *x*,

$$f(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+\ldots+C_n(x-a)^n. \qquad (3)$$

Таким образом, *каково бы ни было a, многочлен степени n всегда можно записать в виде* (3). Эта формула носит название *формулы Тейлора* для многочлена и содержит формулу (2) как частный случай (при $a=0$); формулу (2) называют часто *формулой Маклорена*.

Формула Тейлора для любой n раз дифференцируемой функции:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

Формула Тейлора имеет важные применения во многих вопросах математического анализа и его приложений. В частности, во многих случаях она позволяет функцию сложной природы с большой степенью точности заменить многочленом, т.е. функцией более простой, дает простой способ приближенного вычисления значений функции.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$ (0^0)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$ (0^0)

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

Задача 2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}$ (1^∞);

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (1^∞);

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (1^∞);

4) $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^x$ (∞^0);

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ (∞^0).

Задача 3. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$ и $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$; 5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

Задача 4. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\operatorname{tg} x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg} x-\frac{\pi}{2}\sec x\right)$.

Задача 5. Разложить многочлен по степеням $x-x_0$, если:

а) $P(x)=x^3+4x^2-6x-8, \quad x_0=-1;$

б) $P(x)=x^5-3x^4+7x+2, \quad x_0=2.$

Задача 6. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в точке $x_0=1.$

Задача 7. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=2^x$ в точке $x_0=\log_2 3.$

Вопросы

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
2. Неопределенности какого вида можно «раскрывать» при помощи правила Лопиталя?
3. Записать формулу Тейлора для многочлена. Привести пример практического приложения формулы.
4. Запишите формулу Маклорена. Объясните взаимосвязь формул Тейлора и Маклорена для многочлена.
5. Запишите формулу Тейлора для любой дифференцируемой n раз функции.

Практическое занятие 24. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Цель: сформировать умение исследовать функцию с помощью производной, использовать полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Точки, в которых функция имеет экстремумы, следует искать среди тех внутренних точек ее области задания, где либо $f'(x)=0$*, либо* $f'(x)=\infty$*, либо* $f'(x)$ *не существует.* Все эти случаи реализуются, например, для функций $y=x^2$, $y=x^{2/3}$, $y=|x|$, каждая из которых имеет минимум при $x=0$.

Точки указанного вида условимся называть критическими точками. Не в каждой критической точке обязательно будет экстремум. Действительно, точка x = 0 будет критической для каждой из функций $y=x^3$ ($y'=3x^2, y'=0$ при x=0), $y=\sqrt[3]{x}$ ($y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}, y'=\infty$ при x=0),

Следующие теоремы позволяют определить, имеется в данной критической точке экстремум или нет, и если имеется, то максимум или минимум.

Теорема 1. *Пусть* x_0*—критическая точка и функция* $f(x)$ *непрерывна в этой точке. Если в некоторой окрестности точки* x_0*:*

1) $f'(x)>0$ *при* $x<x_0$ *и* $f'(x)<0$ *при* $x>x_0$*, т. е. при переходе через точку* x_0 *производная меняет знак с плюса на минус, или*

2) $f'(x)<0$ *при* $x<x_0$ *и* $f'(x)>0$ *при* $x<x_0$*, т. е. при переходе через* x_0 *производная меняет*

знак с минуса на плюс, или

3) производная не меняет знака при переходе через x_0*, то в случае 1) имеет место максимум, в случае 2)—минимум, в случае 3) экстремума нет.*

Пример. $f(x)=x^3-3x+1$. Функция всюду дифференцируема. Следовательно, все критические точки находятся из уравнения

$$f'(x)=3x^2-3=0.$$

Отсюда

$$x^2-1=0,\ x_1=-1,\ x_2=1$$

— две критические точки.

1) $x_1=-1$. При x < — 1 имеем: $f'(x)=3x^2-3>0$; при $x>-1$ (но $x<1$): $f'(x)<0$. Следовательно, в точке $x_1=-1$ имеет место *максимум*.

2) $x_2=1$. При $x<1$ (но x> -1): $f'(x)=3x^2-3<0$; при $x>1$ имеем: $f'(x)>0$. Следовательно, в точке $x_2=1$ имеет место *минимум*.

Теорема 1 позволяет высказать следующие практически полезные соображения.

Пусть речь идет об отыскании экстремумов функции $f(x)$, непрерывной в некотором промежутке и имеющей в нем *конечное* множество критических точек.

Найдя все критические точки, расположим их в порядке возрастания абсцисс:

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n<b \qquad (1)$$

(a и b — концы рассматриваемого промежутка). В каждом из интервалов

$$(a,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},x_n),(x_n,b) \qquad (2)$$

существует конечная $f''(x)\neq 0$ (поскольку все точки, где $f'(x)=0$, $f'(x)=\infty$ или где $f'(x)$ не существует, вошли в число точек $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$). Предполагая $f'(x)$ непрерывной в каждом из частичных интервалов (2) — на практике это обычно так и бывает, — нетрудно прийти к выводу, что $f'(x)$ *сохраняет знак* внутри каждого такого интервала (если бы $f'(x)$ *меняла* знак внутри какого-нибудь из интервалов (2), то по свойству непрерывных функций она обращалась бы в нуль в некоторой *внутренней* точке этого интервала, что невозможно). Чтобы найти этот знак, достаточно, например, установить его для какой-нибудь *конкретной* точки соответствующего интервала.

В результате интервалам (2) будет соответствовать некоторая последовательность знаков плюс и минус, характер чередования которых в силу теоремы 1 позволяет судить о наличии максимума (смена плюса на минус), минимума (смена минуса на плюс) или об отсутствии экстремума (сохранение знака) в соответствующих точках.

Пример. $f(x)=(x+1)^2(x-1)^3$. Функция задана и непрерывна во всем бесконечном промежутке $(-\infty,\infty)$. Ее производная

$$f'(x)=2(x+1)(x-1)^3+3(x+1)^2(x-1)^2=(x+1)(x-1)^2(5x+1)=5(x+1)(x-1)^2\left(x+\frac{1}{5}\right) \qquad (3)$$

всюду существует и конечна. Следовательно, критическими точками будут *лишь* те, для которых

$$f'(x)=0,$$

т. е.

$$x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{5},\ x_3=1.$$

Промежуток задания функции тем самым разбивается на интервалы

$$(-\infty,-1),\ \left(-1,-\frac{1}{5}\right),\ \left(-\frac{1}{5},1\right),\ (1,+\infty).$$

Соответствующая последовательность знаков производной имеет вид

$$+,\ -,\ +,\ +.$$

Следовательно, в точке $x_1=-1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(-1)=0$; в точке $x_2=-\frac{1}{5}$ - минимум, причем $f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{16}{25}\cdot\frac{216}{125}=-\frac{3456}{3125}$, в точке $x_3=1$ экстремума нет.

Теорема 2. *Пусть в критической точке x функция* $f(x)$ *n раз дифференцируема* (*n* > 1)*, причем* $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$*, но* $f^{(n)}(x_0)\neq 0$*. Если n четное, то имеет место экстремум, а именно: при* $f^{(n)}(x_0)<0$ *—максимум, при* $f^{(n)}(x_0)>0$*—минимум. Если же n нечетное, то экстремума нет.*

Отыскание наибольших и наименьших значений функций

Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна в некотором промежутке. Если этот промежуток не является отрезком, то, как мы знаем, среди значений $f(x)$ может и не быть наибольшего или наименьшего. Однако можно указать простой признак, когда такие значения заведомо существуют.

Теорема 3. *Если в данном промежутке имеется единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет либо наибольшим, либо наименьшим, смотря по тому, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.*

Если наибольшее или наименьшее значение достигается во *внутренней* точке отрезка, то оно *необходимо* будет одним из максимумов или минимумов и, следовательно, будет достигаться в одной из критических точек. Но оно может достигаться и в конце отрезка. Отсюда следует, что для отыскания наибольшего или наименьшего значений $f(x)$ достаточно сравнить между собой ее значения во всех критических точках и в точках a и b; *наибольшее* из всех этих чисел будет *наибольшим значением* $f(x)$ на отрезке $[a,b]$; *наименьшее* из этих чисел даст *наименьшее значение* $f(x)$.

Пример. Функция $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ имеет областью существования отрезок [–1,1]. Ее наибольшее и наименьшее значения, очевидно, достигаются в тех же точках, что и для функции $g(x)=(1-x^2)(1+2x^2)$ (рассматриваемой на упомянутом отрезке). Из уравнения

$$g'(x)=-2x(1+2x^2)+(1-x^2)\cdot 4x=2x(1-4x^2)=0$$

находим $x_1=0$, $x_2=-0{,}5$, $x_3=0{,}5$. В этих точках $g(x)$ имеет значения:

$$g(0)=1,\ g(-0{,}5)=g(0{,}5)=1{,}125\,.$$

Если сопоставим эти значения со значениями в концах $g(-1)=g(1)=0$, то увидим, что наибольшим значением для $g(x)$ на отрезке [–1, 1] будет 1,125 (при $x=\pm 0{,}5$), наименьшим будет 0 (при $x=\pm 1$). Для функции $f(x)$ наибольшим значением будет тогда $\sqrt{1{,}125}$ (при $x=\pm 0{,}5$), наименьшим — по-прежнему 0 (при $x=\pm 1$).

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$ и в точке с абсциссой x_0 имеет касательную, не параллельную оси *Oy*.

Если в некоторой окрестности точки x_0 кривая лежит над этой касательной, то говорят, что кривая в точке x_0 выпукла вниз. *Аналогично, если в некоторой окрестности* x_0 *кривая лежит* под *касательной, то говорят, что она в точке* x_0 выпукла вверх. Если в некоторой окрестности точки x_0 слева от x_0 кривая лежит по одну сторону упомянутой касательной, а справа от x_0 — по другую сторону, то говорят, что x_0 есть *точка перегиба* кривой.

Теорема 4. *Если в точке* x_0 *существует конечная производная* $f''(x_0)$*, причем* $f''(x_0)>0$*, то в точке* x_0 *кривая выпукла вниз, если же* $f''(x_0)<0$*, то кривая выпукла вверх.*

Теорема 5. *Пусть* $f''(x)$ *существует и конечна в некоторой окрестности точки* x_0*. Если* $f''(x)$ *меняет знак при переходе x через точку* x_0*, то* x_0*—точка перегиба. Если же* $f''(x)$ *в окрестности* x_0 *сохраняет знак, то в точке* x_0 *перегиба нет.*

Пример. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой $y=x^3-3x^2+1$. Вычисляем: $y'=3x^2-6x$, $y''=6x-6$. Уравнение $y''=6x-6=0$ дает $x=1$. При $x<1$, очевидно, $y''<0$ (кривая выпукла вверх), если же $x>1$, то $y''>0$ (кривая выпукла вниз). Точка $x=1$ является точкой перегиба.

Отыскание асимптот

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Может случиться, что при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ кривая неограниченно приближается к некоторой фиксированной прямой $y = kx + b$, называемой *асимптотой* для данной кривой. Точнее говоря, *прямая* $y = kx + b$ *называется асимптотой для кривой* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$.

Из высказанного определения следует, что кривая $y = f(x)$ имеет *горизонтальную* асимптоту $y = b$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (или соответственно при $x \to -\infty$).

Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$. (При $k = 0$ получаем опять горизонтальную асимптоту.)

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x \right] = 2$$

Следовательно, имеется асимптота (и при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$): $y = x + 2$.

Пример. Определим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке [-2;1].

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке [-2;1], как многочлен. Поэтому по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки, для чего продифференцируем функцию.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

Тогда $f'(x) = 0$, если $x = 0$ или $x = -1$ или $x = 1$.

Получили две критические точки $x = 0$ и $x = -1$ принадлежащие данному промежутку [-2;1]. Точка $x = 1$ не является внутренней и поэтому не критическая.

Вычислим значения функции на концах промежутка и в критических точках и выберем из них наибольшее и наименьшее.

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11$$

$$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$f(0) = 3$$

$$f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

Следовательно, $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(1) = 2$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = 11$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти значения x, при которых функция $f(x) = 4x + \frac{9}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 2. Найти значения x, при которых функция $f(x) = 3x^2 + \frac{48}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 3. Найти интервалы монотонного убывания функции $y = x^3 + 1{,}5x^2 + 2$.

Задача 4. Найти интервалы монотонного убывания функции $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Задача 5. Найти интервалы монотонного убывания функции $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} - x$.

Задача 6. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y = \frac{-3x^2 - 5x - 4}{x+1}$.

Задача 7. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y = \frac{x^2 + 3x - 12}{x+5}$.

Задача 8. Найти все критические точки функции $f(x) = 2x^2 - 6|x+1| + 5$.

Задача 9. Найти все критические точки х функции $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$.

Вопросы

1.Сформулируйте условия монотонности функции.

2. Какие точки называются стационарными; критическими; точками экстремума?
3. Сформулируйте необходимые условие экстремума.
4. Какая функция называется выпуклой вверх (выпуклой вниз)?
5. Что такое точка перегиба?
6. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вверх (вниз).
7. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба.
8. Что такое асимптота графика функции? Какие виды асимптот Вы знаете?
9. Как определить наличие вертикальной асимптоты?
10. В каком случае прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции?

Практическое занятие 25. Исследование функций при помощи производных и построение их графиков.

Цель: сформировать умение исследовать функцию с помощью производной, использовать полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции, точки разрыва и интервалы непрерывности.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность (где возможно).
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
4. Определить интервалы монотонности, точки локальных экстремумов, экстремальные значения функции.
5. Найти точки перегиба графика функции, вычислить значения функции этих точках, установить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.
6. Исследовать поведение функции на границах ее области определения. Найти асимптоты графика функции.
7. Вычислить по необходимости значения функции в некоторых дополнительных точках.
8. Используя все полученные свойства в пунктах 1-7, построить график функция.

Этот порядок при исследовании функции можно изменять.

Пример. Постройте график функции:

$$1.\ y = \frac{x^3}{x^2 - 9}.$$

Исследование.

1) Функция определена и непрерывна при всех $x \in (-\infty;-3) \cup (-3;3) \cup (3;+\infty)$.

2) Функция нечетная, т.к. $\frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 9} = -\frac{x^3}{x^2 - 9}$, т.е. $f(-x) = -f(x)$.

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно исследовать функцию на промежутке [0;+∞), Легко заметить , что точка O(0;0) - единственная точка пересечения с осями координат.

3) Найдем асимптоты.

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{x^3}{x^2 - 9} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3+0} \frac{x^3}{x^2 - 9} = +\infty.$$

Поэтому прямая x=3 является вертикальной асимптотой.

Найдем теперь наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-9}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-9\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x}{x^2-9}=0.$$

Получили наклонную асимптоту $y=x$.

4) Найдем интервалы монотонности функции и точки экстремума, для чего продифференцируем ее:

$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-9}\right)'=\frac{3x^2(x^2-9)-2xx^3}{(x^2-9)^2}=\frac{3x^4-27x^2-2x^4}{(x^2-9)^2}=\frac{x^4-27x^2}{(x^2-9)^2}=\frac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2}$$

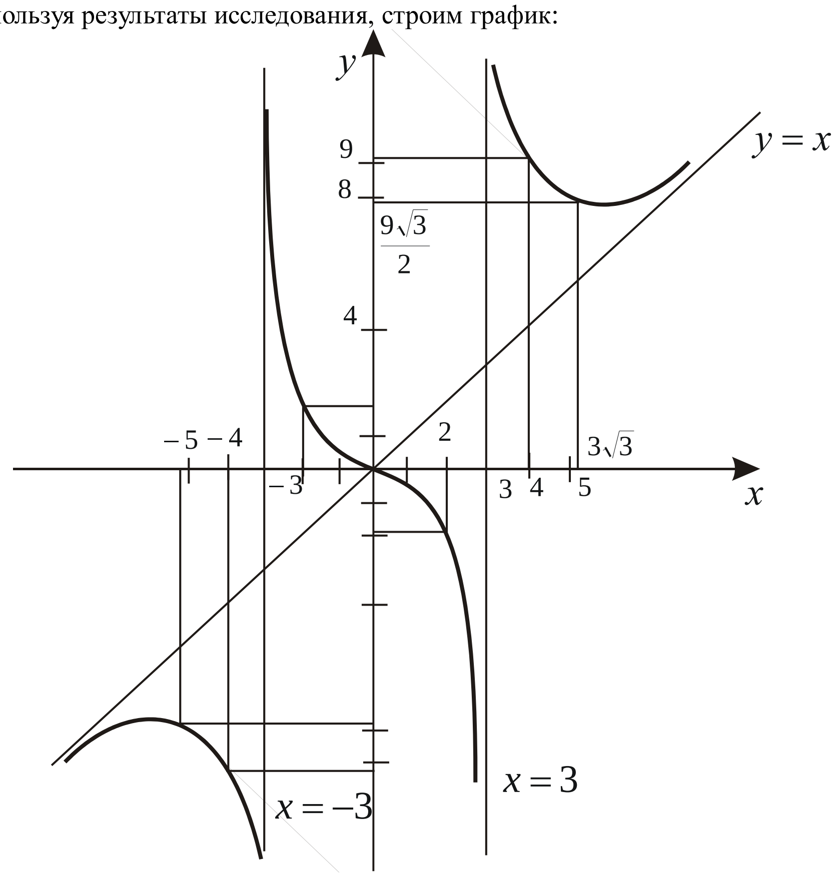
Тогда $y'=0$, если x=0 или $x=3\sqrt{3}$ и y' не существует, если $x=3$. Но $x=3\in D(y)$. Поэтому критическими точками являются $x=0$ и $x=3\sqrt{3}$. Составим таблицу.

X	0	$(0;3)$	$(3;3\sqrt{3})$	$3\sqrt{3}$	$(3\sqrt{3};+\infty)$
y'	0	-	-	0	+
Y	0	$\downarrow$	$\downarrow$	$\min=\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\uparrow$

6) Вычислим значение функции в некоторых дополнительных точках.

$$f(2)=\frac{8}{4-9}=-\frac{8}{5}=-1\frac{3}{5},\qquad f(4)=\frac{4^3}{4^2-9}=\frac{64}{7}=9\frac{1}{7}$$

7) Используя результаты исследования, строим график:



Вопросы и задачи:

Исследовать функцию и построить ее график:

1. $f(x)=4x+\dfrac{9}{x}$

2. $f(x)=3x^2+\dfrac{48}{x}$

3. $y=x^3+1{,}5x^2+2$

4. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$

5. $y=\frac{x^2+3x-12}{x+5}$

Практическое занятие 26. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.

Цель: сформировать умение вычислять дифференциал функции, использовать его геометрические приложения, применять к приближенным вычислениям при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Приращение функции $y=f(x)$, имеющей в точке *x* конечную производную, представимо в виде

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

где α - бесконечно малая при $\Delta x\to 0$.

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ в правой части формулы пропорционально величине Δx (коэффициентом пропорциональности служит число $f'(x)$). Если $f'(x)\neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\neq 0,$$

а это означает, что за исключением случая, когда $f'(x)=0$, упомянутое слагаемое $f'(x)\Delta x$ является при $\Delta x\to 0$ бесконечно малой *того же* порядка, что и Δx.

Полагаем $dy=f'(x)\Delta x$ и назовем эту величину дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке *x*. Для дифференциала употребляется также обозначение $df(x)$. Дифференциалом независимой переменной *x* называют ее приращение, т. е. *полагают* $dx=\Delta x$.

Следовательно, можем писать $dy=f'(x)dx$.

Таким образом, *дифференциалом функции в точке x называется произведение производной в этой точке на дифференциал независимой переменной* (*т. е. на приращение независимой переменной*).

Например, для функции $y=x^2$ дифференциал в любой точке *x* дается формулой

$$dy=2xdx.$$

Обычно структура дифференциала функции значительно проще структуры ее приращения, к поэтому формулой широко пользуются в приближенных вычислениях.

Например, для функции $y=x^3$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot\Delta x^2+\Delta x^3,$$

в то время как

$$dy=3x^2\cdot\Delta x.$$

Если взять *x*=2, $\Delta x=0{,}01$, то

$$\Delta y=3\cdot 4\cdot 0{,}01+3\cdot 2\cdot 0{,}0001+0{,}000001=0{,}120601,$$

$$dy=3\cdot 4\cdot 0{,}01=0{,}12.$$

Таким образом, абсолютная ошибка

$$|dy-\Delta y|=0{,}000601,$$

относительная ошибка

$$\left|\frac{dy-\Delta y}{\Delta y}\right|=\frac{0{,}000601}{0{,}120601}\approx 0{,}05\left(\frac{1}{2}\%\right).$$

Когда хотят вычислить значение $f(x+\Delta x)$, зная $f(x)$, то часто поступают так: *точное* равенство $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y$ заменяют приближенным равенством $f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy$ и этим упрощают выкладки.

Так, возвращаясь опять к функции $y=x^3$, получаем $(x+\Delta x)^3\approx x^3+\underbrace{3x^2\cdot\Delta x}_{dy}$

и, в частности, $(2{,}01)^3=(2+0{,}01)^3\approx 2^3+0{,}12=8{,}12$.

Если $y=\sqrt{x}$, то $\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x}_{dy}$

и, в частности, $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{\Delta x}{2}$ — довольно известная приближенная формула.

Геометрический смысл дифференциала: значение дифференциала функции, отвечающее некоторому приращению независимой переменной, совпадает с соответствующим приращением ординаты касательной к графику функции.

Основные правила вычисления дифференциала функции:

I. $dC=0\,(C=\text{const})$. II. $d(Cu)=Cdu\,(C=\text{const})$.

III. $d(u\pm v)=du\pm dv$. IV. $d(uv)=du\cdot v+u\cdot dv$.

V. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}$. VI. $d\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{dv}{v^2}$.

VII. $d\left(u^{\alpha}\right)=\alpha u^{\alpha-1}du$. VIII. $d\left(\sqrt{u}\right)=\frac{du}{2\sqrt{u}}$.

IX. $d\left(a^u\right)=a^u\ln a\cdot du$ ($a=\text{const}>0,\ a\neq 1$). X. $d\left(e^u\right)=e^u du$.

XI. $d(\lg_a u)=\frac{du}{u}\lg_a e$. XII. $d(\ln u)=\frac{du}{u}$

XIII. $d(\sin u)=\cos u\cdot du$. XIV. $d(\cos u)=-\sin u\cdot du$.

XV. $d(\mathrm{tg}u)=\frac{du}{\cos^2 u}$. XVI. $d(\mathrm{ctg}u)=-\frac{du}{\sin^2 u}$.

XVII. $d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$. XVIII. $d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

XIX. $d(\mathrm{arctg}u)=\frac{du}{1+u^2}$. XX. $d(\mathrm{arcctg}u)=-\frac{du}{1+u^2}$.

XXI. $d(\mathrm{sh}u)=\mathrm{ch}u\cdot du$. XXII. $d(\mathrm{ch}u)=\mathrm{sh}u\cdot du$.

XXIII. $d(\mathrm{th}u)=\frac{du}{\mathrm{ch}^2u}$. XXIV. $d(\mathrm{cth}u)=-\frac{du}{\mathrm{sh}^2u}$.

Всюду здесь u и v — произвольные дифференцируемые функции от x.

Пример.

$$d\left(\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{d\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Пример.

$$d(\ln\sin x)=\frac{d\sin x}{\sin x}=\frac{\cos x dx}{\sin x}=\mathrm{ctg}x dx.$$

Пример.

$$d\left(\mathrm{sh}e^x\right)=\mathrm{ch}e^x d\left(e^x\right)=\mathrm{ch}e^x\cdot e^x\cdot dx.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти дифференциалы функции:

а) $y=\frac{1}{\ln^2 x}$; б) $y=\ln(ax^2+bx+c)$; в) $y=\frac{3ctgx}{e^x-1}$; г) $y=e^x tgx$; д) $y=\frac{tgx}{\sin x+2}$; е) $y=\ln^3 x$; ж) $y=\arccos\left(x^2-1\right)$; з) $y=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$; и) $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$; к) $y=\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$; л) $y=\frac{1+x\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Задача 2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции в данной точке:

1. $y = x^5$, $x = 2,001$. 2. $y = \sqrt{4x-3}$, $x = 0,98$.

3. $y = \sqrt{x^3}$, $x = 1,02$. 4. $y = x^3$, $x = 2,999$.

5. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1,03$. 6. $y = \sqrt{x}$, $x = 3,996$.

7. $y = \sqrt{1+\sin x}$, $x = 0,02$. 8. $y = \sqrt{2x+\cos x}$, $x = 0,01$.

9. $y = \sqrt[3]{2x - \sin\frac{\pi x}{2}}$, $x = 1,03$. 10. $y = \sqrt{4x+1}$, $x = 1,97$.

Вопросы
1. Что такое дифференциал функции?
2. Каков геометрический смысл дифференциала?
3. Приведите формулу для вычисления дифференциала функции.
4. Как определяются дифференциалы высших порядков?
5. Приведите примеры практического приложения дифференциала.

Раздел 5. Математический анализ. Интегральное исчисление функций одной переменной

Практическое занятие 27. Таблица основных неопределенных интегралов. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.

Цель: сформировать умение непосредственного интегрирования функции с использование простейших свойств интеграла, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Первообразная функция.

Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a,b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

	Интеграл	Значение		Интеграл	Значение
1	$\int tgxdx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgxdx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos xdx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	$-\cos x + C$

4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^{\alpha} dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\|tg \frac{x}{2}\right\| + C$

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются другие способы интегрирования.

Вопросы и задачи:

Задача 1.Найти неопределенные интегралы:

1) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4)\, dx$;

2) $\int (3x^3 + 5x^2 - 8)(9x^2 + 10x)\, dx$; 3) $\int \sqrt{x^2+6} \cdot 2x\, dx$;

4) $\int (2x^2 + 7)^3 x\, dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^3+8}\, x^2\, dx$; 6) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, x\, dx$.

Задача 2. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; 3) $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; 6) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$; 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}} dx$; 8) $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{1-3x^2}}$;

9) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\, dx$; 10) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx$.

Задача 3. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x+a}$;

2) $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$; 4) $\int \frac{x}{1-x^2} dx$;

5) $\int \frac{dx}{a-x}$; 6) $\int \frac{dx}{x \ln x}$; 7) $\int \frac{x^2}{4+3x^3} dx$;

8) $\int \frac{x}{1+x} dx$; 9) $\int \frac{e^x}{5+e^x} dx$; 10) $\int \frac{x^3}{x+2} dx$.

Вопросы:

1. Что такое первообразная функция?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.

4. Запишите по памяти таблицу основных неопределенных интегралов.
5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?

Практическое занятие 28. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.
Цель: сформировать умение вычислять неопределенный интеграл с помощью замены переменной и по частям, применять полученные умения при решении практических задач.
Теоретическая часть:

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ .$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2+1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \dfrac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: (uv)′ = u′v + v′u, где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu.

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos x dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.
Вопросы и задачи:
Задача 1. Вычислить интегралы:

1. $\int (x+1)e^x\,dx.$ 2. $\int \arcsin x\,dx.$

3. $\int x^2 \sin x\,dx.$ 4. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx.$

5. $\int x\ln x\,dx.$ 6. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx.$

7. $\int e^{2x}\cos x\,dx.$ 8. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$

9. $\int \sin\ln x\,dx.$ 10. $\int x^2 e^x\,dx.$

Задача 2. Вычислить интегралы:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x=z^2$);

2) $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ (подстановка $x=\frac{1}{z}$).

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}$ (подстановка $\operatorname{ctg} x = z$).

Вопросы:
1. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
2. Опишите метод интегрирования по частям.
3. В каких случаях целесообразно применять метод интегрирования по частям?

Практическое занятие 29. Интегрирование элементарных дробей. Интегрирование рациональных функций.
Цель: сформировать умение вычислять неопределенный интеграл элементарной дроби и рациональной функции, применять полученные умения при решении практических задач.
Теоретическая часть:

Интегрирование элементарных дробей.

Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m \ge 2$, $n \ge 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t=ax+ b.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.
Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.
Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.
Пример.

$$\int\frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx=\int\frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx=\int\frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx=\left\{\begin{matrix}u=6x-5; \quad du=6dx;\\ x=\dfrac{u+5}{6};\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{14u+70-24}{u^2+23}du=\frac{7}{3}\int\frac{udu}{u^2+23}+\frac{23}{3}\int\frac{du}{u^2+23}=\frac{7}{6}\ln(u^2+23)+\frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}}+C=$$

$$=\frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right|+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 – 4ac >0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx=\left\{\begin{matrix}u=x+3; \quad du=dx;\\ x=u-3;\end{matrix}\right\}=\int\frac{5u-15-3}{u^2-49}du=5\int\frac{udu}{u^2-49}-$$

$$-18\int\frac{du}{u^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right|-\frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$

Пример.

$$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx=\int\frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=\left\{\begin{matrix}u=x-3; \quad du=dx;\\ x=u+3;\end{matrix}\right\}=\int\frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du=3\int\frac{udu}{\sqrt{16-u^2}}+$$

$$+13\int\frac{du}{\sqrt{16-u^2}}=-3\sqrt{16-u^2}+13\arcsin\frac{u}{4}+C=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int\frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s}\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{matrix}dv_1=\dfrac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1=u; \quad du_1=du;\\ v_1=\displaystyle\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}};\end{matrix}\right\}$

$$\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}=-\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int\frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx=(4a)^n\int\frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx=\left\{\begin{matrix}u=2ax+b; & du=2adx;\\ x=\dfrac{u-b}{2a}; & s=4ac-b^2;\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du=\frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}+\frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int\frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью n, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\int\frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx=\int\frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx=\left\{\begin{matrix}u=x-2; & du=dx;\\ x=u+2; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du=$$

$$=3\int\frac{udu}{(u^2+3)^2}+11\int\frac{du}{(u^2+3)^2}=\left\{\begin{matrix}t=u^2+3;\\ dt=2udu;\end{matrix}\right\}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}+11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)}+\frac{1}{3\cdot 2}\int\frac{du}{u^2+3}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2t}+\frac{11u}{6(u^2+3)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}}+C=-\frac{3}{2(x^2-4x+7)}+\frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C.$$

Интегрирование рациональных функций.
Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях х.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$

$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Итого:

$$\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$

$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби:

1) $\frac{11x-4}{x^2+2x-8}$.

Указание: знаменатель разложить на множители.

2) $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 3) $\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}$;

4) $\frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 5) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$;

6) $\frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}$.

Задача 2.

Вычислить:

1) $\int\frac{dx}{x-13}$; 2) $\int\frac{dx}{15-3x}$; 3) $\int\frac{dx}{4-7x}$; 4) $\int\frac{dx}{3-8x}$; 5) $\int\frac{3dx}{4x-9}$.

Задача 3.

Вычислить:

1) $I_1=\int\frac{dx}{x^2+4x+14}$; 2) $I_2=\int\frac{dx}{x^2+x+1}$; 3) $I_3=\int\frac{dx}{x^2+3x+6}$;

4) $I_4=\int\frac{dx}{x^2-9x+25}$; 5) $I_5=\int\frac{dx}{x^2-7x+14}$; 6) $I_6=\int\frac{dx}{x^2-x+14}$.

Задача 4.

Вычислить:

1) $\int\frac{dx}{5x^2+9x+10}$; 2) $\int\frac{dx}{7x^2-3x+5}$;

3) $\int\frac{dx}{9x^2+x+12}$; 4) $\int\frac{dx}{6x^2+7x+15}$;

5) $\int\frac{dx}{3x^2-11x+17}$.

Задача 5.

Вычислить:

1) $I_3=\int\frac{dz}{(1-z^2)^3}$; 2) $I_4=\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}$; 3) $I=\int\frac{dx}{(4+x^2)^5}$.

Вопросы:

1. Какие дроби называют простейшими?
2. Какая дробь называется рациональной?
3. Какая рациональная дробь называется правильной?

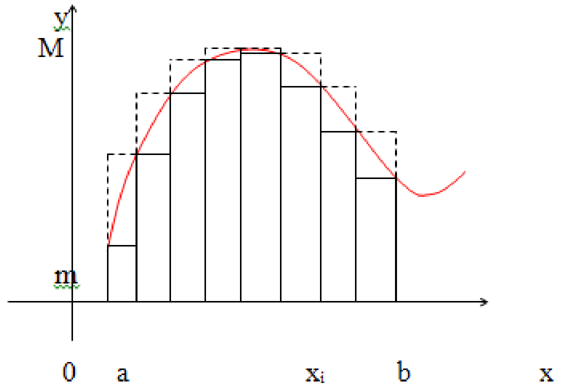
4. Как разложить правильную дробь на простейшие?
5. В чем сущность метода неопределенных коэффициентов?

Практическое занятие 30. Способы вычисления определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

Цель: сформировать умение вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница, использовать метод замены переменной и интегрирование по частям, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b] .



Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Если для функции f(x) существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$,

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$
2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
3) $\int_a^a f(x)dx = 0$
4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$
5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$
7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Теорема Ньютона-Лейбница.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования. Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b]. Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t). Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b
2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]
3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin \pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1.Вычислить определенные интегралы.

.1. $\int\limits_{-2}^{0} (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx.$

2. $\int\limits_{-2}^{0} \left(x^2-4\right)\cos 3x\,dx.$

3. $\int\limits_{-1}^{0} \left(x^2+4x+3\right)\cos x\,dx.$

4. $\int\limits_{-2}^{0} \left(x+2\right)^2\cos 3x\,dx.$

5. $\int\limits_{-4}^{0} \left(x^2+7x+12\right)\cos x\,dx.$

6. $\int\limits_{0}^{\pi} \left(2x^2+4x+7\right)\cos 2x\,dx.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi} \left(9x^2+9x+11\right)\cos 3x\,dx.$

8. $\int\limits_{0}^{\pi} \left(8x^2+16x+17\right)\cos 4x\,dx.$

9. $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(3x^2+5\right)\cos 2x\,dx.$

10. $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(2x^2-15\right)\cos 3x\,dx.$

11. $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(3-7x^2\right)\cos 2x\,dx.$

12. $\int\limits_{0}^{2\pi} \left(1-8x^2\right)\cos 4x\,dx.$

13. $\int\limits_{-1}^{0} \left(x^2+2x+1\right)\sin 3x\,dx.$

14. $\int\limits_{0}^{3} \left(x^2-3x\right)\sin 2x\,dx.$

15. $\int\limits_{0}^{\pi} \left(x^2-3x+2\right)\sin x\,dx.$

16. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2-5x+6\right)\sin 3x\,dx.$

17. $\int\limits_{-3}^{0} \left(x^2+6x+9\right)\sin 2x\,dx.$

18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2+17{,}5\right)\sin 2x\,dx.$

19. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-5x^2\right)\sin x\,dx.$

20. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{3} \left(3x-x^2\right)\sin 2x\,dx.$

Задача 2.
Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln\left(x-1\right)}{x-1}dx.$

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^2}.$

3. $\int_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx.$

4. $\int_0^2 \frac{x^3dx}{x^2+4}.$

5. $\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

6. $\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3}dx.$

7. $\int_0^{1/2} \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx.$

8. $\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx.$

9. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}.$

10. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

11. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

12. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}dx.$

13. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx.$

14. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx.$

15. $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

16. $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$

17. $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

18. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx.$

19. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

20. $\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx.$

Вопросы:

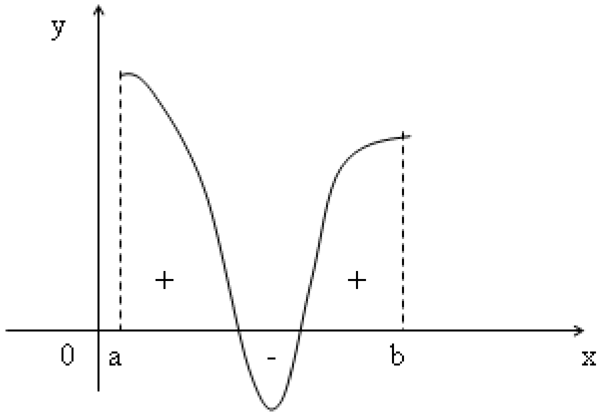
1. Раскройте смысл понятия определенного интеграла.
2. Геометрический смысл определенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
4. Теорема о среднем.
5. Производная определенного интеграла по верхнему пределу.
6. Формула Ньютона – Лейбница.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Практическое занятие 31. Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры. Объем тела. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения.

Цель: сформировать умение вычислять площади плоских фигур, длину дуги кривой, объем тела, объем тела вращения, площадь поверхности тела вращения при помощи определенного интеграла и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Вычисление площадей плоских фигур.

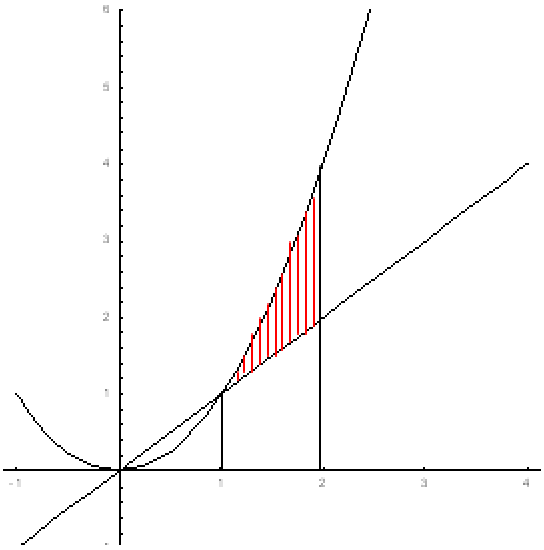


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ох, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак "-", если график расположен выше оси Ох, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак "+".

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

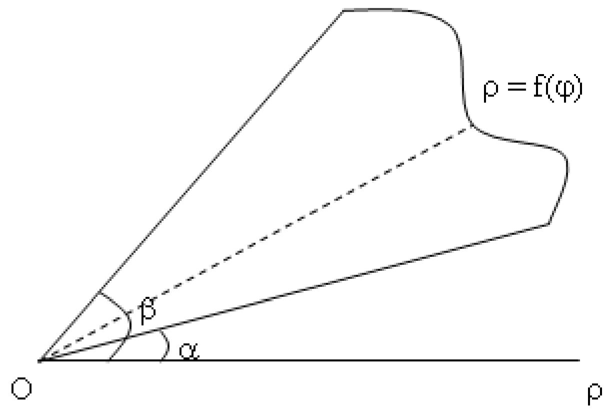
$$S = \int_1^2 x^2dx - \int_1^2 xdx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (ед}^2\text{)}$$

Нахождение площади криволинейного сектора.

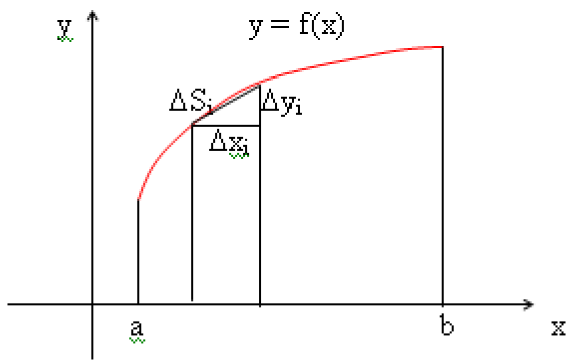
Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$$



Вычисление длины дуги кривой.



$$S=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции получаем:

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[Z'(t)]^2}\,dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi,\quad \rho = f(\varphi).$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

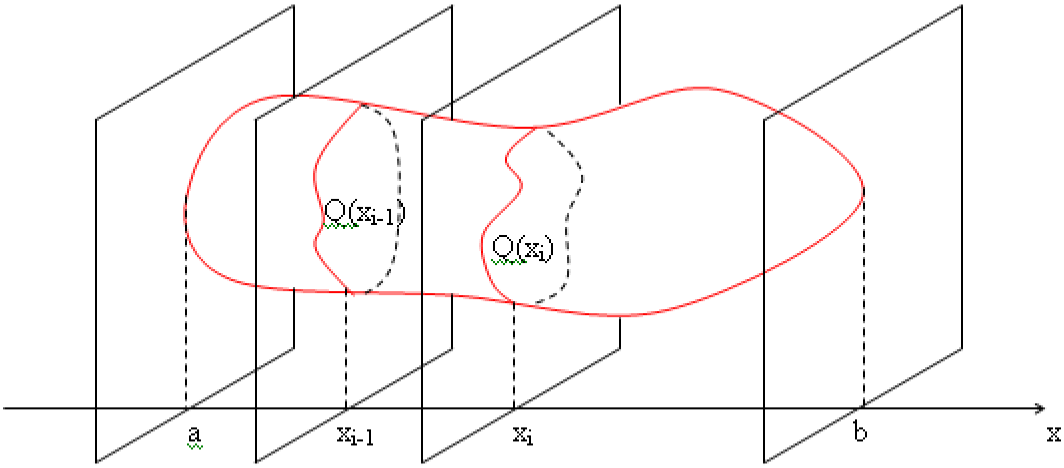
1 способ. Выразим из уравнения переменную y. $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Найдем производную $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

Тогда $\dfrac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\dfrac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\cdot\arcsin\dfrac{x}{r}\Big|_0^r=r\dfrac{\pi}{2}$. Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция ρ = f(φ) = r, $\rho'=\dfrac{df(\varphi)}{d\varphi}=0$ тогда $S=\int_0^{2\pi}\sqrt{0+r^2}\,d\varphi=r\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi r$.

Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на "слои" поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

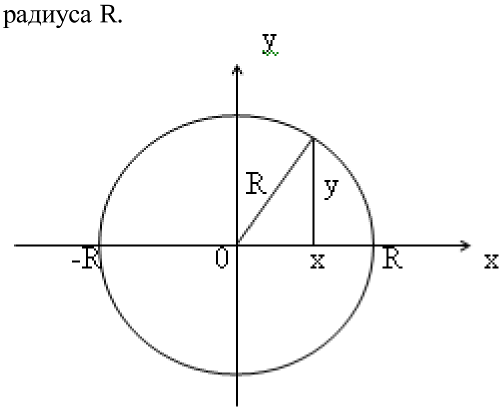
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx.$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx.$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример: Найти объем шара радиуса R.



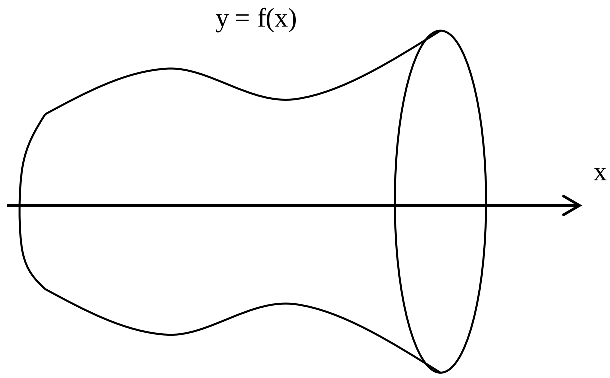
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Объем тел вращения.

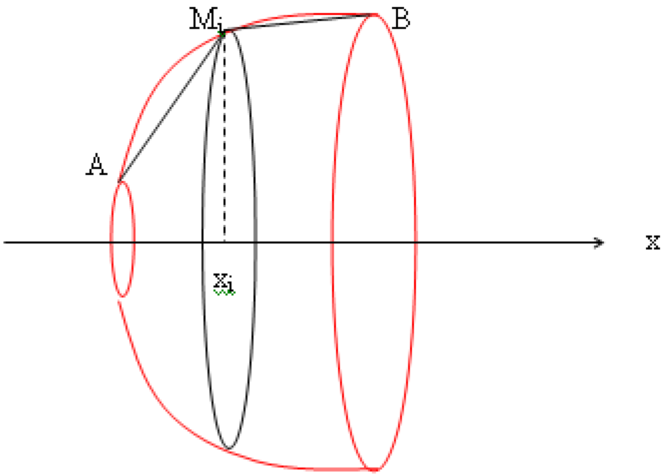
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Площадь поверхности тела вращения.



Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i.$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi\sum_{i=1}^{n} 2f(\varepsilon_i)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i.$$

Тогда $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

Вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить площади областей, ограниченных графиками заданных функций:

1. $y = 32 - x^2$, $y = -4x$.
2. $y = 3\sqrt{x}$, $y = 3/x$, $x = 4$.
3. $x = 5 - y^2$, $x = -4y$.
4. $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 4$.
5. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ $(x \geq 0)$.
6. $y = \sqrt{x}$, $y = 1/x$, $x = 16$.
7. $x = 27 - y^2$, $x = -6y$.
8. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ $(x \leq 0)$.
9. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3/2$.
10. $y = 2/x$, $y = 5e^x$, $y = 2$, $y = 5$.

Задача 2. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $y = \ln x, \qquad 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}.$
2. $y = \ln\cos x, \qquad 0 \le x \le \pi/6.$
3. $y = e^x, \qquad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}.$
4. $y = \ln\sin x, \qquad \pi/3 \le x \le \pi/2.$
5. $y = 2\sqrt{x}, \qquad 1/3 \le x \le 1/8.$
6. $y = \operatorname{ch} x, \qquad 0 \le x \le 1.$
7. $y = x^2/2, \qquad 0 \le x \le 1.$
8. $y = 1 - \ln x, \qquad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$
9. $y = 1 - \operatorname{ch} x, \qquad 0 \le x \le 3.$
10. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \qquad 0 \le x \le 1/2.$

Задача 3. Вычислить длины дуг заданных кривых.

1. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$
2. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi/3.$
3. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi.$
4. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$
5. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1.$

Задача 4. Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями.

1. $z = 4x^2 + 9y^2, \qquad z = 6.$
2. $z = 9x^2 + 4y^2, \qquad z = 6.$
3. $z = 2x^2 + 8y^2, \qquad z = 4.$
4. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 2.$
5. $\dfrac{x^2}{16} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 3.$
6. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 - 3z^2 = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 1.$
7. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 2z^2 = 1, \qquad z = 0, \qquad z = 1.$

Задача 5. Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг оси OX областей, ограниченных графиками заданных функций.

1. $y = -x^2 + 1, \qquad y = 0.$ 2. $y = \sin(\pi x/2), \quad y = x.$
3. $y = x^2, \qquad y = \sqrt{x}.$ 4. $y = x^2, \quad y = 2x.$
5. $y = \cos x, \qquad y = \sin x, \qquad x = 0 \quad (0 \le x \le \pi/4).$
6. $y = \sin^2 x, \qquad y = 0, \qquad x = \pi/2 \quad (0 \le x \le \pi/2).$
7. $y = e^x, \qquad y = 1, \qquad x = 1.$
8. $y = \ln x, \qquad y = 0, \qquad x = e.$
9. $y = \dfrac{2}{x}, \qquad y = 1, \qquad x = 1.$
10. $y = \cos^2 x, \qquad y = 0 \qquad (-\pi/2 \le x \le \pi/2).$

Вопросы.

1. Запишите известные вам формулы вычисления площадей плоских фигур.
2. Как вычисляется площадь плоской фигуры при помощи определенного интеграла?
3. Что такое криволинейная трапеция?
4. Как вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой, заданной параметрически?
5. Что такое криволинейный сектор? Как вычислить площадь криволинейного сектора?
6. Как вычислить длину дуги кривой?

7. Как вычислить объем тела при помощи определенного интеграла?
8. Как найти площадь поверхности вращения?
9. Какие физические (механические) приложения определенного интеграла вы знаете?

Раздел 6. Математический анализ. Функции нескольких переменных

Практическое занятие 32. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков. Дифференцирование сложных и неявных функций.

Цель: сформировать умение вычислять частные производные и дифференциал функции нескольких переменных и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z$ = f(x + Δx, y) – f(x, y) называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x. Обозначение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \quad f'_x(x,y).$$

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Дифференцирование композиции

1. Если $z = f(x,\ y),\ x = x(t),\ y = y(t)$, то

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

2. Если $z = f(x,\ y),\ x = x(t,\ s),\ y = y(t,\ s)$, то:

$$\frac{dz}{zt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{xt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial s}ds.$$

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y):

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,...,t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2zx^{y^2z-1};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2z}\ln x\cdot 2yz;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^2z}\ln x\cdot y^2;$$

$$du=y^2zx^{y^2z-1}dx+2x^{y^2z}yz\ln x dy+y^2x^{y^2z}\ln x dz$$

Частные производные высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ или } f_{x^2}''=\left(f_x'\right)_x',$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ или } f_{yx}''=\left(f_y'\right)_x',$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f_{x^3}'''=\left(f_{x^2}''\right)_x',$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \text{ или } f_{x^2y}'''=\left(f_{x^2}''\right)_y', \ldots$$

Дифференциалы высших порядков:

$$d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^m f=\sum_{k=0}^{m} C_m^k\frac{\partial^m f}{\partial x^k\partial y^{m-k}}dx^k dy^{m-k},\quad C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!},$$

$$d^m f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f,$$

где $d=\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$ - оператор дифференцирования.

Вопросы и задачи:

Задача 1.

Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций:

1. $z=e^{xy}$. 2. $z=x\ln(x/y)$.
3. $z=\sin(xy)$. 4. $z=e^x\cos y$.
5. $z=\sqrt{x^2+y^2}$. 6. $z=\ln(x^2+y)$.
7. $z=\sqrt{2xy+y^2}$. 8. $z=\ln\sqrt[3]{xy}$.
9. $z=x\cos y+y\sin x$. 10. $z=(1+x)^2(1+y)^4$.

Задача 2.

Найти производные функции z=z(u,v):

z_x' и z_y', $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$.

1. $z=u^2+v^2,\quad u=x+y,\quad v=x-y$.
2. $z=\ln(u^2+v^2)$, $u=xy$, $v=x/y$.
3. $z=u^v$, $u=\sin x$, $v=\cos y$.
4. $z=u^2+2v^3$, $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$.
5. $z=\operatorname{arctg}(u/v)$, $u=x\sin y$, $v=x\cos y$.
6. $z=\ln(u-v^2)$, $u=x^2+y^2$, $v=y$.
7. $z=u^3+v^2$, $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}(y/x)$.
8. $z=\sqrt{uv}$, $u=\ln(x^2+y^2)$, $v=xy^2$.
9. $z=e^{uv}$, $u=\ln x$, $v=\ln y$.
10. $z=\ln(u/v)$, $u=\sin(x/y)$, $v=\sqrt{x/y}$.

Задача 3.

Найти производные функций, заданных неявно:

1. $y^x = x^y$. 2. $y = 1 + y^x$.

3. $y = x + \ln y$. 4. $x + y = e^{x-y}$.

5. $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$. 6. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

7. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$. 8. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$.

9. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. 10. $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

Вопросы:

1.Дайте определение частного приращения функции по независимой переменной.

2.Что такое полное приращение функции?

3.Что такое частная производная функции нескольких переменных? Как обозначается частная производная?

4.Поясните геометрический смысл частной производной.

5.Что такое дифференциал функции нескольких переменных?

6.Что такое линеаризация функций?

7.Пояните правила дифференцирования сложных и неявных функций.

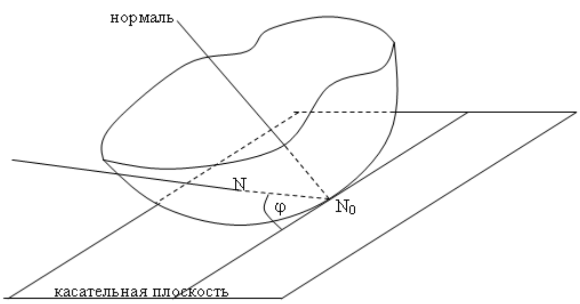
8. Как найти частные производные второго, третьего,…, n-го порядка?

9. Запишите формулу для вычисления дифференциала второго порядка функции двух переменных.

Практическое занятие 33. Касательная и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент.

Цель: сформировать умение находить производную по направлению и градиент функции, уравнения касательной и нормали к поверхности и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0,y_0,(x_0,y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0 y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке M(1, 1, 1).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1};$$

Градиент функции вычисляется по формуле:

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}.$$

Пример. Найти градиент функции

$$u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$$

в точке M (2,1,1).

1. Находим частные производные функции $u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{1+(y+z)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{1}{1+(y+z)^2}.$$

2. Вычисляем частные производные функции $u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2,1,1)$:

$$f'_x(2,1,1)=4,\quad f'_y(2,1,1)=-\frac{1}{5},\quad f'_z(2,1,1)=-\frac{1}{5}.$$

3. Вычисляем градиент функции $u=x^2-\operatorname{arctg}(y+z)$ в точке $M(2,1,1)$:

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(2,1,1)}=\left\{f'_x(2,1,1),\ f'_y(2,1,1),\ f'_z(2,1,1)\right\}=\left\{4,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}\right\}.$$

Ответ. $\operatorname{grad} f\Big|_{(2,1,1)}=\left\{4,-\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right\}.$

Производная по направлению, определяемому вектором:

$$\bar{l}=\cos\alpha\cdot\bar{i}+\sin\alpha\cdot\bar{j}$$

определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha,\quad \frac{\partial f}{\partial l}=grad\ f\cdot\bar{l}.$$

Вопросы и задачи:

Задача 1.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке М.

1. $z=x^2+y^2,\quad M(1,-2,5).$
2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0,\quad M(4,3,4).$
3. $z=\sin x\cos y,\quad M(\pi/4,\pi/4,1/2).$
4. $z=e^{x\cos y},\quad M(1,\pi,1/e).$
5. $z=y\operatorname{tg}x,\quad M(\pi/4,1,1).$
6. $z=\operatorname{arctg}(x/y),\quad M(1,1,\pi/4).$
7. $x(y+z)(z-xy)=8,\quad M(2,1,3).$
8. $2^{x/z}+2^{y/z}=8,\quad M(2,2,1).$
9. $x^2+y^2+z^2-16=0,\quad M(2,2,2\sqrt{2}).$
10. $x^2+y^2-z^2=-1,\quad M(2,2,3).$

Задача 2.

Найти градиент функции в точке.

1. $u=x+\ln(z^2+y^2),\quad M(2,1,1).$
2. $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2},\quad M(1,5,-2).$
3. $u=\sin(x+2y)+2\sqrt{xyz},\quad M(\pi/2,3\pi/2,3).$

4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad M(1,1,0).$

5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad M(1,1,0).$

6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad M(1,3,2).$

7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z-1), \quad M(1,1,2).$

8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad M(1,-1,2).$

9. $u = xy - x/z, \quad M(-4,3,-1).$

10. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad M(1,-3,4).$

Задача 3.
Найти производную функции u в точке A по направлению к точке B.

1. $u = x + \ln(z^2 + y^2), \quad A(2,1,1), \quad B(0,2,0).$

2. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}, \quad A(1,5,-2), \quad B(1,7,-4).$

3. $u = \sin(x + 2y) + 2\sqrt{xyz}, \quad A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right), \quad B\left(\frac{\pi}{2} + 4, \frac{3\pi}{2} + 3, 3\right).$

4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}, \quad A(1,1,0), \quad B(1,2,-1).$

5. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}, \quad A(1,1,0), \quad B(3,3,-1).$

6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z, \quad A(1,3,2), \quad B(0,5,0).$

7. $u = x^2 y^2 z - \ln(z-1), \quad A(1,1,2), \quad B(6,-5,2\sqrt{5}+2).$

8. $u = \ln(x^2 + y^2), \quad A(1,-1,2), \quad B(2,-2,3).$

9. $u = \ln(x + \sqrt{z^2 + y^2}), \quad A(1,-3,4), \quad B(-1,-4,5).$

10. $u = xy - \frac{x}{z}, \quad A(-4,3,-1), \quad B(1,4,-2).$

Вопросы:
1.Что такое касательная плоскость к поверхности?
2.Что такое нормаль?
3.Как составить уравнение касательной плоскости и нормали?
4. Дайте определение градиента функции.
5. Дайте определение производной по направлению для функции нескольких переменных. Запишите соответствующие формулы.

Практическое занятие 34. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условный экстремум.

Цель: сформировать умение исследовать функцию нескольких переменных и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y),$$

то точка M_0 называется **точкой максимума.**

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0, y_0) < f(x, y),$$

то точка M_0 называется **точкой минимума.**

Теорема. (Необходимые условия экстремума).

Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть **критической точкой.**

Теорема. (Достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение:

$$D(x,y) = f''_{x^2}(x,y) \cdot f''_{y^2}(x,y) - \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2$$

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума.

В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

Условный экстремум находится, когда переменные х и у, входящие в функцию u = f(x, y), не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение $\varphi(x,y)=0$, которое называется **уравнением связи.**

Тогда из переменных х и у только одна будет независимой, т.к. другая может быть выражена через нее из уравнения связи.

Тогда u = f(x, y(x)).

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

В точках экстремума:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (1)$$

Кроме того:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (2)$$

Умножим равенство (2) на число λ и сложим с равенством (1).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

Для выполнения этого условия во всех точках найдем неопределенный коэффициент λ так, чтобы выполнялась система трех уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

Полученная система уравнений является необходимыми условиями условного экстремума. Однако это условие не является достаточным. Поэтому при нахождении критических точек требуется их дополнительное исследование на экстремум.

Выражение u = f(x, y) + λφ(x, y) называется **функцией Лагранжа.**

Пример. Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$u = xy+\lambda(2x+3y-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x+3\lambda;$$

$$\begin{cases}y+2\lambda=0\\ x+3\lambda=0\\ 2x+3y-5=0\end{cases}$$

$$\lambda=-\frac{5}{12}; \qquad x=\frac{5}{4}; \qquad y=\frac{5}{6};$$

Таким образом, функция имеет экстремум в точке $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$.

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Вопросы и задачи:

1.Найти экстремум функции:

1. $z = x^2 - xy + y^2$. 2. $z = x^2 - xy - y^2$.

3. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$. 4. $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$.

5. $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$. 6. $z = 4x + 2y - x^2 - y^2$.

7. $z = x^3 + y^3 - 15xy$. 8. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

9. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4$. 10. $z = x/y + 1/x + y$.

2. Найти условный экстремум функций:

1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 3 = 0$ при $x + y + 3 = 0$;

2) $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12 (x > 0, y > 0, z > 0)$;

3) $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

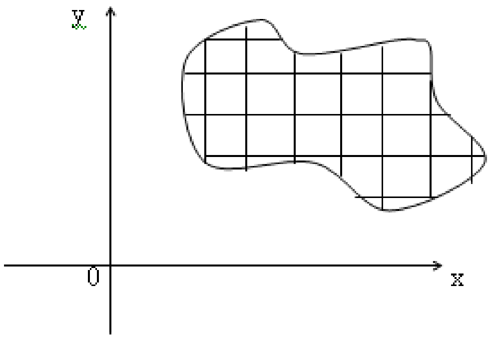
Вопросы:
1.Дайте определение локального максимума (минимума) функции в точке.
2.Сформулируйте необходимые условия экстремума.
3. Сформулируйте достаточные условия экстремума.
4. Объясните понятие экстремума функции в области.

Практическое занятие 35. Свойства и методы вычисления двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле.

Цель: сформировать умение вычислять двойной интеграл и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой f(x,y)=0.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ. С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения необязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy.$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_\Delta f(x,y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sum_\Delta\sum f(x,y)\Delta y\Delta x.$$

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

1. Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл $\iint_\Delta f(x,y)d\Delta$ существует.

2. Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл $\iint_\Delta f(x,y)d\Delta$ существует.

<u>Свойства двойного интеграла.</u>

1) $\iint_\Delta [f_1(x,y)+f_2(x,y)-f_3(x,y)]dydx = \iint_\Delta f_1(x,y)dydx + \iint_\Delta f_2(x,y)dydx - \iint_\Delta f_3(x,y)dydx.$

2) $\iint_\Delta kf(x,y)dydx = k\iint_\Delta f(x,y)dydx.$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint_\Delta f(x,y)dydx = \iint_{\Delta_1} f(x,y)dydx + \iint_{\Delta_2} f(x,y)dydx.$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint_\Delta f(x,y)dydx = f(x_0, y_0)\cdot S$$

5) Если $f(x, y) \geq 0$ в области Δ, то $\iint_\Delta f(x,y)dydx \geq 0.$

6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint_\Delta f_1(x,y)dydx \leq \iint_\Delta f_2(x,y)dydx.$

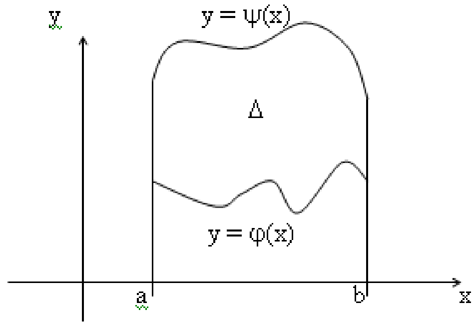
7) $\left|\iint_\Delta f(x,y)dydx\right| \leq \iint_\Delta |f(x,y)|dydx.$

<u>Вычисление двойного интеграла.</u>

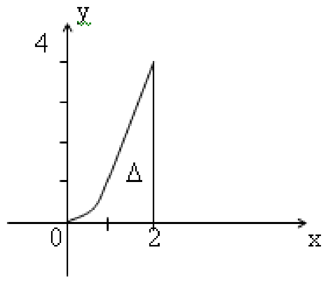
<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и*

φ ≤ ψ, тогда

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$



Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, y = x^2, x = 2.



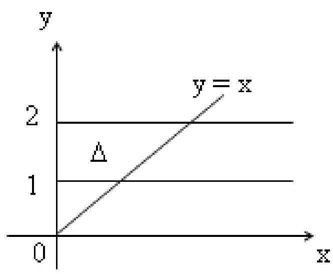
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{x^2}(x-y)dy = \int\limits_0^2 (xy-\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int\limits_0^2 (x^3-\frac{x^4}{2})dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 4-3{,}2 = 0{,}8$$

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy\int\limits_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.



$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_1^2 dy\int\limits_0^x (x^2+y^2)dx = \int\limits_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^y dy = \int\limits_1^2 \frac{4}{3}y^3dy = \frac{4}{12}y^4\Big|_1^2 = \frac{64}{12}-\frac{4}{12} = 5$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y^2, y = 2.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy = \int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx = \int\limits_0^2 (x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2} dy =$$

$$=\int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{244}{21}$$

Вопросы и задачи:

Задача 1. Изменить порядок интегрирования:

1. $\int_0^1 dx \int_1^{2^x} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_1^{2/x} f(x,y)\,dy.$
2. $\int_{1/4}^1 dy \int_{1/y}^4 f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{y^2}^4 f(x,y)\,dy.$
3. $\int_{-6}^{-3} dy \int_0^{\sqrt{36-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{-3}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y^2-12y}} f(x,y)\,dy.$
4. $\int_0^{16} dy \int_{-y/4}^0 f(x,y)\,dx + \int_{16}^{32} dy \int_{-\sqrt{32-y}}^0 f(x,y)\,dx.$
5. $\int_0^{\sqrt{6}} dx \int_0^{\sqrt[4]{6x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{12-x^2}} f(x,y)\,dy.$
6. $\int_0^1 dy \int_{-y^2}^0 f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^0 f(x,y)\,dx.$

Задача 2. Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным заданными линиями:

1. $\iint_D (2x-y)\,dx\,dy, \qquad y = x^2,\ \ y = \sqrt{x}.$
2. $\iint_D (x-y)\,dx\,dy, \qquad y = 2 - x^2,\ \ y = 2x - 1.$
3. $\iint_D (y\ln x)\,dx\,dy, \qquad y = \frac{1}{x},\ \ y = \sqrt{x},\ \ x = 2.$
4. $\iint_D (\cos 2x + \sin y)\,dx\,dy, \qquad y = \frac{\pi}{4} - x,\ \ y = 0,\ \ x = 0.$
5. $\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy, \qquad y = x,\ \ y = \frac{\pi}{2},\ \ x = 0.$
6. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, \qquad y = \frac{1}{x},\ \ y = x,\ \ x = 2.$
7. $\iint_D (x^2 + y)\,dx\,dy, \qquad y = x^2,\ \ y = \sqrt{x}.$

Вопросы:

1.Дайте определение двойного интеграла.

2. Поясните геометрический смысл двойного интеграла.

3.Перечислите свойства двойного интеграла.

4.Что такое повторный интеграл?

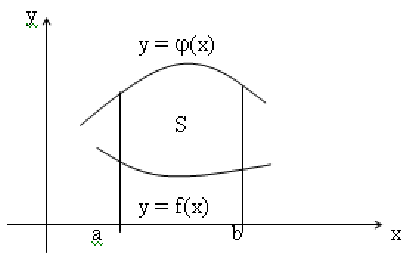
5.Опишите процесс вычисления двойного интеграла в декартовых координатах.

Практическое занятие 36. Приложения двойного интеграла.

Цель: сформировать умение вычислять площадь фигуры в декартовых и полярных координатах, объемы тел, площади поверхностей, моментов инерции площадей плоских фигур с помощью двойного интеграла и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

1) Вычисление площадей в декартовых координатах.

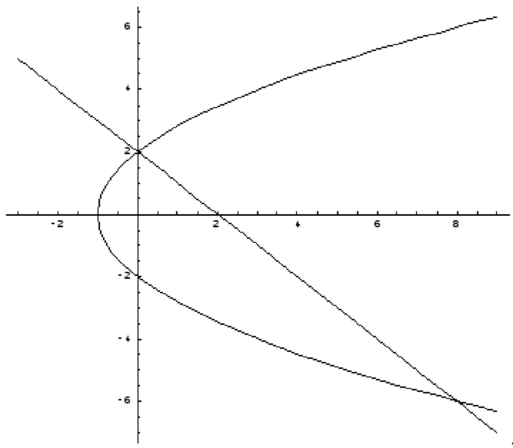


Площадь S, показанная на рисунке, может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \int_a^b \int_{f(x)}^{\varphi(x)} dydx\,.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Построим графики заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от $x = \dfrac{y^2 - 4}{4}$ до $x = 2 - y$, а по оси Оу – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна:

$$S = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx dy = \int_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2 - 4}{4} \right) dy = \int_{-6}^{2} \left(\frac{8 - 4y - y^2 + 4}{4} \right) dy = \frac{1}{4} \int_{-6}^{2} \left(-y^2 - 4y + 12 \right) dy =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y \right) \Bigg|_{-6}^{2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{8}{3} - 8 + 24 - \left(\frac{36 \cdot 6}{3} - \frac{4 \cdot 36}{2} - 12 \cdot 6 \right) \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(88 - \frac{8}{3} \right) = 21\frac{1}{3}$$

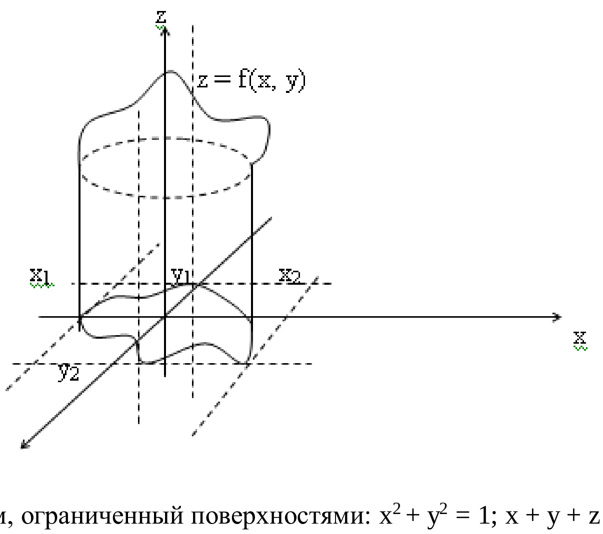
2) Вычисление площадей в полярных координатах.

$$S = \iint_{\tau} \rho d\rho d\theta = \iint_{\Delta} dy dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)} \rho d\rho d\theta$$

3) Вычисление объемов тел.

Пусть тело ограничено снизу плоскостью ху, а сверху– поверхностью z = f(x,y), а с боков – цилиндрической поверхностью. Такое тело называется **цилиндроид.**

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sum_{\Delta} \ z \Delta y \Delta x = \iint_{\Delta} z dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} z dy dx$$



Пример. Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$ и плоскостью XOY.

Пределы интегрирования: по оси ОХ: $y_1 = -\sqrt{1 - x^2}$; $\quad y_2 = \sqrt{1 - x^2}$;

по оси OY: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x}} (3 - x - y)dydx = 3\pi;$$

4) Вычисление площади кривой поверхности.

Если поверхность задана уравнением: f(x, y, z) = 0, то площадь ее поверхности находится по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} dydx$$

Если поверхность задана в неявном виде, т.е. уравнением z = φ(x, y), то площадь этой поверхности вычисляется по формуле:

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dydx$$

5)Вычисление моментов инерции площадей плоских фигур.

Пусть площадь плоской фигуры (область Δ) ограничена линией, уравнение которой f(x,y) = 0. Тогда моменты инерции этой фигуры находятся по формулам:

- относительно оси Ох: $I_x = \iint_{\Delta} y^2 dydx$

- относительно оси Оу: $I_y = \iint_{\Delta} x^2 dydx$

- относительно начала координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint_{\Delta} (x^2 + y^2)dydx$ - этот момент инерции называют еще **полярным моментом инерции.**

6) Вычисление центров тяжести площадей плоских фигур.

Координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\iint_{\Delta} wxdydx}{\iint_{\Delta} wdydx}; \qquad y_C = \frac{\iint_{\Delta} wydydx}{\iint_{\Delta} wdydx};$$

здесь w – поверхностная плотность ($dm = wdydx$ –масса элемента площади).

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти объемы тел, ограниченных заданными поверхностями:

1. $x = \sqrt{y}, \quad x = 2\sqrt{y}, \quad z = 1 - y, \quad z = 0.$
2. $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 6 - x, \quad z = 0.$
3. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = x + y + 1, \quad z = 0.$
4. $y = x^2, \quad y = 1, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0.$
5. $y = 6 - 3x/2, \quad y = 6 - 3x, \quad y = 0, \quad z = 6 - x - y, \quad z = 0.$
6. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = xy, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, \ y \geq 0).$
7. $y = \sqrt{x/2}, \quad y = 0 \quad z = 4 - x - 2y, \quad z = 0.$
8. $x^2 + y^2 - 4y = 0, \quad z = 4 - x^2, \quad z = 0.$
9. $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0.$
10. $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = 2x, \quad z = 4x.$

Задача 2. Найти площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1. $y = 2/x,\ \ y = 4e^x,\ \ y = 2,\ \ y = 4.$

2. $y = 1/x,\ \ y = 2e^x,\ \ y = 1,\ \ y = 2.$

3. $y = 2/x,\ \ y = 2\sqrt{x},\ \ x = 4.$

4. $x^2 + y^2 = 2,\ \ y = -x^2\ \ (y \le 0).$

5. $y = \sqrt{x},\ \ y = 0,\ \ x = 4.$

6. $x = 2 - y^2,\ \ x = -y.$

7. $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ x = 0,\ \ x = \pi/4.$

8. $y = 2x^2 - 1,\ \ y = x.$

9. $x = \sqrt{4 - y^2},\ \ x = y^2/3.$

10. $y = \ln x,\ \ y = e/x,\ \ x = 1.$

Задача 3. Найти массу пластины D с поверхностной плотностью μ , где D ограничена заданными линиями:

1. $\mu = 2x + y^2, \qquad x = 4,\ \ y = 0,\ \ y = \sqrt{x}.$

2. $\mu = x^2 + y, \qquad x = 1,\ \ y = 0,\ \ y = 2\sqrt{x}.$

3. $\mu = x^2 + 2y, \qquad x = 0,\ \ y = 4,\ \ y = x^2\ \ (x \ge 0).$

4. $\mu = x + y^2, \qquad x = 0,\ \ y = 1,\ \ y = x^2/4\ \ (x \ge 0).$

5. $\mu = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9 \quad (x \ge 0,\ \ y \le 0).$

6. $\mu = \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 3, \quad x^2 + y^2 = 5 \quad (x \le 0, \quad y \ge 0).$

7. $\mu = \dfrac{y - x}{x^2 + y^2}, \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (x \le 0, \quad y \ge 0).$

8. $\mu(x, y) = y, \qquad y = 0, \quad y = x\sqrt{3}, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1, \quad x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 9 \quad (y \ge 0, \quad y \le x\sqrt{3}).$

Вопросы:
1.Перечислите геометрические и физические приложения двойного интеграла.
2.Опишите, как вычислить площадь кривой поверхности с помощью двойного интеграла.
3.Что такое полярный момент инерции? Как можно вычислить полярный момент инерции?
4. Запишите формулу для вычисления центров тяжести площадей плоских фигур.

Раздел 7. Математический анализ. Дифференциальные уравнения (ДУ).

Практическое занятие 37. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Линейные уравнения. Уравнения, приводимые к линейным.

Цель: сформировать умение определять и решать ДУ с разделяющимися переменными, однородные ДУ, линейные ДУ и применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции. Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.** Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y\cos y dy = -2x dx$$

$$\int y\cos y dy = -2\int x dx$$

$$\int y\cos y dy = \begin{Bmatrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{Bmatrix} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy = dx$$

$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$27y = (x + C)^3$ - общий интеграл

$y = \frac{1}{27}(x + C)^3$ - общее решение

Линейные уравнения.

Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0)* применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\dfrac{du}{dx} + P(x)u = 0$. Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\dfrac{dv}{dx} + v\left(\dfrac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),$$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти интегральные кривые дифференциальных уравнений:

1. $y\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0.$
2. $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$
3. $y'\,y = -2x \sec y.$
4. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y).$
5. $y\,(1 + x^2)\,y' + x\,(1 + y^2) = 0.$
6. $e^x\,dx - (1 + e^x)\,y\,dy = 0.$
7. $y' = 2e^x \cos x.$
8. $y' = y \ln y.$
9. $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2}.$
10. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$

Задача 2. Найти общее решений дифференциального уравнения:

1. $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$. 2. $y' = \frac{y}{x} - 1$. 3. $x^2y' = xy + y^2e^{-x/y}$.

4. $x\cos\frac{y}{x}\,dy + \left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx = 0$. 5. $(x^2 + 2xy)\,dx + xy\,dy = 0$.

6. $xy'\ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$. 7. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.

8. $(4y^2 + x^2)\,y' = xy$. 9. $xy'\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y\sin\left(\frac{y}{x}\right)$.

10. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\,y'$.

Задача 3. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1. $xy' + y - e^x = 0,\qquad y(1) = 0.$
2. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x},\qquad y(0) = 0.$
3. $y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}\,x,\qquad y(0) = 0.$
4. $y' - y\,\mathrm{th}\,x = \mathrm{ch}^2 x,\qquad y(0) = 0.$
5. $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x,\qquad y(e) = \frac{e^2}{2}.$
6. $y'\sin x - y\cos x = 1,\qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
7. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x,\qquad y(0) = 0.$

Вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
3. Что называют общим (частным) решением дифференциального уравнения?
4. В чем сущность задачи Коши?
5. Приведите пример дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
6. Опишите ход решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
7. Какое дифференциальное уравнение называют однородным?
8. Какое дифференциальное уравнение называют линейным?
9. Опишите метод Бернулли решения линейных дифференциальных уравнений.

Практическое занятие 38. Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Цель: сформировать умение определять вид ДУ и выбирать способ решения ДУ высшего порядка, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

<u>Уравнения, допускающие понижение порядка.</u>

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

<u>Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.</u>

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

………………………………………………………………

$$y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0; y_0 = 1;$

$y_0' = -1; \quad y_0'' = 0.$

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k – 1* включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad ... \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''; \quad z' = y''';$

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1x; \qquad y' = \int C_1xdx = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right)dx = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной *x* кроме значения *x =0.*

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p;\text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0.$

Замена переменной: $p = y';\qquad y'' = \frac{dp}{dy}p;$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0;\qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0;$$

1) $y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0;\qquad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}.$

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u;\qquad du = 4\frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4\int\frac{dy}{y};\qquad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1;\qquad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|;\qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln|\ln|C_1 y|| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C;$

2) $p = 0;\qquad y' = 0;\qquad y = C;$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейным дифференциальным уравнением *n* – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции *y* и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x);$$

где $p_0, p_1, ..., p_n$ – функции от *x* или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' = 1 - y'^2$. 2. $xy'' + y' = 0$.

3. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$. 4. $x^2y'' + xy' = 1$.

5. $xy''' + y'' = 1 + x$. 6. $y'''^2 + y''^2 = 1$.

7. $y'(1 + y'^2) = y''$. 8. $y'' = -x/y'$.

9. $x\,y'' + y' + x = 0$. 10. $y'''^2 = 4y''$.

Задача 2. Найти решения задач Коши для дифференциальных уравнений:

1. $y''\,y^3 = 1$, $y\,(1/2) = 1$, $y'\,(1/2) = 1$.
2. $y\,y'' + y'^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
3. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
4. $y^2 + y'^2 - 2y\,y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
5. $3y'\,y'' = y + y'^3 + 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

Задача 3. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y'' + y = \cos x$. 2. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

3. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$. 4. $y'' + y = 3\sin x$.

5. $y'' + y = 4x\cos x$. 6. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.

7. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$. 8. $y'' - 2y = 2x\,e^x(\cos x - \sin x)$.

9. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$. 10. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$.

Вопросы:

1. Какие виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка Вы знаете?
2. Какую замену переменной необходимо провести, если в уравнении явно не содержится искомая функция; независимая переменная?
3. Какое уравнение называют линейным с постоянными коэффициентами?
4. Как строится общее решение однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
5. Как найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

Практическое занятие 39. Системы дифференциальных уравнений, основные понятия. Интегрирование нормальных систем. Системы уравнений с постоянными коэффициентами.

Цель: сформировать умение решать некоторые виды систем ДУ, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Совокупность соотношений вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

где x- независимая переменная, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

<u>Теорема.</u> (Теорема Коши). *Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции* $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, ... $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* $y_1, y_2, ..., y_n$, *то для любой точки* $(x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ *этой области существует единственное решение*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 *и удовлетворяющее начальным условиям* $x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему обращают ее в тождество.

<u>Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.</u>

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases}$$

Решения системы обладают следующими свойствами:

1) Если *y, z, u* – решения системы, то *Cy, Cz, Cu* , где *C = const* – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно *k*. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 &= \beta_1 e^{k_1 x}, & u_1 &= \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 &= \beta_2 e^{k_2 x}, & u_2 &= \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 &= \beta_3 e^{k_3 x}, & u_3 &= \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы:

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$

$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$

$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

<u>Пример.</u> Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5 - k & 2 \\ 2 & 2 - k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5 - k)(2 - k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2-7k+6=0; \qquad k_1=1; \qquad k_2=6;$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\alpha+a_{12}\beta=0\\ a_{21}\alpha+(a_{22}-k)\beta=0\end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases}(5-1)\alpha_1+2\beta_1=0\\ 2\alpha_1+(2-1)\beta_1=0\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}4\alpha_1+2\beta_1=0\\ 2\alpha_1+\beta_1=0\end{cases}$

Полагая $\alpha_1=1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1=-2$.

Для k_2: $\begin{cases}(5-6)\alpha_2+2\beta_2=0\\ 2\alpha_2+(2-6)\beta_2=0\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}-1\alpha_2+2\beta_2=0\\ 2\alpha_2-4\beta_2=0\end{cases}$

Полагая $\alpha_2=2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2=1$.

Общее решение системы: $\begin{cases}x=C_1e^t+2C_2e^{6t}\\ y=-2C_1e^t+C_2e^{6t}\end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x''=5x'+2y'$;

Подставим в это выражение производную $y'=2x+2y$ из второго уравнения.

$$x''=5x'+4x+4y;$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x''=5x'+4x+2x'-10x$$

$$x''-7x'+6x=0$$

$$k_1=6; \qquad k_2=1$$

$$x=Ae^t+Be^{6t}; \qquad x'=Ae^t+6Be^{6t};$$

$$2y=x'-5x=Ae^t+6Be^{6t}-5Ae^t-5Be^{6t};$$

$$y=-2Ae^t+\frac{1}{2}Be^{6t};$$

Обозначив $A=C_1$; $\frac{1}{2}B=C_2$, получаем решение системы: $\begin{cases}x=C_1e^t+2C_2e^{6t}\\ y=-2C_1e^t+C_2e^{6t}\end{cases}$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти общее решений системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x+y+2\sin t-3\cos t\\ \frac{dy}{dt}&=-6x+4y+7\sin t-20\cos t\end{aligned}\right\}.$$

Задача 2. Найти решения систем, удовлетворяющие заданным условиям:

1) $\left.\begin{aligned}x'&=y-z\\ y'&=x+y\\ z'&=x+z\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x(0)&=1;\\ y(0)&=2;\\ z(0)&=3.\end{aligned}$

2) $\left.\begin{aligned}x'&=6x-72y+44z\\ y'&=-4x+40y-22z\\ z'&=-6x+57y-31z\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x(0)&=9;\\ y(0)&=5;\\ z(0)&=7.\end{aligned}$

Вопросы:

1. Дайте определение системы дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. Что называют общим решением системы дифференциальных уравнений?
4. Какая система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется линейной однородной?
5. Как составляется характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений?
6. Какими свойствами обладают решения системы дифференциальных уравнений?

Раздел 8. Математический анализ. Ряды.

Практическое занятие 40. Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд.

Цель: сформировать умение делать вывод о сходимости ряда на основании необходимого и достаточных признаков сходимости знакопостоянных рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

при этом числа $u_1, u_2, \ldots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $\quad n = 1, 2, \ldots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если $u_n > 0, \quad v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, *то при ρ < 1 ряд сходится, а при ρ > 1 – расходится. Если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Вывод: ряд сходится.

Признак Коши. (радикальный признак)

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

Следствие. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ne 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если φ(x) – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке [1;∞), *то ряд φ(1) + φ(2) + …+ φ(n) + … =* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при α>1 и расходится α≤1 т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при α>1 и расходится α≤1.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ называется **обобщенным гармоническим** рядом.

Следствие. Если *f(x)* и *φ(x)* – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=h,\quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти сумму ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+5n+6}$.
2. $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{3}{n^2-5n+6}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{30}{25n^2+5n-6}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2-1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{n^2+3n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{90}{4n^2+8n-5}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{16n^2-8n-3}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n(n+1)(n+2)}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{60}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

Задача 2. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{n(n+2)(n+3)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-2\sin n}{n-\ln n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2+3}$.
4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\ln n}{n^3-2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5-2\cos n}{\sqrt[5]{n^3}}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n(n^2+3)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2+1}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^{11}+1}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n+3}}$.

Задача 3. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n+2}{2^n(n+1)!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n!)^3}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{2^n(2n+5)!}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^5-1)}{n!}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{(2n)!}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n+2}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+2)!}{(3n)!}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+n}{3n^3-1}\right)^{n^2}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{7n+1}\right)^{n^3}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n^2}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{5n+1}\right)^{n^2}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{n/2}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n+1}e^{-n}$.

Вопросы:

1. Что такое числовой ряд?
2. Какой ряд называют знакопостоянным?
3. Что такое сумма ряда?

4. Какой ряд называют сходящимся?
5. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
6. Сформулируйте известные Вам достаточные признаки сходимости рядов.

Практическое занятие 41. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

Цель: сформировать умение делать вывод об абсолютной или условной сходимости числовых рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$*, то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда.*

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k, \quad i,k = 1,2,\ldots$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Исследовать сходимость рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{n(n+2)}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2}{n^5+n^2+1}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^5+3n^2+2}}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(n^2\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n^2-1}{3n^3}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+3}{\sqrt{n^5}}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{3n+2}{2n}\right)^{n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin^2\frac{\pi}{3^n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\sqrt{n+2}}$.

Вопросы:

1. Какой ряд называется знакочередующимся (знакопеременным)?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. Какой ряд называется абсолютно сходящимся (условно сходящимся)?
4. Сформулируйте признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.
5. Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

Практическое занятие 42. Функциональные ряды. Сходимость и равномерная сходимость. Степенные ряды. Сходимость степенного ряда. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Цель: сформировать умение делать вывод о сходимости и равномерной сходимости степенных рядов, применять полученные умения при решении практических задач.

Теоретическая часть:

Если членами ряда будут не числа, а функции от *x*, то ряд называется **функциональным**.

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной *x* сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной *x*, при которых ряд сходится. Совокупность таких значений называется **областью сходимости**.

Так как пределом каждой функции, входящей в область сходимости ряда, является некоторое число, то пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится** к функции $f(x)$ на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 и любой точки *x* из рассматриваемого отрезка существует номер N = N(ε, x), такой, что неравенство

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

выполняется при n>N.

При выбранном значении ε>0 каждой точке отрезка [a,b] соответствует свой номер и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка [a,b], будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка [a,b], т.е. будет общим для всех точек.

Последовательность $\{f_n(x)\}$ **равномерно сходится** к функции $f(x)$ на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 существует номер N = N(ε), такой, что неравенство

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

выполняется при n>N для всех точек отрезка [a,b].

Пример. Рассмотрим последовательность $\frac{\sin x}{1},\frac{\sin 2x}{2},\ldots,\frac{\sin nx}{n},\ldots$

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции $f(x)=0$, т.к.

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sin nx}{n}=0,\quad -\infty<x<\infty$$

Частными (частичными) суммами функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называются функции

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad n=1,2,\ldots$$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке (x=x_0), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Совокупность всех значений x, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

<u>Теорема.</u> (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при n>N и любом целом p>0 неравенство*

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

<u>Теорема.</u> (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)
(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :*

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$$

т.е. имеет место неравенство:

$$\left|u_n(x)\right| \le M_n .$$

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $\left|\cos nx\right| \le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при α=3>1 сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах (-∝, -1) ∪ (1, ∝) расходится.

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|.$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и –1.

При x = -1: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$ ряд сходится по признаку Лейбница. При x = 1: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ ряд расходится (гармонический ряд).

Теоремы Абеля.

(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| < |x_1|$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал (-R, R) называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

Пример. Найти область сходимости ряда $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

Находим радиус сходимости $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n-1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}|n| = |\infty|$.

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x. Общий член этого ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

Теорема. Если степенной ряд $\sum a_nx^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|; |x_1|)$.

Вопросы и задачи:

Задача 1. Найти область сходимости функциональных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt[3]{n}+1)^{x+3}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(x^2-6x+10)^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^{x^2+4x}+3}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(x^2-5x+9)^n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^{x^2-2}+1}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2(x^2+3)^n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+\sqrt{n})^x}$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(x^2-4x+8)^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^{3+3x-x^2}}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^2(x^2-2x+6)^n}$.

Задача 2. Найти область сходимости степенных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n9^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x+3)^n$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2 3^n}(x+2)^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)2^n}(x+4)^n$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}(x+2)^{2n+1}$.

Задача 3. Найти суммы функциональных рядов и указать области их сходимости к этим суммам:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n x^n}{n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-16x^4)^n}{n+1}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{nx^{n-1}}$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)x^{2n}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n(n+1)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)x^n}$.

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{2n+1}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Вопросы:

1.Дайте определение функционального ряда.

2.Что такое область сходимости функционального ряда?

3.Какой ряд называют равномерно сходящимся на отрезке?

4. Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.

5. Сформулируйте признак равномерной сходимости Вейерштрасса.

6. Что такое степенной ряд?

7.Что такое радиус (интервал) сходимости ряда?

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

2.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 446 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28060.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

2.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35481.html.

3.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20211.html.