МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Корректирующий курс по математике (часть 2)

Направление подготовки	08.03.01 Строительство
Профиль	Строительство зданий и сооружений
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная
Учебный план	2020г
Изучается	в 1 семестре

Пятигорск, 2020г.

1.ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ

Содержание практических занятий соответствует темам теоретического курса «Корректирующий курс по математике» и способствует углублению знаний и получению практических навыков по выполнению необходимых вычислений и расчетов, пройденных в школьном курсе математики.

Задачи освоения дисциплины: повторение и систематизация знаний курса математики средней школы.

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование полной системы знаний по основным разделам школьного курса математики, необходимых студентам как для освоения базовых и специальных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2.НАИМЕНОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ Темы	**Наименование работы**	**Обьем часов**	**Форма проведения**
	1 семестр		
1	Множества и операции над ними. Числовые множества. Некоторые обозначения.	1,5	
2	Понятие комплексного числа, формы его записи, действия над комплексными числами.	1,5	
3	Формулы сокращенного умножения. Бином Ньютона.	1,5	
4	Многочлены. Действия над многочленами.	1,5	
5	Алгебраические уравнения высших степеней.	1,5	
6	Дробно-рациональные уравнения. Уравнения с модулем.	1,5	
7	Алгебраические неравенства.	1,5	
8	Тригонометрические уравнения и неравенства.	1,5	
9	Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.	1,5	
	Итого за 1 семестр	*13,5*	

3.ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 8. Тригонометрические уравнения и неравенства.
Цель занятия: систематизировать знания о методах решения тригонометрических уравнений и неравенств, применять полученные умения при решении задач.
Теоретическая часть:

1. Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение

$$\sin x = a. \qquad (8.1)$$

Если $|a| > 1,$ то уравнение (8.1) решений не имеет, так как $|\sin x| \le 1.$

Если $|a| \le 1,$ то уравнение имеет решение, которое находят по формуле

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (8.2)$$

Частные случаи уравнения (8.1):

уравнение $\sin x = -1,$ решение $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z};$

уравнение $\sin x = 0,$ решение $x = \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z};$

уравнение $\sin x = 1,$ решение $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$

Уравнение

$$\cos x = a. \qquad (8.3)$$

Если $|a| > 1,$ то уравнение решений не имеет, так как $|\cos x| \le 1.$

Если $|a| \le 1,$ то уравнение (8.3) имеет решение, которое находят по формуле

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (8.4)$$

Частные случаи уравнения (8.3):

уравнение $\cos x = -1,$ решение $x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z};$

уравнение $\cos x = 0,$ решение $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z};$

уравнение $\cos x = 1,$ решение $x = 2\pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$

Уравнение

$$\mathrm{tg} x = a,\ \ a \in \mathbf{R}. \qquad (8.5)$$

Решение уравнения (8.5) находят по формуле

$$x = \mathrm{arctg} a + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (8.6)$$

Уравнение

$$\mathrm{ctg} x = a,\ \ a \in \mathbf{R}. \qquad (8.7)$$

Решение уравнения (8.7) находят по формуле

$$x = \mathrm{arcctg} x + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (8.8)$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2} = 0.$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

и воспользуемся формулой (8.2):

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Используем нечетность функции $\arcsin x$:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \left(-\arcsin\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z},$$

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Из последнего равенства находим:

$$\frac{x}{2}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z},$$

что приводит к ответу

$$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

Решение. Воспользуемся частным случаем решения уравнения типа (8.3):

$$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$

$$3x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$

$$3x=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$$

приходим к ответу

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3},\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

2. Уравнения, решаемые разложением на множители

Пример 3. Решить уравнение $\sin x\,\mathrm{tg}x+1-\sin x-\mathrm{tg}x=0.$

Решение. ОДЗ: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\sin x\,\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}x-\sin x+1=0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}x(\sin x-1)-(\sin x-1)=0$$

или

$$(\sin x-1)\cdot(\mathrm{tg}x-1)=0.$$

Решаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \mathrm{tg}x=1.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Однако решение $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ не удовлетворяет ОДЗ исходного уравнения. Поэтому получаем ответ:

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$$

3. Уравнения, решаемые с помощью формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Пример 4. Решить уравнение

$4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1.$

Решение. Преобразуем произведение $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ в сумму, получим:

$2\sin x\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos(2x+\pi)\right)+\cos 3x=1;$

$\sin x+2\sin x\cos 2x+\cos 3x=1.$

Преобразуем в сумму произведение $\sin x\cdot\cos 2x$:

$\sin x+\sin 3x-\sin x+\cos 3x=1,$

$\sin 3x+\cos 3x=1.$

Используем формулу приведения и представим последнее уравнение в виде

$\sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=1.$

Преобразуем полученную сумму синусов в произведение:

$\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$

Получаем уравнение

$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$

$3x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$

Получаем ответ:

$x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\quad n\in\mathbf{Z}.$

4. Уравнения, решаемые с помощью замены переменной

Пример 5. Решить уравнение $\cos^2 4x+\cos 4x-2=0.$

Решение. Данное уравнение является квадратным относительно $\cos 4x.$ Заменяем $\cos 4x=y,$ получим уравнение $y^2+y-2=0.$ Его корни $y_1=1$ и $y_2=-2.$ Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению совокупности простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x=1,\\ \cos 4x=-2.\end{array}\right.$$

Уравнение $\cos 4x=-2$ корней не имеет, т. е. $|-2|>1.$

Решением второго является:

$4x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\quad x=\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbf{Z}.$

Получаем ответ: $x=\frac{\pi n}{2},\quad n\in\mathbf{Z}.$

5. Однородные уравнения

Однородным тригонометрическим уравнением n-й степени относительно $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x,\ \alpha\in\mathbf{R},$ называется уравнение вида

$$\begin{aligned}&c_0\sin^n\alpha x+c_1\sin^{n-1}\alpha x\cos\alpha x+\ldots+\\&+c_{n-1}\sin\alpha x\cos^{n-1}\alpha x+c_n\cos^n\alpha x=0,\end{aligned}\qquad(8.9)$$

где $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$ – действительные числа, $c_0\neq 0;\ n\geq 1,\ n\in\mathbf{N}.$

В уравнении (8.9) $\cos\alpha x\neq 0,$ так как при $\cos\alpha x=0$ исходное уравнение примет вид: $a_0\sin^n\alpha x=0,$ откуда $\sin\alpha x=0,$ что невозможно, поскольку $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$ не могут одновременно равняться нулю.

Разделив исходное уравнение на $\cos^n \alpha x,$ получим:

$$a_0 \mathrm{tg}^n \alpha x + a_1 \mathrm{tg}^{n-1} \alpha x + \ldots + a_{n-1} \mathrm{tg} \alpha x + a_n = 0.$$

С помощью замены $\mathrm{tg} \alpha x = t$ имеем алгебраическое уравнение

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = 0,$$

которое решаем и возвращаемся к старой переменной.

Пример 6. Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0.$

Решение. Разделив уравнение на $\cos x \neq 0,$ получим $2\mathrm{tg} x - 3 = 0,$ откуда $\mathrm{tg} x = \dfrac{3}{2}$ и $x = \mathrm{arctg}\dfrac{3}{2} + \pi n, \ \ n \in \mathbf{Z}.$

Получаем ответ: $x = \mathrm{arctg}\dfrac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$

Пример 7. Решить уравнение $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0.$

Решение. Используя формулу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$ приведем данное уравнение к однородному:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + \sin x \cos x = 0,$$

$$2\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

Разделим почленно на $\cos^2 x \neq 0$:

$$2 - \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} x = 0,$$

откуда

$$\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg} x - 2 = 0.$$

Введем замену $\mathrm{tg} x = t$ и получим уравнение $t^2 - t - 2 = 0,$ корнями которого будут $y_1 = -1; \ y_2 = 2.$

После чего перейдем к решению совокупности простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg} x = -1, \\ \mathrm{tg} x = 2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ \ n \in \mathbf{Z}, \\ x = \mathrm{arctg} 2 + \pi n, \ \ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Получаем ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ \ n \in \mathbf{Z}; \ \ x = \mathrm{arctg} 2 + \pi n, \ \ n \in \mathbf{Z}.$

6. Неоднородные уравнения 2-й степени

Неоднородным тригонометрическим уравнением 2-й степени называется уравнение вида

$$a\sin^2 \alpha x + b\sin \alpha x \cdot \cos \alpha x + c\cos^2 \alpha x = d, \ \ d \neq 0. \qquad (8.10)$$

Используя основное тригонометрическое тождество, приводим уравнение к однородному

$$a\sin^2 \alpha x + b\sin \alpha x \cdot \cos \alpha x + c\cos^2 \alpha x = d\left(\cos^2 \alpha x + \sin^2 \alpha x\right),$$

которое решаем далее как уравнение (8.9).

Пример 8. Решить уравнение $4\sin^2 x - \sin 2x = 3.$

Решение. Используя формулы:

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ и $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$

преобразуем данное уравнение к однородному:

$$4\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right),$$

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Разделим на $\cos^2 x \neq 0$:

$\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 3 = 0.$

Введем замену $\mathrm{tg}x = y$:

$y^2 - 2y - 3 = 0,$ откуда $y_1 = -1;\ y_2 = 3.$

Решим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}x = -1,\\ \mathrm{tg}x = 3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z},\\ x = \mathrm{arctg}3 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Получаем ответ:

$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z};\ \ x = \mathrm{arctg}3 + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$

7. Неоднородные уравнения 1-й степени

Неоднородным уравнением 1-й степени называется уравнение вида

$$a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = c,\ \ a,\ \ b,\ \ c \neq 0. \qquad (8.11)$$

1-й способ решения. Используем формулы двойного аргумента:

$$2a\sin\frac{\alpha x}{2}\cos\frac{\alpha x}{2} + b\left(\cos^2\frac{\alpha x}{2} - \sin^2\frac{\alpha x}{2}\right) = c\left(\sin^2\frac{\alpha x}{2} + \cos^2\frac{\alpha x}{2}\right).$$

Тогда уравнение сводится к однородному уравнению 2-й степени, которое решаем как уравнение (8.10).

2-й способ решения. Используем метод введения вспомогательного аргумента.

Разделив обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$ то существует угол φ, такой, что

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{array}\right. \qquad (8.12)$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\sin\alpha x\cos\varphi + \cos\alpha x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или, используя формулу для синуса суммы, получим:

$$\sin(\alpha x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $c \le \sqrt{a^2+b^2}$, то последнее уравнение имеет решение:

$$\alpha x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Приходим к ответу:

$$x = -\frac{1}{\alpha}\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{(-1)^k}{\alpha}\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\pi k}{\alpha},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 9. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1.$

Решение. Разделив левую и правую часть уравнения на $\sqrt{2}$ (так как $a = 1;\ b = 1$), получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbf{Z},$$

откуда приходим к ответу:

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

8. Уравнения, решаемые с применением формул понижения степени.

При решении широкого круга тригонометрических уравнений ключевую роль играют формулы понижения степени.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=0.$$

Решение. Используем формулу $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$. Заданное уравнение примет вид:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{2}=0.$$

Преобразуя, перейдем к решению уравнения

$$\cos 8x+\cos 6x-\cos 2x-\cos 4x=0,$$

откуда

$$(\cos 8x-\cos 2x)+(\cos 6x-\cos 4x)=0.$$

Применив формулы преобразования суммы и разности косинусов в произведение, получим:

$$-2\sin 3x\sin 5x-2\sin x\sin 5x=0$$

или

$$2\sin 5x(\sin 3x+\sin x)=0,$$

откуда

$$\sin 5x=0;\quad 5x=\pi n,\quad n\in\mathbf{Z};\quad x=\frac{\pi n}{5},\quad n\in\mathbf{Z};$$

$$\sin 3x+\sin x=0;$$

$$2\sin 2x\cos x=0.$$

Получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ \cos x=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Множество решений $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ содержится во множестве решений $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbf{Z}$.

Поэтому приходим к ответу:

$x=\dfrac{\pi k}{2},\ \ k\in\mathbf{Z}.$

9. Уравнения, решаемые методом универсальной подстановки.

Тригонометрическое уравнение, рациональное относительно $\sin x,\ \ \cos x,\ \ \mathrm{tg}x,\ \ \mathrm{ctg}x,$ может быть сведено к рациональному уравнению относительно $t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ с помощью формул универсальной подстановки.

Следует отметить, что применение формул может привести к сужению ОДЗ исходного уравнения, поскольку $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ не определен в точках $x=\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}.$ Поэтому в таком случае нужно проверять, являются ли значения $x=\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z},$ корнями исходного уравнения.

Пример 11. Решить уравнение $\sin x+\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=0.$

Решение. По условию задачи $x\neq\pi+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}.$ Применим формулу универсальной подстановки и преобразуем уравнение к виду

$$\frac{2\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}+\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0.$$

Сделав замену $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t,$ получим:

$$\frac{2t}{1+t^2}+t=0,$$

откуда $t=0$ и, следовательно, $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=0.$ Решая последнее уравнение, получаем ответ:

$x=2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}.$

Тригонометрические неравенства

Для решения тригонометрических неравенств используют единичную окружность и определение тригонометрических функций или графический метод, а также метод замены переменной.

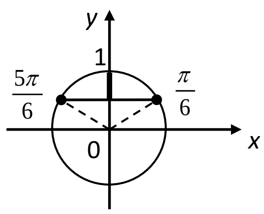
Простейшие тригонометрические неравенства и неравенства, сводящиеся к ним

Пример 1. Решить неравенство $\sin x>\dfrac{1}{2}.$

Решение. Воспользуемся определением синуса. С помощью единичной окружности находим вначале углы x, которые соответствуют равенству $\sin x=\dfrac{1}{2}.$ Их два: $x=\dfrac{\pi}{6}$ и $x=\dfrac{5\pi}{6}.$ Строим их, причем соответствующие радиус-векторы пунктиром, так как заданное неравенство строгое.

Выделим на единичной окружности множество точек, ординаты которых больше $\dfrac{1}{2},$ это $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}.$ Используя периодичность функции $f(x)=\sin x,$ приходим к ответу:

$\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k\right),\ \ k\in\mathbf{Z}.$



Ответ неравенства следует понимать как объединение всех промежутков, которые получаем при всех $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить неравенство $\cos(3x+1) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Заменив $3x + 1$ на t, получим: $\cos t \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Выделим на единичной окружности множество точек, абсциссы которых меньше или равны $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Получим:

$\frac{3\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4}$.

Учитывая период, имеем:

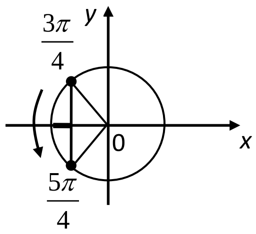
$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le t \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Возвращаемся к заданной неизвестной:

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le 3x+1 \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi k;$

$\frac{3\pi}{4} - 1 + 2\pi k \le 3x \le \frac{5\pi}{4} - 1 + 2\pi k;$

$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi k \le x \le \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.



Приходим к ответу:

$\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi k; \quad \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi k\right], \quad k \in \mathbf{Z}$.

Задания

I уровень

1.1. Решите тригонометрическое уравнение:

1) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ 2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4} = 0\right);$

3) $2\sin x + \sqrt{3} = 0;$ 4) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2};$

5) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0;$ 6) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0;$

7) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 3;$ 8) $\left(\operatorname{ctg} 3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

1.2. Решите уравнение:

1) $15\sin^2 x-25\sin x-10=0;$ 2) $\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}=0;$

3) $\mathrm{tg}^2 2x-4\mathrm{tg}2x+3=0;$ 4) $5\sin^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-6=0;$

5) $\mathrm{tg}3x+3\mathrm{tg}3x=2\sqrt{3};$ 6) $\sin 2x-\cos x=0;$

7) $\left(\cos\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1;$ 8) $\sin x+\cos 3x=0;$

9) $3\cos 3x-3\cos 5x=3\sin 4x;$ 10) $2\cos^2 x+\sin 2x=0;$

1.3. Решите неравенство:

1) $-3\mathrm{tg}x\ge\sqrt{3};$ 2) $2\cos x\ge\sqrt{3};$

3) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\le\sqrt{3};$ 4) $2\sin(\pi+3x)\le\sqrt{3};$

5) $\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{x}{3}\right)+1\ge 0;$ 6) $\sin x+4\le 0.$

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $4\sin^2 x-\sin 2x=3;$

2) $2\cos^2\frac{x}{3}+3\sin\frac{x}{3}=0;$

3) $\mathrm{tg}^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{tg}x+\sqrt{3}=0;$

4) $\mathrm{tg}\left(2\left(x+\pi\right)\right)+4=5\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right);$

5) $\sin 4x+\sin^2 2x=0;$

6) $\cos 3x+\cos x=4\cos 2x;$

7) $2\cos^2 x+3\sin 4x+4\sin^2 2x=0;$

8) $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x;$

9) $2\sin^2 2x+3\cos^2 2x=2{,}5\sin 4x;$

10) $2\cos^2 3x+\sin^2 3x=1{,}5\sin 6x;$

2.2. Решите неравенство:

1) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)-1\le 0;$ 2) $\sin^2 x+2\sin x<0;$

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-4x\right)+0{,}5>0;$ 4) $4\sin\frac{x}{2}\ge 3;$

5) $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|\sin 2x\right|-3\ge 0;$ 6) $\cos^4 x+\sin^4 x\le\frac{5}{8}.$

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $2\cos^2 3x+\sin 5x=1;$

2) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin 2x;$

3) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4};$

4) $\sin^4\frac{x}{2}+5\cos x+4=0;$

5) $4\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+6\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=4;$

6) $\frac{\sin x}{\sin x-3\cos x}+\frac{4}{\mathrm{tg}x+3}=\frac{18}{\mathrm{tg}^2x-9};$

7) $\mathrm{ctg}^2 2x+\mathrm{ctg}2x=4-\mathrm{tg}^2 2x+\mathrm{tg}2x;$

8) $2\sin^2 x+3\cos 2x-4=5\sin 2x;$

9) $\cos^4 x+3-4\sin 2x=\sin^4 x;$

10) $\cos 2x=\sin^3 x-\cos^3 x;$

3.1. Решите неравенство:

1) $2\mathrm{tg}^2 2x-1>0;$

2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos x<\frac{2}{3};$

3) $\cos^2\frac{x}{3}\le\sin^2\frac{x}{3}-0{,}5;$

4) $\sqrt{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)}+4\le 0;$

5) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\ge 3;$

6) $4\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}.$

Практическое занятие 9. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Цель занятия: систематизировать знания о методах решения показательных, логарифмических уравнений и неравенств, применять полученные умения при решении задач.

Теоретическая часть:

Показательным уравнением называется уравнение, которое содержит неизвестную величину в показателе степени при постоянном основании a ($a > 0$).

Типы показательных уравнений и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной величиной x.

I тип: уравнение вида

$$a^{f(x)}=b,\ \text{где}\ a>0,\ a\ne 1, \qquad (9.1)$$

имеет решение, если $b > 0$. Его решают логарифмированием по основанию a:

$\log_a a^{f(x)}=\log_a b.$

Тогда

$$f(x)=\log_a b. \qquad (9.2)$$

Решение уравнения (9.2) производят соответственно типу этого уравнения.

II тип: уравнение вида

$$a^{f(x)}=a^{g(x)},\ \text{где}\ a>0, \qquad (9.3)$$

по свойству равенства степеней равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Последнее уравнение решают в зависимости от его типа.

III тип: уравнение вида

$$F\left(a^{f(x)}\right)=0, \qquad (9.4)$$

где F – некоторое выражение относительно $a^{f(x)}$.

Производят замену переменной $y = a^{f(x)}$ и решают уравнение $F(y) = 0$.

Если $y_1, y_2, ..., y_n$, $(n \in \mathbf{N})$ – корни уравнения, то после возвращения к старой переменной решение уравнения (9.4) сводится к решению равносильной ему совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = y_1, \\ a^{f(x)} = y_2, \\ ..., \\ a^{f(x)} = y_n. \end{array}\right.$$

IV тип: уравнения, решаемые графическим методом.

Для таких уравнений строят соответствующие графики для левой и правой частей уравнения. Определяют, для каких значений x графики имеют общую ординату. Используют также иные функциональные свойства, в частности, монотонность функции (возрастание, убывание).

Показательно-степенным уравнением называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится и в основании степени, и в показателе. Такие уравнения принято решать при условии, что основания степени положительны (ОДЗ уравнения).

Типы показательно-степенных уравнений и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x, $f(x) > 0$.

I тип: уравнение вида

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(f(x)\right)^{h(x)}. \qquad (9.5)$$

Решение уравнения (9.5) на ОДЗ сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = h(x), \\ f(x) = 1. \end{array}\right.$$

II тип: уравнение вида

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(h(x)\right)^{g(x)}. \qquad (9.6)$$

Решение уравнения (9.6) на ОДЗ сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = h(x), \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$$

Пример 1. Решить уравнение $3^{x-5} = 7$.

Решение. *1-й способ.* Имеем уравнение I типа (формула (9.1)). Решаем логарифмированием по основанию 3. Получаем:

$\log_3 3^{x-5} = \log_3 7$, т. е. $(x-5)\log_3 3 = \log_3 7$.

Приходим к линейному уравнению

$x - 5 = \log_3 7$, откуда $x = \log_3 7 + 5$.

2-й способ. Преобразуем правую часть при помощи основного логарифмического тождества: $3^{x-5} = 3^{\log_3 7}$.

Получили уравнение II типа (формула (9.3)), которое решаем по свойству равенства степеней:

$x - 5 = \log_3 7,\ x = \log_3 7 + 5.$ Пришли к ответу: $x = \log_3 7 + 5$.

Пример 2. Решить уравнение $27^{x-\frac{2}{3}} - 9^{x-1} = 2 \cdot 3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{3x-1}$.

Решение. Выполним необходимые преобразования, сведем показательные выражения к одному и тому же основанию 3:

$$3^{3\left(x-\frac{2}{3}\right)} - 3^{2(x-1)} = 2 \cdot 3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{3x-1},$$

$3^{3x-2}-3^{2x-2}-2\cdot 3^{2x-1}+2\cdot 3^{3x-1}=0,$
$3^{3x-2}+2\cdot 3^{3x-1}-3^{2x-2}-2\cdot 3^{2x-1}=0,$
$3^{3x}\left(3^{-2}+2\cdot 3^{-1}\right)=3^{2x}\left(3^{-2}+2\cdot 3^{-1}\right),$
$3^{3x}=3^{2x}.$

По свойству степеней: $3x=2x, 3x-2x=0.$

Получаем ответ: x = 0.

Пример 3. Решить уравнение $4^x+2\cdot 2^x-48=0.$

Решение. Преобразуем уравнение

$2^{2x}+2\cdot 2^x-48=0,$
$\left(2^x\right)^2+2\cdot 2^x-48=0.$

Имеем квадратное уравнение относительно 2^x. Решаем при помощи замены $2^x=y$. Получаем:

$y^2+2y-48=0.$

Корнями последнего уравнения являются значения $y_1=-6,\ \ y_2=8.$

Возвращаясь к неизвестной x, имеем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}2^x=-6,\\ 2^x=8.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности решений не имеет. Решаем второе уравнение:

$2^x=8,$ т. е. $2^x=2^3.$

Получили ответ: x = 3.

Пример 4. Решить уравнение $3\cdot 16^x-5\cdot 36^x+2\cdot 81^x=0.$

Решение. Выполним необходимые преобразования:

$3\cdot 4^{2x}-5\cdot(4\cdot 9)^x+2\cdot 9^{2x}=0,$
$3\cdot 4^{2x}-5\cdot 4^x\cdot 9^x+2\cdot 9^{2x}=0.$

Имеем однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на 9^{2x} ($9^{2x}\neq 0$). Получим:

$$3\cdot\frac{4^{2x}}{9^{2x}}-5\cdot\frac{4^x\cdot 9^x}{9^{2x}}+2\cdot\frac{9^{2x}}{9^{2x}}=0,$$

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+2=0,$$

т. е. получили квадратное уравнение относительно $\left(\frac{4}{9}\right)^x$. Вводим замену $\left(\frac{4}{9}\right)^x=y.$ Тогда

$3y^2-5y+2=0,$

откуда $y_1=\frac{2}{3}, y_2=1.$

Возвращаемся к старой переменной:

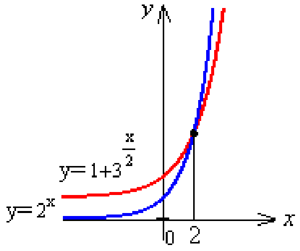
$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=1;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{4}{9}\right)^0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2x=1,\\ x=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=0.\end{array}\right.$$

Получили ответ: $x=0, x=\frac{1}{2}.$

Пример 5. Решить уравнение $1+3^{\frac{x}{2}}=2^x.$

Решение. *1-й способ*. Подбором убеждаемся, что x = 2– корень уравнения. Функции

$y=1+3^{\frac{x}{2}}$ (т. е. $y=\left(\sqrt{3}\right)^{x}+1$) и $y=2^{x}$ монотонно возрастают. Они имеют единственную общую точку.



2-й способ. Разделим обе част… …чим:

$$\frac{1}{2^{x}}+\frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x}}{2^{x}}=1 \text{ или } \left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x}=1.$$

Заменим $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$. Получим $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^{x}=1.$

При $x = 2$ получим основное тригонометрическое тождество, т. е. $x = 2$ является корнем исходного уравнения.

Получили ответ: $x = 2$.

Пример 6. Решить уравнение $10\cdot\sqrt[x]{4}-29\cdot\sqrt[x]{10}+10\cdot\sqrt[x]{25}=0.$

Решение. ОДЗ: $x = 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Перепишем уравнение в виде

$$10\cdot 4^{\frac{1}{x}}-29\cdot 10^{\frac{1}{x}}+10\cdot 25^{\frac{1}{x}}=0.$$

Разделим обе части уравнения на $25^{\frac{1}{x}}$ (так как $25^{\frac{1}{x}}\neq 0$). Получим:

$$10\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^{2}-29\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}+10=0.$$

Вводим замену $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=y.$

Получаем квадратное уравнение $10y^{2}-29y+10=0$, откуда $y_1=\frac{2}{5}$, $y_2=\frac{5}{2}.$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{2}{5},\\ \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{5}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{1},\\ \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}=1,\\ \frac{1}{x}=-1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Но ни один из корней не подходит по ОДЗ. Следовательно, уравнение корней не имеет.

Пример 7. Решить уравнение $|x-2|^{x^{2}-5x+6}=1.$

Решение. ОДЗ: $x\neq 2$.

$$|x-2|^{x^{2}-5x+6}=|x-2|^{0}.$$

Решением является совокупность

$$\left[\begin{array}{l}x^{2}-5x+6=0,\\ |x-2|=1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}(x-2)(x-3)=0,\\ x-2=1,\\ x-2=-1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=2,\ x=3,\\ x=3,\\ x=1.\end{array}\right.$$

Корень $x = 2$ не подходит по ОДЗ.

Получили ответ: $x = 1$, $x = 3$.

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком логарифма или в его основании.

При решении логарифмических уравнений обязательно учитывается ОДЗ логарифма. Если ОДЗ найти сложно, то можно только выписать условия, а затем проверить полученные корни подстановкой в ОДЗ (можно проверять подстановкой в уравнение, не выписывая ОДЗ).

Типы уравнений и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с переменной (число).

I тип: уравнение вида

$$\log_{f(x)} g(x) = c, \tag{9.7}$$

где $c \in \mathbf{R}$.

ОДЗ: $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$

На указанной ОДЗ уравнение (6.8) решают по определению логарифма: $g(x) = f(x)^c$.

II тип: уравнение вида

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x), \tag{9.8}$$

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$

На основании равенства логарифмов, уравнение (9.8) сводится к равносильному ему (на указанной ОДЗ) уравнению:

$g(x) = h(x)$.

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{h(x)} g(x), \tag{9.9}$$

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Данное уравнение на ОДЗ равносильно совокупности уравнений:

$\left[\begin{array}{l} g(x) = 1, \\ f(x) = h(x). \end{array} \right.$

III тип: уравнения, решаемые заменой переменной

$$F\left(\log_{f(x)} g(x)\right) = 0, \tag{9.10}$$

где F – некоторое выражение относительно $\log_{f(x)} g(x)$.

Необходимо определить ОДЗ уравнения, учитывая все условия существования логарифма и выражения F.

Далее заменяют $y = \log_{f(x)} g(x)$ и решают уравнение $F(y) = 0$.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – корни последнего уравнения, то, после возвращения к старой переменной, необходимо решить совокупность

$\left[\begin{array}{l} \log_{f(x)} g(x) = y_1, \\ \log_{f(x)} g(x) = y_2, \\ \ldots, \\ \log_{f(x)} g(x) = y_n. \end{array} \right.$

Полученные корни проверяют по ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2\left(x^2-25\right) = 0.$

Решение. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{x+5} > 0, \\ x^2 - 25 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+5)\cdot(x-5) > 0, \\ (x+5)\cdot(x-5) > 0. \end{cases}$$

Решение системы:

$x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty).$

Преобразуем уравнение к виду

$$\log_2\left(\frac{x-5}{x+5}\left(x^2-25\right)\right) = 0.$$

Получили уравнение I типа, которое решается по определению логарифма:

$$\frac{x-5}{x+5}\cdot\left(x^2-25\right) = 2^0, \quad \frac{x-5}{x+5}\cdot(x+5)\cdot(x-5) = 1,$$

$$\frac{(x-5)^2\cdot(x+5)}{x+5} - 1 = 0, \quad \frac{(x-5)^2\cdot(x+5)-(x-5)}{x+5} = 0,$$

$$(x+5)\cdot\left((x-5)^2-1\right) = 0, \quad (x-5)^2 - 1 = 0,$$

$$(x-5-1)\cdot(x-5+1) = 0, \quad (x-4)\cdot(x-6) = 0,$$

откуда $x_1 = 4,\ x_2 = 6.$

Из полученных значений корень $x = 4$ не подходит по ОДЗ.

Получаем ответ: $x = 6$.

Пример 2. Решить уравнение $\log_{x^2+5x+7} \log_{x^2-4} 3x = 0.$

Решение. Записываем условия, определяющие ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_{x^2-4} 3x > 0, \\ x > 0, \\ x^2 - 4 > 0, \\ x^2 - 4 \neq 1, \\ x^2 + 5x + 7 > 0, \\ x^2 + 5x + 7 \neq 1. \end{cases}$$

Заданное уравнение относится к I типу. Получаем:

$$\log_{x^2-4} 3x = \left(x^2+5x+7\right)^0, \quad \log_{x^2-4} 3x = 1.$$

Снова используем определение логарифма:

$3x = x^2 - 4,$ т. е. $x^2 - 3x - 4 = 0,$ откуда $x_1 = -1,\ x_2 = 4.$

Полученные корни проверяем подстановкой в условия, определяющие ОДЗ уравнения. Убеждаемся, что корень $x_2 = 4$ подходит, а корень $x_1 = -1$ не подходит по ОДЗ.

Получаем ответ: $x = 4.$

Пример 3. Решить уравнение $\log_{x^2-4}(x^3+6) = \log_{x^2-4}(4x^2-x).$

Решение. Записываем условия, определяющие ОДЗ:

$$\begin{cases} x^3 + 6 > 0, \\ 4x^2 - x > 0, \\ x^2 - 4 > 0, \\ x^2 - 4 \neq 1. \end{cases}$$

Данное уравнение относится ко II типу, т. е. решается по свойству равенства логарифмов. Получаем:

$x^3 + 6 = 4x^2 - x,$ т. е. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$

Раскладываем левую часть на множители:

$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)=0,$ откуда получаем $x_1=-1, x_2=2, x_3=3.$

Подставляем найденные значения в ОДЗ, находим, что уравнение имеет только один корень $x = 3$.

В ответе имеем: $x = 3$.

Пример 4. Решить уравнение

$\log_x(5x-9)=\log_{\sqrt{2x-1}}(5x-9).$

Решение. Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ 5x-9>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x>\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ x>\dfrac{9}{5}, \end{cases} \text{ т. е. } x\in\left(\frac{9}{5};+\infty\right).$$

Данное уравнение относится ко II типу. Решаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} 5x-9=1, \\ x=\sqrt{2x-1}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 5x=10, \\ x^2=2x-1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x^2-2x+1=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1. \end{array}\right.$$

По ОДЗ подходит только корень $x = 2$, так как $1\notin\left(\frac{9}{5};+\infty\right).$

Получаем ответ: $x = 2$.

Пример 5. Решить уравнение $\lg^2 x^3-10\lg x+1=0.$

Решение. ОДЗ: $x>0.$ Преобразуем уравнение:

$$\left(\lg x^3\right)^2-10\lg x+1=0,$$
$$(3\lg x)^2-10\lg x+1=0,$$
$$9\lg^2 x-10\lg x+1=0.$$

Имеем квадратное уравнение относительно $\lg x$ (уравнение III типа). Заменяем $\lg x=y$:

$9y^2-10y+1=0.$

Решая полученное квадратное уравнение, находим корни $y_1=\frac{1}{9},\ y_2=1.$ Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x=\dfrac{1}{9}, \\ \lg x=1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=10^{\frac{1}{9}}, \\ x=10; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[9]{10}, \\ x=10. \end{array}\right.$$

Оба корня подходят по ОДЗ, получаем ответ: $x=\sqrt[9]{10},\ x=10.$

Пример 6. Решить уравнение $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)=\log_{\sqrt{5}-2}(x+3).$

Решение. Запишем условия ОДЗ: $\begin{cases} x^2+x-1>0, \\ x+3>0. \end{cases}$

Воспользуемся тем, что

$\sqrt{5}-2=\dfrac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{5-4}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}.$ Тогда

$$\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)=\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)^{-1}}(x+3),$$
$$\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)=-\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}(x+3),$$
$$\log_{2+\sqrt{5}}(x^2+x-1)+\log_{\left(2+\sqrt{5}\right)}(x+3)=0,$$
$$\log_{2+\sqrt{5}}\left((x^2+x-1)(x+3)\right)=0.$$

Решаем полученное уравнение как уравнение I типа:

$$(x^2+x-1)(x+3)=1,$$
$$x^3+x^2-x+3x^2+3x-3-1=0,$$
$$x^3+4x^2+2x-4=0.$$

Среди целых делителей свободного члена находим корень $x=-2$. Он подходит по ОДЗ.

Пришли к ответу: $x=-2$.

Пример 7. Решить уравнение $\log_2^2(-x)-5\log_2 x^2+16=0.$

Решение. ОДЗ: $-x>0,$ т. е. $x\in(-\infty;0)$.

Воспользуемся свойствами модуля: $-x=|x|,$ если $x<0,$ и $x^2=|x|^2.$ Тогда уравнение перепишется в виде

$$\log_2^2|x|-5\log_2|x|^2+16=0,$$
$$\log_2^2|x|-10\log_2|x|+16=0.$$

Заменяем $\log_2|x|=y$ и приходим к квадратному уравнению

$$y^2-10y+16=0,$$

корнями которого являются числа $y_1=2,\ y_2=8.$

Возвращаемся к старой переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2|x|=2,\\ \log_2|x|=8;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}|x|=4,\\ |x|=256.\end{array}\right.$$

Раскрываем модуль, используя ОДЗ:

$$\left[\begin{array}{l}-x=4,\\ -x=256;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=-256.\end{array}\right.$$

Получаем ответ: $x=-4,\ x=-256.$

Пример 8. Решить уравнение $\log_5(x^2+4x+29)=-x^2-4x-2.$

Решение. ОДЗ: $x^2+4x+29>0,$ т. е. $x\in\mathbf{R}$.

Рассмотрим левую часть уравнения:

$$\log_5(x^2+4x+4+25)=\log_5((x+2)^2+25)\ge\log_5 25=\log_5 5^2=2.$$

Преобразуем правую часть. Получим:

$$-x^2-4x-2=-(x^2+4x+4)+4-2=2-(x+2)^2\le 2.$$

Используя функциональный метод решения, заключаем, что решением исходного уравнения является решение системы

$$\begin{cases}\log_2(x^2+4x+29)=2,\\ -x^2-4x-2=2,\end{cases}\ \text{т. е. } x=-2.$$

Получаем ответ: $x=-2$.

Пример 9. Найти сумму корней уравнения $x^2\log_{|x|}\left(|x|+6\right)=12.$

Решение. Для данного уравнения характерно следующее: если x – корень уравнения, то и $(-x)$ тоже корень уравнения. Поэтому если уравнение имеет корни, то их сумма будет равна нулю. Подстановкой находим корни $x=\pm2.$

Получаем ответ: 0.

Показательным неравенством называется неравенство, в котором неизвестная содержится только в показателе степени при постоянном основании a, $a > 0$, $a \neq 1$.

Типы неравенств и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с переменной.

I тип: неравенство вида

$$a^{f(x)} > b, \qquad (9.11)$$

где $b \in \mathbf{R}$.

Если $b \leq 0,$ то решением неравенства является множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$.

Если $b > 0,$ логарифмированием по основанию a неравенство сводится к равносильному неравенству. При этом существенно учитывается величина основания a:

1) если $0 < a < 1,$ то в результате логарифмирования получают неравенство $f(x) < \log_a b;$

2) если $a > 1,$ то после логарифмирования приходят к неравенству $f(x) > \log_a b.$

Далее решают в зависимости от вида выражения $f(x)$.

Если исходное неравенство имело знак < или ≥, или ≤, то аналогично знак неравенства меняется на противоположный в случае $0 < a < 1$ и не изменяется в случае $a > 1$.

II тип: неравенство вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}. \qquad (9.12)$$

Для решения неравенства (9.12) (или аналогичных ему со знаками ≥, <, ≤) используют монотонность логарифма:

1) если $0 < a < 1$, то неравенство равносильно неравенству $f(x) < g(x),$ которое решают в зависимости от вида выражений $f(x)$ и $g(x)$;

2) если $a > 1,$ то неравенство равносильно неравенству $f(x) > g(x).$

III тип: неравенство вида

$$F\left(a^{f(x)}\right) > 0, \qquad (9.13)$$

где F – некоторое выражение относительно $a^{f(x)}$.

Вводят замену переменной $y = a^{f(x)}$ и решают относительно переменной y неравенство $F(y) > 0.$

Найденные в качестве решения промежутки (если такие существуют) записывают в виде неравенств относительно y и затем возвращаются к переменной x. Остается решить полученные показательные неравенства.

Если переменная содержится и в основании степени, и в показателе, то такое неравенство называется ***показательно-степенным***. Поскольку изменение знака неравенства зависит от величины основания, то для показательно-степенных неравенств рассматривают два случая, т. е. решают совокупность систем неравенств.

Показательно-степенные неравенства решают при условии, что основание степени положительно.

В частности, аналогом показательного неравенства (9.12) является следующее показательно-степенное неравенство

$$f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}. \qquad (9.14)$$

Его решение сводится к решению совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < h(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 1. Решить неравенство $8 \cdot 2^{x+5} > 5$ и в ответе указать меньшее целое решение.

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$2^3 \cdot 2^{x+5} > 5,$ т. е. $2^{3+x+5} > 5,$ $2^{x+8} > 5.$

Получили неравенство I типа. Решаем логарифмированием по основанию 2. Поскольку основание степени – число 2 и 2 > 1, то знак неравенства сохраняется:

$\log_2 2^{x+8} > \log_2 5, \quad x+8 > \log_2 5, \quad x > \log_2 5 - 8.$

Получили $x \in (\log_2 5 - 8; +\infty).$ Определим, между какими последовательными целыми числами находится число $\log_2 5 - 8.$ Используя монотонность логарифма, имеем:

$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8,$ т. е. $2 < \log_2 5 < 3.$

Тогда $2 - 8 < \log_2 5 - 8 < 3 - 8.$

Следовательно, $-6 < \log_2 5 - 8 < -5.$

Число –5 – меньшее целое решение, которое принадлежит промежутку $x \in (\log_2 5 - 8; +\infty).$ Получаем ответ: $x = -5$.

Пример 2. Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+8} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{2-7x}.$

Решение. Запишем неравенство в виде

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+8} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{7x-2}.$

Получили неравенство II типа. Поскольку основание степени число $\frac{2}{3}$ и $0 < \frac{2}{3} < 1,$ то знак неравенства изменится на противоположный. Получаем неравенство:

$x + 8 \ge 7x - 2,$ т. е. $6x \le 10$ и $x \le \frac{5}{3}.$ Получили ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right].$

Пример 3. Найти сумму целых решений неравенства

$4 \cdot 4^x - 29 \cdot 10^x + 25 \cdot 25^x \le 0.$

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$4 \cdot 2^{2x} - 29 \cdot 2^x \cdot 5^x + 25 \cdot 5^{2x} \le 0.$

Разделив обе части неравенства на 5^{2x} $(5^{2x} > 0),$ получим:

$4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 29 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 25 \le 0.$

Получили квадратное неравенство относительно $\left(\frac{2}{5}\right)^x$ (неравенство III типа). Заменяем $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y$ и решаем квадратное неравенство

$4y^2 - 29y + 25 \le 0, \; 4(y-1) \cdot \left(y - \frac{25}{4}\right) \le 0.$

Его решением является $y \in \left[1; \frac{25}{4}\right],$ т. е. $\begin{cases} y \ge 1, \\ y \le \frac{25}{4}. \end{cases}$

Возвращаемся к исходной неизвестной величине:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x \ge 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x \le \frac{25}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x \ge \left(\frac{2}{5}\right)^0, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x \le \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le 0, \\ x \ge -2. \end{cases}$$

Получаем множество решений: $x \in [-2; 0]$.

Целыми решениями являются числа: $x = -2$, $x = -1$ и $x = 0$.

Их сумма равна: $-2 + (-1) + 0 = -3.$

Получаем ответ: –3.

Логарифмическим неравенством называется такое неравенство, в котором неизвестная величина содержится или под знаком логарифма, или в его основании.

Особенностью решения логарифмических неравенств является учет ОДЗ входящих в него логарифмов. В отличие от логарифмических уравнений, условия, определяющие ОДЗ, целесообразно записывать вместе с решением в одной системе, так как в ходе решения некоторые условия на ОДЗ учитываются сразу. Необходимо внимательно следить за величиной основания логарифма, так как при положительном основании логарифма, которое меньше единицы, знак неравенства меняется на противоположный.

Типы неравенств и способы их решения

Всюду далее $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – некоторые выражения с переменной.

I тип: неравенство вида

$$\log_a f(x) > b, \qquad (9.15)$$

где $a > 0$.

1. Если $0 < a < 1$, то неравенство (6.16) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b. \end{cases} \qquad (9.16)$$

2. Если $a > 1$, то неравенство (9.15) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) > a^b. \end{cases}$$

Заметим, что в этом случае первое неравенство системы (9.16) можно не решать, так как во втором неравенстве $a^b > 0$.

$$\log_{h(x)} f(x) > b. \qquad (9.17)$$

Решение неравенства (9.17) сводится к решению совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < \left(h(x)\right)^b, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) > \left(h(x)\right)^b. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенство $f(x) > 0$ во второй системе можно не решать, так как оно справедливо при выполнении двух других неравенств этой системы.

II тип: неравенство вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x). \qquad (9.18)$$

1. Если $0 < a < 1$, то неравенство (9.18) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad (9.19)$$

Неравенство $g(x) > 0$ в системе (9.19) можно не решать, так как оно выполняется при условии выполнения двух других неравенств этой системы.

2. Если $a > 1$, то неравенство (9.18) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \qquad (9.20)$$

Неравенство $f(x) > 0$ в системе (9.20) можно не решать.

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x). \qquad (9.21)$$

Поскольку в основании содержится переменная величина, то в общем случае решение неравенства (9.21) зависит от величины основания по сравнению с числом 1. Поэтому решаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<h(x)<1,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g(x),\end{cases}\\ \begin{cases}h(x)>1,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)>g(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

III тип: неравенство вида

$$F(\log_a f(x))>0, \qquad (6.22)$$

где F – некоторое выражение относительно $\log_a f(x)$.

Необходимо заменить $y=\log_a f(x)$ и решить неравенство $F(y) > 0$. Полученные в качестве решения последнего неравенства промежутки записывают в виде неравенств относительно y, а затем возвращаются к старой переменной.

Аналогично решают неравенства I – III типов, в которых вместо знака > использованы знаки ≥, <, ≤.

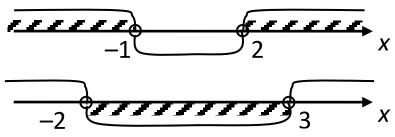
Пример 1. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>-2.$

Решение. Имеем неравенство I типа. Так как основание логарифма меньше числа 1, то решение неравенства сводится к решению системы

$$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2};\end{cases} \quad \begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-2<2^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-6<0;\end{cases} \quad \begin{cases}(x+1)(x-2)>0,\\ (x+2)(x-3)<0.\end{cases}$$

Используем далее метод интервалов.



Получаем ответ: $x\in(-2;-1)\cup(2;3).$

Пример 2. Решить неравенство $\log_x \dfrac{x+3}{x-1}>1.$

Решение. Данное неравенство относится к I типу. Поэтому решаем совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x < 1,\\ \dfrac{x+3}{x-1} > 0,\\ \dfrac{x+3}{x-1} < x^1,\end{cases}\\ \begin{cases}x > 1,\\ \dfrac{x+3}{x-1} > 0,\\ \dfrac{x+3}{x-1} > x^1.\end{cases}\end{array}\right.$$

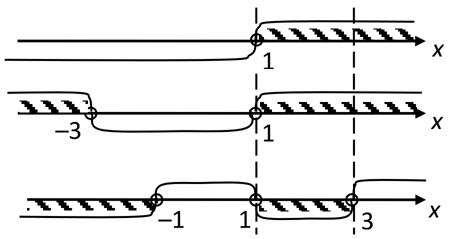
Первая система решений не имеет. Решаем вторую систему

$$\begin{cases}x > 1,\\ \dfrac{x+3}{x-1} > 0,\\ \dfrac{x+3}{x-1} > 1.\end{cases}$$

Второе неравенство этой системы не решаем, так как оно справедливо, если выполняется последнее неравенство. Получаем:

$$\begin{cases}x > 1,\\ \dfrac{x+3}{x-1} > 0,\\ \dfrac{x^2-2x-3}{x-1} < 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}x > 1,\\ \dfrac{x+3}{x-1} > 0,\\ \dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1} < 0.\end{cases}$$

Используем метод интервалов.



Получаем ответ: $x \in (1;\, 3)$.

Пример 3. Решить неравенство $\lg(3x-7) \le \lg(x+1)$.

Решение. Это неравенство II типа, причем основание логарифма больше числа 1. Поэтому решаем систему

$$\begin{cases}3x-7 > 0,\\ x+1 > 0,\\ 3x-7 \le x+1.\end{cases}$$

Получаем $\begin{cases}3x > 7,\\ x > -1,\\ 2x \le 8;\end{cases} \qquad \begin{cases}x > \dfrac{7}{3},\\ x > -1,\\ x \le 4.\end{cases}$

Подводя итог, приходим к ответу: $x \in \left(\dfrac{7}{3};\, 4\right]$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_2^3 x+\log_2^2 x-4\log_2 x-4\geq 0.$

Решение. Имеем неравенство III типа.

Заменяем $\log_2 x=y$ и решаем кубическое неравенство

$y^3+y^2-4y-4\geq 0.$

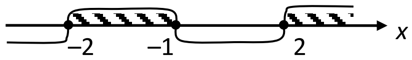
Разлагаем левую часть неравенства на множители:

$y^2(y+1)-4(y+1)\geq 0,$

$(y^2-4)\cdot(y+1)\geq 0,$

$(y+2)\cdot(y+1)\cdot(y-2)\geq 0.$

Используем далее метод интервалов.



Получили решение $y\in[-2;-1]\cup[2;+\infty).$ Записываем его в виде:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\geq -2,\\ y\leq -1,\end{cases}\\ y\geq 2.\end{array}\right.$$

Возвращаемся к неизвестной x и с учетом ОДЗ заданного неравенства имеем:

$$\begin{cases} x>0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 x\geq -2,\\ \log_2 x\leq -1,\end{cases}\\ \log_2 x\geq 2;\end{array}\right.\end{cases}\quad \begin{cases} x>0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2^{-2},\\ x\leq 2^{-1},\end{cases}\\ x\geq 2^2;\end{array}\right.\end{cases}\quad \begin{cases} x>0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq \dfrac{1}{4},\\ x\leq \dfrac{1}{2},\end{cases}\\ x\geq 4.\end{array}\right.\end{cases}$$

Получаем ответ: $x\in\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\cup[4;+\infty).$

Задания

I уровень

1.1. Установите, имеет ли уравнение корни:

1) $7^x=49;$ 2) $3^{x^2}=3^{-9};$ 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=7;$

4) $6^{\sqrt{x-2}}=6^{\sqrt{2-x}};$ 5) $\frac{1}{3^{\sqrt{x}}}=3^{-2};$ 6) $5^{x-2}=0;$

7) $2^{x+3}=-\frac{1}{2};$ 8) $5^{4x}=-5;$ 9) $\sqrt[x]{3}=9;$

10) $\sqrt[\frac{10}{x+2}]{2}=4.$

1.2. Определите, сколько корней имеет уравнение $3^x=5^x$. Как это можно установить графически?

1.3. Решите уравнение:

1) $4^x=8;$ 2) $2\cdot 4^x=16;$ 3) $3^{x+3}=81;$

4) $10^{x^2+4x+4}=1;$ 5) $\left(\frac{5}{2}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{4}\right)^x=\frac{125}{8};$ 6) $9^{|x-2|}=81;$

7) $6^{x+2}+2\cdot 6^{x+1}=288;$ 8) $7^{2x}-8\cdot 7^x+7=0;$ 9) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}};$

10) $3^x+\frac{6}{3^x}=5.$

1.4. Решите уравнение:

1) $\log_2(x^2-1)=3;$	2) $\log_{0,1}(2x^2+x)=-1;$
3) $\log_x(x+6)=2;$	4) $\log_{x+2}6=2;$
5) $\lg(3x^2+2x)=\lg(2x+12);$	6) $\log_{x+2}(x^2+2)=\log_{x+2}(x+4);$
7) $\log_{x+1}(x+2)=\log_{3-x}(x+2);$	8) $\log_9 x+2\log_3 x=5;$
9) $\log_2^2 x+2\log_2 x=-1;$	10) $\log_3^2 x-\log_9 x^2=6;$
11) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7;$	12) $\log_{x+3}\left(\dfrac{3x-11}{1-x}\right)=1;$
13) $\log_3 x=1+\log_x 9.$	

1.5. Определите, для каких значений неизвестного выполняется неравенство:

1) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-3x+1}>0;$	2) $7^{\frac{1}{x+1}}\geq 0;$
3) $3^x<0;$	4) $6^{-\sqrt{x}}>0;$
5) $\dfrac{3}{5^{\sqrt{x^2+7}}}\leq 0;$	6) $e^{\sqrt[4]{3+x^6}}>0;$
7) $\sqrt[x]{2}\geq 0;$	8) $5^{\frac{2}{x}}+3>0;$
9) $4^{\sqrt[x]{3}}+2^{\sqrt[x]{3}}+2\leq 0;$	10) $\sqrt[\frac{12}{x}]{3}>0;$
11) $e^{-\sqrt[x]{2}}+e^{\sqrt[-\frac{x}{2}]{3}}>0;$	12) $\sqrt[\frac{6}{x-1}]{e}+\sqrt[\frac{x}{3}]{\pi}\geq 0.$

1.6. Определите, принадлежит ли x = –2 множеству решений неравенства:

1) $\dfrac{2}{3^{x^2-1}}<\dfrac{1}{3^{x+1}};$	2) $5^{\sqrt{x-2}}\geq 25;$
3) $x^2-5x+2>3^{\sqrt{x-2}-1};$	4) $2^x-\dfrac{1}{2^x}<3^{x+1}.$

1.7. Решите неравенство:

1) $3^{x-1}>0;$	2) $5^{x^2-x+1}\leq 0;$
3) $\dfrac{1}{5^{\sqrt{x-7}}}<0;$	4) $7^{x^2}+7^x+3\geq 0;$
5) $2^x>4;$	6) $\left(\sqrt{3}\right)^x\leq\dfrac{1}{9};$
7) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\dfrac{1}{4};$	8) $512-2^x\geq 0;$
9) $25^{-x}>0{,}2;$	10) $343\leq\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^x;$
11) $\sqrt[8]{e^x}<e^3;$	12) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{x+3}\geq\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{x+2};$
13) $\left(\dfrac{e}{2}\right)^{x^2}\leq\left(\dfrac{e}{2}\right)^9;$	14) $\left(\dfrac{e}{3}\right)^{x^2}\leq\left(\dfrac{e}{3}\right)^4;$
15) $9^{x^2}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^2;$	16) $0{,}5^x<8^{x^2};$

17) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[7]{e^3}}\right)^{-x} < \exp e;$ 18) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right) < 0{,}1;$

19) $\sqrt[x]{5} \le 125;$ 20) $0{,}25 < \sqrt[x]{2}^{\frac{2}{x}};$

21) $\dfrac{1}{81} > \sqrt[\frac{x}{6}]{\dfrac{1}{3}};$ 22) $0{,}04 < \sqrt[x]{5}^{\frac{5}{x}};$

23) $2^{\frac{2x-1}{x}} < 4;$ 24) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-2x} < 4^3;$

25) $6^x > 13;$ 26) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > \dfrac{1}{4};$

27) $e^x \le \pi;$ 28) $(0{,}8)^{\frac{x^2-3x}{x}} - 0{,}64 > 0;$

29) $2\cdot 8^{4-5x} < \left(\dfrac{1}{16}\right)^{x+2};$ 30) $3^{x+2} + 3^{x-1} \le 28;$

31) $5\cdot 5^{2x} - 26\cdot 5^x + 5 < 0;$ 32) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} - 2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} - 3 > 0.$

1.8. Решите неравенство графически:

1) $3^x > 3;$ 2) $2^x \ge 3 - x;$ 3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x < x^2 + 1.$

1.9. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x > 6;$ 2) $\log_3 x \ge 2;$

3) $\log_2 x \le 3;$ 4) $\log_{0,25} x < -2;$

5) $\lg x \ge 0{,}5;$ 6) $\ln x < 3;$

7) $\log_5(x+3) \le 2;$ 8) $\log_{0,16}(2-x) \le -0{,}5;$

9) $\log_4(x-11)^2 > 7;$ 10) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x+1) < -4;$

11) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{x} \ge 3;$ 12) $\log_\pi \dfrac{2}{x-3} < 1;$

13) $\lg \dfrac{x+2}{x-3} \le 1;$ 14) $\ln(x^2 + 5x + 7) < 0;$

15) $\lg(2x-3) > \lg(x+1);$ 16) $\log_5(75-3x) < \log_5(x+3);$

17) $\log_{\sqrt{7}}|x+2| < 6;$ 18) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}|x-3| \ge -2;$

19) $\log_{0,001}|x^2+1| \le -\dfrac{1}{3};$ 20) $\log_2\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| > -1;$

21) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \ge -4;$ 22) $\ln|x+2| > \ln(x+2);$

23) $\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+3x+13) > -2;$ 24) $\ln(x^2 - 80\exp 2) \ge 2;$

25) $\log_{0,25}\dfrac{x^2+1}{x-3} > -0{,}5;$ 26) $\log_{81}|x-1| \ge \dfrac{1}{4};$

27) $\log_3^2 x - 9 \le 0;$ 28) $\log_{0,1}^2 x - 100 > 0;$

29) $\log_{0,5}^2(x+1) - 25 < 0;$ 30) $\log_2^2(x-3) - 81 \ge 0;$

31) $\log_2^2 x - \log_2 x \le 6;$ 32) $2\log_{0,5}^2 x - 5\log_{0,5} x - 3 > 0;$

33) $\log_x 5<1$;　　34) $\log_x 36\ge 2$;

35) $\log_x(x-1)>2$;　　36) $\log_{3x-2} x\le 1$;

37) $\lg|x|>\lg|x+3|$;　　38) $\log_{0,3}(2x-4)\ge\log_{0,3}(x+1)$;

39) $\log_{0,1}(5x+2)\le\log_{0,1}(7x+3)$;

40) $\log_{\frac{2}{3}}\left(x^2+2x+1\right)\ge\log_{\frac{2}{3}}\left(4x^2+7x+3\right)$;

41) $\log_7 x+\log_7(x+2)<\log_7(x+6)$;

42) $\log_{0,3}(x+27)-\log_{0,3}(16-2x)\ge\log_{0,3} x$;

43) $\log_9(x^2+14x+49)\le 2\log_3(x+1)$;

44) $\log_{0,49}(x^2+12x+36)\le\log_{0,7}|x-3|$.

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $3^{x-2}=5^{x^2-5x+6}$;　　2) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$;

3) $2^{3x}+8\cdot 2^x-6\cdot 2^{2x}=0$;　　4) $15\cdot 2^{x+1}+15\cdot 2^{-x+2}=135$;

5) $4\cdot 9^x+12^x-3\cdot 16^x=0$;　　6) $9^x+6^x=2\cdot 4^x$;

7) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$;　　8) $4^{x+2\sqrt{x^2-3}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-3}}=6$;

9) $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{2\lg x+2}=0$;　　10) $18^{2x}\cdot 2^{-2x}\cdot 3^{x+1}=3^{x-1}$;

11) $8^x-4^x=2^x$;　　12) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}=\frac{\sqrt[4]{5^{3x-1}}}{\sqrt{3}}$;

13) $9^{\sqrt{x^2+4x+4}}=\sqrt{3}$;　　14) $8^x+18^x=2\cdot 27^x$;

15) $5^x=3$;　　16) $2^{x-3}=3^{3-x}$.

2.2. Найдите значение выражения $\left(2+\sqrt{3}\right)^x-\left(2-\sqrt{3}\right)^x$, если $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-x}=18$.

2.3. Решите уравнение:

1) $\left(x+5\right)^{x^2-x-1}=\left(x+5\right)^{2x+3}$;　　2) $\left(7-x\right)^{x^2-7x+10}=\left(7-x\right)^{4x-14}$;

3) $|x|^{x^2-x-2}=1$;　　4) $|5x-30|^{x^2}=|30-5x|^{15-14x}$;

5) $|3x-15|^{54-3x}=|15-3x|^{x^2}$.

2.4. Решите уравнение:

1) $x^x=x$;　　2) $x^{\lg x}=1$;　　3) $x^{3\lg x}=10x^2$;

4) $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$;　　5) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;　　6) $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001$.

2.5. Решите уравнение:

1) $\log_{\log_5 x} 4=2$;

2) $\log_{x^2+x+2}(\log_{x^2-4} 3x)=0$;

3) $\log_{x^2+6x+8}\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)=0$;

4) $\frac{1}{2}\log_5(x+5)+\log_5\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\log_5\left(2x+1\right)$;

5) $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$;

6) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{2+x}{10}-\log_{\frac{1}{5}}\frac{2}{x+1}=0$;

7) $\log_{\frac{5+x}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{x+1}} 3;$

8) $\log_x^3 10 - \log_x^2 10 - 6\log_x 10 = 0;$

9) $\log_3 \log_8 \log_2 (x-1) = \log_3 2 - 1;$

10) $\log_{x^3+x}(x^2-4) = \log_{4x^2-6}(x^2-4);$

11) $\lg\frac{1}{x}\lg\frac{x}{10} = \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{8};$

12) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-2}} = (2x-2)^{\log_{\frac{1}{36}}\left(12-x-x^2\right)};$

13) $\log_{\frac{1}{2}}^2(4x) + \log_2\left(\dfrac{x^2}{8}\right) - 8 = 0;$

14) $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = \dfrac{1}{2};$

15) $\log_4 \log_2 \dfrac{x}{2} - \log_4 \log_4 x = 0;$

16) $\log_{5x}\dfrac{5}{x} + \log_5^2 x = 1;$

17) $\log_x(125\cdot x)\cdot\log_{25}^2 x = 1;$

18) $\lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25;$

19) $\log_x\left(5\sqrt{5}\right) - 1{,}25 = \log_x^2\sqrt{5};$

20) $\lg^2 x^2 = \lg|x| = 2;$

21) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

2.6. Решите неравенство:

1) $4^x - 6\cdot 2^x + 8 < 0;$

2) $2^x + 2^{2x+} - 3\cdot 2^{2x+1} > -3;$

3) $\dfrac{1}{3^x+5} \le \dfrac{1}{3^{x+1}-1};$

4) $36^x - 2\cdot 18^x + 8\cdot 9^x > 0;$

5) $2^{x^2}\cdot 5^{x^2} \le 10^{-3}\left(10^{3-x}\right)^2;$

6) $2^{2x+2} + 6^x - 2\cdot 3^{2x+2} > 0;$

7) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1};$

8) $\left(\sqrt{2}\right)^{3x} + \left(2\sqrt{2}\right)^x \ge 2\cdot 4^x;$

9) $6^x - 2^x \le 32;$

10) $\dfrac{1}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 7^{3x+2} \le \dfrac{25}{7}\cdot 7^{2x}\cdot 5^{3x};$

11) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_9\left(\frac{1}{x^2}+6+9x^2\right)} \ge \dfrac{1}{x};$

12) $\dfrac{125^x - 5^{2x+1} + 2\cdot 5^x}{\sqrt{1-x^2}} \ge 0;$

13) $3\left(\sqrt[x]{3}\right)^2 - 2\sqrt[x]{3} - 1 \ge 0;$

14) $5\sqrt[x]{0{,}16} + 3\sqrt[x]{0{,}4} - 2 \le 0.$

2.7. Решите неравенство:

1) $|4 - \log_2 x| > 2;$

2) $\dfrac{\log_2(4x-5)}{\log_2\log_5\frac{13}{4}} > 0;$

3) $x\lg x - \dfrac{2}{\log_x 10} < 0;$

4) $\log_{\left(x^2+1\right)} x^2 \le 0;$

5) $\log_{1+x}\left(5-|x|\right) \le 0;$

6) $\log_{0{,}5}\left(\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}\right) < 0;$

7) $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}>1;$ 8) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\dfrac{3x+6}{x^2+2}>0;$

9) $\log_3\log_2\log_4 x<0;$ 10) $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 x-2}<\dfrac{2}{\log_2 x+6};$

11) $\log_2 x\le\dfrac{2}{\log_2 x-1};$ 12) $\dfrac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)}\le 0;$

13) $\dfrac{\left(\log_{x-1}(5-x)\right)^2}{x^2-8x+15}\ge 0;$ 14) $\log_3 x\log_5\dfrac{x}{5}-\log_5\dfrac{25}{x^3}\le\log_3 x^2-2;$

15) $\log_3 x\log_4 x<\log_3 x^3+\log_4 x^4-12;$

16) $\log_4^2\left(6x-x^2+4\right)+3\log_{0,25}\left(6x-x^2+4\right)<-2;$

17) $\log_{\frac{1}{3}}(x+27)+\log_3(16-2x)>\log_{\frac{1}{3}}x;$

18) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+18\right)-2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)<0;$

19) $\log_3\left((x+2)\cdot(x+4)\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x};$

2) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^x+\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^x=18;$

3) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x;$

4) $\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x\cdot(0{,}125)^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2};$

5) $3\cdot\sqrt{4^x+4-2^{x+2}}=3\cdot 2^{x+1}-2^{2x}-2;$

6) $\sqrt[x]{27^{2x-1}}=\sqrt{9^{2x-1}};$

7) $\left(\sqrt{26}+5\right)^{x+4}=\left(\sqrt{26}+5\right)^{\frac{x+4}{x-6}};$

8) $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0;$

9) $\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}}=5^{\sqrt{x}-4};$

10) $3^{2x^2+6x-9}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=3\cdot 5^{2x^2+6x-9};$

11) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\dfrac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)};$

12) $\sqrt{9^x-5\cdot 3^x+4}+\sqrt{9^x-7\cdot 3^x+6}+\sqrt{3^{21x}+5\cdot 3^x-6}=0;$

13) $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}+\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x+$

$+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x=2^{1+\frac{x}{4}};$

14) $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8;$

15) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{\sin x}=\dfrac{10}{3};$

16) $26^x-\left(6+\sqrt{10}\right)\cdot\left(6-\sqrt{10}\right)^x-\left(6-\sqrt{10}\right)\cdot\left(6+\sqrt{10}\right)^x+26=0.$

3.2. Найдите сумму корней уравнения:

1) $\left(|x|-1\right)\log_{|x|}\left(x^2+12\right)=4;$ 2) $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}.$

3.3. Решите уравнение:

1) $\log_2\left(9-2^x\right)=10^{\lg(x-3)};$

2) $\log_x\log_9\left(3^x-9\right)=1;$

3) $\log_{0,5}\left(2+\log_5\left(3^x-2\right)\right)=-2;$

4) $\log_3\left(\log^2_{\frac{1}{2}}x-3\log_{0,5}x+5\right)=2;$

5) $\log_3\left(3^x-1\right)\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x+2}-9\right)=-3;$

6) $\log_3\left(2^x-1\right)+\log_3\left(2^x-3\right)=1;$

7) $\log^2_3\left(4^x-3\right)+\log_3\left(4^x-3\right)-2=0;$

8) $x\log_2 x^2+1=2x+\log_2 x.$

3.4. Решите уравнение:

1) $\log_{1+x^2}\left(\sqrt[4]{x}+x^2+2x+1\right)=\log_{1+x^2}\left(\sqrt[4]{x}-x^3+4x+1\right);$

2) $\log_{\left(x^2-6\right)}(x^2-11x+19)=\log_{\left(x^2-11\right)}\left(x^2-11x+19\right);$

3) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4;$

4) $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}\left(x^2+4x-2\right)=\log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}\left(x^2+4x-3\right);$

5) $\log_{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}\left(x^2-6x+4\right)-\log_{2+\sqrt{5}}\left(x^2-6x+1\right)=0;$

6) $x\log_2\left(x^2\right)+1=2x+2\log_4 x;$

7) $\sqrt{4+2\log_2\left(1-\dfrac{8x}{(2x+1)^2}\right)}=\log_2\dfrac{2x+1}{2x-1}+2\log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right);$

8) $\left|\log_2(4x+9)\right|=\log_2\left(1+|x+2|\right)+\log_2\left(1-|x+2|\right);$

9) $\log_{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}\dfrac{5x+1}{x-2}+\log_{\frac{5x+1}{x-2}}\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|=\dfrac{3}{2}.$

3.5. Решите неравенство:

1) $5^{\log_5(x-7)}<4;$ 2) $25^{\log_{0,1}\log_5\left(-\frac{1}{x}\right)}<1;$

3) $5^{\lg\left(\frac{1}{x}\right)}>0,2^{2\lg 2};$ 4) $0,3^{\frac{6\log_2 x-3}{\log_2 x}}\le\sqrt[3]{0,027^{2\log_2 x-1}};$

5) $0,2^{\log^2_2(-x)+3}\le 5^{2\log_2 x^2};$ 6) $x^{\sqrt{\log_2\sqrt{x}}}>2;$

7) $x^{\lg x}\le 100x;$ 8) $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000;$

9) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{\log_3 x-2}>9;$ 10) $x^{\log^2_{0,5}x}+x^{\log_{0,5}x}\le 2,5;$

11) $(x-3)^{x^2-5x+6}\ge 1;$ 12) $x^{0,5\log_{0,2}x-3}\le 0,2^{3-2,5\log_{0,2}x}.$

3.6. Решите неравенство:

1) $\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)^{x-\sqrt{x}} > \left(3-\sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{2}^{\left|\left|x+3\right|+1\right|} < 64$;

3) $\sqrt{2^{x^2+2x-10}} \geq \left(\sqrt{33+\sqrt{128}}-1\right)^{x}$;

4) $\dfrac{1}{7^{\frac{1}{x}+2}} < 4$;

5) $3^{-\left|x-5\right|}\cdot\log_2\left(10x-x^2-23\right)\geq 1$;

6) $\dfrac{1}{5^{\frac{1}{x}+3}} \leq 2.$

3.7. Решите неравенство:

1) $\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\left(x^2+4x+11+4\sqrt{3}\right)< 2$;

2) $\log_{8x-12x^2} 8^{-x} > 0$;

3) $\log_{0,5}\left(\log_2^2 x-3\log_2 x+4\right)>-1$;

4) $\dfrac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\dfrac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\leq 0$;

5) $\log_2\left(3^x-1\right)+\log_2\left(3^x-2\right)>1$;

6) $\left(4^{-x}+3\cdot 2^x\right)^{\log_7 x+\log_x 7-2}\leq 1$;

7) $\log_{\frac{x}{3}} 27\geq\left(1+\dfrac{2}{1-\log_3 x}\right)\log_{\frac{x}{27}} 9$;

8) $\log_2 x^x-3\log_2\dfrac{x}{2}\geq x$;

9) $\log_2\left(2^x-1\right)\log_{0,5}\left(2^{x+1}-2\right)>2$;

10) $\log_x\log_3\left(9^x-6\right)\geq 1.$

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Математика в примерах и задачах. Часть 1: учебное пособие / Л. И. Майсеня, А. А. Ермолицкий, И. Ю. Мацкевич [и др.] ; под редакцией Л. И. Майсеня. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 359 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35494.html.

Перечень дополнительной литературы

1.Чулков, П. В. Практические занятия по элементарной математике: учебное пособие / П. В. Чулков. — Москва: Прометей, 2012. — 102 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/18603.html.

2. Нестандартные задачи по математике (для подготовки студентов к олимпиадам): учебное пособие / Ю. А. Чиркунов, Ю. М. Вахромеев, Т. В. Вахромеева [и др.]. — Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), ЭБС АСВ, 2017. — 109 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/85877.html