МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Корректирующий курс по математике (часть 1)

Направление подготовки	08.03.01 Строительство
Профиль	Строительство зданий и сооружений
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная
Учебный план	2020г
Изучается	в 1 семестре

Пятигорск, 2020г.

1.ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ

Содержание практических занятий соответствует темам теоретического курса «Корректирующий курс по математике» и способствует углублению знаний и получению практических навыков по выполнению необходимых вычислений и расчетов, пройденных в школьном курсе математики.

Задачи освоения дисциплины: повторение и систематизация знаний курса математики средней школы.

Целью проведения практических занятий по дисциплине является развитие логического и алгоритмического мышления, формирование полной системы знаний по основным разделам школьного курса математики, необходимых студентам как для освоения базовых и специальных дисциплин, так и для дальнейшей самостоятельной работы.

В ходе практического занятия студент учится логично, ясно, четко, грамотным математическим языком излагать свои мысли, приводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На занятии студент опирается на свои конспекты, сделанные на лекции, собственные выписки из учебников и словарно-справочную литературу.

2. НАИМЕНОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ Темы	Наименование работы	Обьем часов	Форма проведения
1 семестр			
1	Множества и операции над ними. Числовые множества. Некоторые обозначения.	1,5	
2	Понятие комплексного числа, формы его записи, действия над комплексными числами.	1,5	
3	Формулы сокращенного умножения. Бином Ньютона.	1,5	
4	Многочлены. Действия над многочленами.	1,5	
5	Алгебраические уравнения высших степеней.	1,5	
6	Дробно-рациональные уравнения. Уравнения с модулем.	1,5	
7	Алгебраические неравенства.	1,5	
8	Тригонометрические уравнения и неравенства.	1,5	
9	Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.	1,5	
	Итого за 1 семестр	*13,5*	

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие 1. Множества и операции над ними. Числовые множества. Некоторые обозначения.

Цель занятия: систематизировать умение выполнять операции над множествами и применять полученные умения при решении задач.

Теоретическая часть:

Множество – первичное неопределяемое понятие. Обозначают множества прописными латинскими буквами $A, B, C, X, \ldots$. Под множеством понимают совокупность (группу, набор и т. д.) элементов, которые характеризуются одинаковыми свойствами.

Множества изображают ***диаграммами (кругами) Эйлера-Венна*** (рис. 1.1).

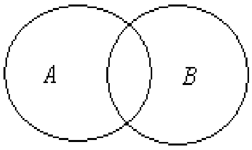


Рис. 1.1

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$; если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$.

Множество может задаваться с указанием его характеристического свойства. Например, если A состоит из элементов x, для которых выполняется свойство $P(x)$, то пишут $A = \{x \mid P(x)\}$.

Если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то множество A называется ***подмножеством*** множества B (или говорят, что A ***включено в*** B), пишут $A \subset B$ (или $B \supset A$) (рис. 1.2). Два множества A, B называются ***равными*** ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$. Множество, которое не имеет элементов, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$.

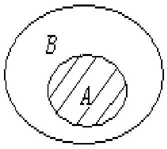
К основным операциям над множествами относят пересечение, объединение, разность, дополнение.

Пересечением множеств A, B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (рис. 1.3).

Объединением множеств A, B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A, или множеству B (хотя бы одному из множеств A, B) (рис. 1.4).

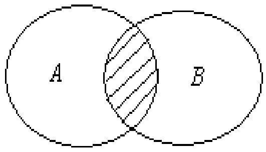
Разностью множеств $A \backslash B$ называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B (рис. 1.5).

Дополнением множества A до конкретного (универсального) множества U называется множество $\overline{A}$, которое определяется равенством $\overline{A} = U \setminus A$ (рис. 1.6).



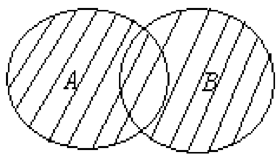
$A \subset B$

Рис. 1.2



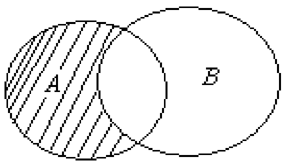
$A \cap B$

Рис. 1.3



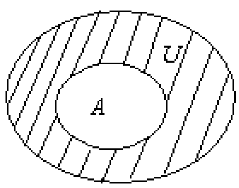
$A \cup B$

Рис. 1.4



$A \backslash B$

Рис. 1.5



$\overline{A}$

Рис. 1.6

Для произвольных множеств A, B, C справедливы свойства:

1) $A \cup B = B \cup A$ - коммутативность объединения;
2) $A \cap B = B \cap A$ - коммутативность пересечения;
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ - ассоциативность объединения;

4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ - ассоциативность пересечения;
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ - дистрибутивность;
6) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
7) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
8) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
9) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть $m(A), m(B)$ – количество элементов множеств A и B соответственно, тогда справедлива формула

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \qquad (1.1)$$

Рассматривают следующие числовые множества:
1) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ - ***множество натуральных чисел***;
2) $\mathbf{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ - ***множество целых чисел***;
3) **Q** – ***множество рациональных чисел***: это множество всех обыкновенных дробей, т. е. чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$.

Множество **Q** определяется также, как множество всех бесконечных десятичных периодических дробей;

4) **I** – ***множество иррациональных чисел***: это множество всех бесконечных десятичных непериодических дробей;
5) **R** – ***множество действительных чисел***: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Верны соотношения:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$.

Произведение первых n натуральных чисел называется ***факториалом***, для него введен специальный символ:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.

По определению принимают 0! = 1.

Для всякого $x \in \mathbf{R}$ определены следующие понятия:

$\lfloor x \rfloor$ - ***целая часть*** (антье) числа x, определяется как целое число такое, что
$\lfloor x \rfloor \le x \le \lfloor x \rfloor + 1$;

$\{x\}$ - ***дробная часть*** (мантисса), определяется равенством
$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$;

$\operatorname{sign} x$ – ***знак числа*** (сигнум), определяется следующим образом:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ åñëè } x > 0, \\ 0, \text{ åñëè } x = 0, \\ -1, \text{ åñëè } x < 0. \end{cases}$$

Если $a_1, a_2, ..., a_n$ некоторые действительные числа, то ***сумму*** этих величин обозначают с использованием ***знака суммы***:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

где k – ***индекс суммирования***.

Свойства суммы:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{p=1}^{n} a_p$ – сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования;

2) $c \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (c \cdot a_k), c = const$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$;

4) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$ – свойство сдвига индекса суммирования.

Пример 1. Доказать равенство

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

Доказательство. Пусть $x \in A \setminus (A \setminus B)$. Согласно определению разности, получаем $x \in A$ и $x \notin (A \setminus B)$. Поскольку выполняются оба эти условия, то это возможно только в случае $x \in B$. Получаем, что $x \in A$ и $x \in B$, т. е. $x \in A \cap B$. Этим мы доказали, что

$$(A \setminus (A \setminus B)) \subset (A \cap B).$$

Допустим, что $x \in (A \cap B)$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$, но это означает, что $x \notin (A \setminus B)$. Два условия $x \in A$ и $x \notin (A \setminus B)$, которые имеют место, означают, что $x \in (A \setminus (A \setminus B))$, т. е.

$$(A \cap B) \subset (A \setminus (A \setminus B)).$$

Равенство доказано.

Пример 2. На первом курсе учатся 200 студентов. Из них своевременно сдали зачет по математике 175 человек, а по физике – 185 человек. Не сдали зачет ни по математике, ни по физике 10 человек. Сколько студентов сдали оба зачета?

Решение. Пусть A – множество всех студентов курса; B – множество студентов, которые сдали зачет по математике, C – по физике (рис. 1.7).

Согласно условию задачи, $m(A) = 200$, $m(B) = 175$, $m(C) = 185$, $m(A \setminus (B \cup C)) = 10$ и надо найти $A \cap B$.

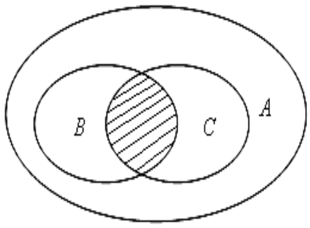


Рис. 1.7

Находим, сколько человек сдали хотя бы один зачет:

$$m(A \cup B) = m(A) - m(A \setminus (B \cup C)) = 200 - 10 = 190.$$

Используем далее формулу (1.1), из которой выражаем

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B).$$

Получаем

$$m(A \cap B) = 185 + 175 - 190 = 170.$$

Пример 3. Сократить дробь

$$\frac{(2n-1)! + (2n)!}{(2n+1)!}.$$

Решение. Выделим общий множитель в числителе и знаменателе. Очевидно, что

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n = (2n-1)!2n;$$

$$(2n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1) = (2n-1)!(2n)(2n+1).$$

Поэтому

$$\frac{(2n-1)! + (2n)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n-1)!(1+2n)}{(2n-1)!(2n)(2n+1)} = \frac{1}{2n}.$$

Пример 4. Вычислить сумму

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!}.$$

Решение. Получим последовательно слагаемые, придавая значения 1, 2, …, 7:

$$\sum_{n=1}^{7}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^{\left[\frac{1}{2}\right]}}{0!}+\frac{(-1)^{[1]}}{1!}+\frac{(-1)^{\left[\frac{3}{2}\right]}}{2!}+\frac{(-1)^{[2]}}{3!}+\frac{(-1)^{\left[\frac{5}{2}\right]}}{4!}+\frac{(-1)^{[3]}}{5!}+$$

$$+\frac{(-1)^{\left[\frac{7}{2}\right]}}{6!}=\frac{(-1)^{0}}{0!}+\frac{(-1)^{1}}{1!}+\frac{(-1)^{1}}{2!}+\frac{(-1)^{2}}{3!}+\frac{(-1)^{2}}{4!}+\frac{(-1)^{3}}{5!}+\frac{(-1)^{3}}{6!}=$$

$$=1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}-\frac{1}{720}.$$

Вычисляя, приходим к ответу

$$\sum_{n=1}^{7}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{(n-1)!}=-\frac{217}{720}.$$

Задания

I уровень

1.1. Пусть $A=[-2,3]$, $B=(-\infty,0)$, $C=[0,4)$. Найдите множество:
1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $B\cup C$; 4) $B\cap C$;
5) $(A\cup B)\cap C$; 6) $A\cup(B\cap C)$; 7) $A/(B\cap C)$.

1.2. Пусть A – множество натуральных делителей числа 15; B – множество простых чисел, меньших 10; C – множество четных чисел, меньших 9. Найдите множество:
1) $A\cup B$; 2) $A\cap B$; 3) $B\cap C$;
4) $(A\cup C)\cap B$; 5) $A\cup(C\cap B)$; 6) $A\cap B\cap C$.

1.3. В группе учатся 28 студентов, каждый из которых умеет кататься на лыжах или коньках. При этом 20 человек умеют кататься на лыжах, 15 человек – на коньках. Определите, сколько студентов умеют кататься и на коньках, и на лыжах.

1.4. Задано некоторое количество натуральных чисел, которые кратны или числу 2, или числу 3. Известно, что числу 2 кратны 10 чисел; числу 3 кратны 7 чисел; и числу 2, и числу 3 кратны 4 числа. Определите общее количество заданных чисел.

1.5. Все 25 человек класса сходили в театр или кино. Известно, что 20 человек были в кино, 10 человек – и в театре, и в кино. Сколько человек было в театре?

1.6. Вычислите:
1) $3!+2!$; 2) $\frac{5!}{3!}$; 3) $\frac{(2\cdot 3)!}{2\cdot 3!}$; 4) $\frac{(5-2)!}{5!-2!}$.

1.7. Сократите дробь:
1) $\frac{(n+1)!}{2\cdot n!}$; 2) $\frac{(2n)!}{(2n+1)!}$.

1.8. Определите целую и дробную части числа:
1) 1,02; 2) –1,2; 3) $\frac{3}{2}$;
4) $\frac{3}{28}$; 5) –5,2; 6) 3,25.

1.9. Вычислите выражение:

1) $\{2{,}8\} + 3\{-2{,}8\} - 2\{2{,}25\}$; 2) $\dfrac{\{6{,}25\}}{[5{,}25]} + [-7{,}08]$.

1.10. Запишите сумму, указав каждое слагаемое, и вычислите ее:

1) $\sum\limits_{n=1}^{5} \dfrac{1}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{6} \dfrac{(-1)^n}{n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{4} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

II уровень

2.1. Запишите, с помощью каких операций над множествами *A, B, C* получено заштрихованное множество на рис. 1.8:

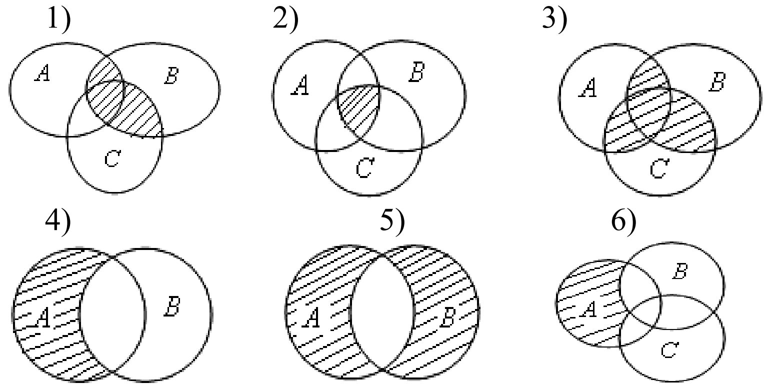


Рис. 1.8

2.2. Пусть $A = (-\infty; 2]$, $B = [-3; 5)$ – подмножества универсального множества U = **R**. Найдите множество:

1) $A \cup \overline{B}$; 2) $\overline{A} \cap B$; 3) $\overline{A \cup B}$; 4) $\overline{A} \cap \overline{B}$.

2.3. Заданы множества:

$A = \{a_n \mid a_n = 2n, n \in \mathbf{N}\}$; $B = \{b_n \mid b_n = 4n - 2, n \in \mathbf{N}\}$;

$C = \{c_n \mid c_n = 4n + 2, n \in \mathbf{N}\}$.

Найдите множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \setminus C$;

4) $A \setminus B$; 5) $A \cap B \cap C$; 6) $A \cup B \cup C$.

2.4. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах, и на коньках?

2.5. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский, 45 французский и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

2.6. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

2.7. В первом туре олимпиады участвовали 100 студентов, из них 70 человек получили право участвовать во втором туре олимпиады по физике, 45 – по математике. Известно, что 23 человека могут участвовать во втором туре и по физике, и по математике. Сколько студентов не допущено ко второму туру ни по физике, ни по математике?

2.8. Сравните дроби:

1) $\dfrac{(2n)!-(2n-2)!}{(2n-1)!}$ и $\dfrac{(2n)!+(2n-2)!}{(2n+2)!}$;

2) $\dfrac{(2n-1)!+(2n+1)!}{n(2n)!}$ и $\dfrac{(2n)!+n^2(2n-1)!}{(2n+2)!}$.

2.9. Сократите дробь и упростите полученное выражение:

1) $\dfrac{(n-1)!+3n!}{(n+1)(n-1)!-(n-2)!}$; 2) $\dfrac{(n-1)!+(n-3)!}{2n^2(n-3)!+(n-2)!}$;

3) $\dfrac{2nn!-3(n-1)!}{(n+1)!-4n!}$; 4) $\dfrac{(2n)!+(2n+2)!}{(2n-2)!-(2n)!}$.

III уровень

3.1. Для универсального множества **R** рассматриваются подмножества $A=\{x|\ x^2-4\le 0,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x|\ x^2-6x+5>0,\ x\in\mathbf{R}\}$. Найдите множество:

1) $A\cap\overline{B}$; 2) $\overline{A\cup B}$; 3) $\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\setminus B$.

3.2. Докажите включение:

1) $\big((A\cup B)\setminus C\big)\subset\big(A\cup(B\setminus C)\big)$;

2) $\big((A\cap B)\setminus C\big)\subset\big((A\cup B)\setminus C\big)$.

3.3. Докажите равенство:

1) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$;

2) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

Практическое занятие 2. **Понятие комплексного числа, формы его записи, действия над комплексными числами.**

Цель занятия: систематизировать умение выполнять действия над комплексными числами и применять полученные умения при решении задач.

Теоретическая часть:

Число вида

$$z=a+ib, \tag{2.1}$$

где a, $b\in\mathbf{R}$, i – ***мнимая единица***, определяемая равенством $i^2=-1$, называется ***комплексным числом.***

Число a называется ***действительной частью*** комплексного числа z и обозначается $a=\operatorname{Re}z$; b называется ***мнимой частью*** комплексного числа z и обозначается $b=\operatorname{Im}z$. Запись комплексного числа в виде (2.1) называется ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Если $a=0,\ b\neq 0,$ то комплексное число называется ***чисто мнимым***; при $b=0$ получается действительное число.

Множество всех комплексных чисел обозначают **C**. Имеет место: $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

В прямоугольной декартовой системе координат комплексное число $z=a+ib$ изображается точкой M с абсциссой a и ординатой b (рис. 2.1). Между множеством всех точек координатной плоскости и множеством всех комплексных чисел существует взаимно-однозначное соответствие. Координатная плоскость называется ***комплексной плоскостью***. Ось абсцисс называется ***действительной осью***, ось ординат – ***мнимой осью***.

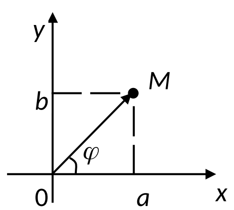


Рис. 2.1

Длина радиус-вектора точки M называется ***модулем*** комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Угол φ, образованный этим вектором с положительным направлением действительной оси Ox, называется ***аргументом*** числа z. Связь между аргументом φ комплексного числа и его действительной и мнимой частью выражается формулами:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно: если φ – аргумент числа z, то $\varphi + 2\pi k$ – также аргумент этого числа при любом целом k. Для однозначности определения аргумента его выбирают в пределах $-\pi < \varphi \le \pi$ $\left(\text{èëè } \left[0;\, 2\pi\right)\right)$, такое значение аргумента называют ***главным*** и обозначают $\arg z$. Всюду далее будем рассматривать главное значение аргумента: $\varphi = \arg z$.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются ***равными***, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Если $z = a + ib$, то число $z = a - ib$ называется ***сопряженным*** числу z и обозначается $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib.$$

Сопряженные числа в системе координат изображаются точками, симметричными относительно оси Ox.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i; \qquad (2.2)$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i; \qquad (2.3)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \qquad (2.4)$$

Формулы (2.2)–(2.4) показывают, что операции сложения, вычитания и умножения выполняются аналогично таким же действиям над многочленами (с учетом $i^2 = -1$ при умножении).

Для нахождения частного комплексных чисел z_1 и z_2 сначала числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножают на сопряженное знаменателю число $\overline{z_2} = a_2 - ib_2$, а затем производят остальные действия:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2-(b_2i)^2}= \qquad (2.5)$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Свойства комплексно-сопряженных чисел:

1) $z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$; 2) $\overline{(\overline{z})}=z$;

3) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$; 4) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; 6) $z=\overline{z}\Leftrightarrow \operatorname{Im} z=0.$

Пример 1. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если

1) $z=2$; 2) $z=-3i$; 3) $z=1-i+\sqrt{3}.$

Решение. 1) Так как $z=2+0i$, то $\operatorname{Re} z=2$, $\operatorname{Im} z=0.$

2) Поскольку $z=0-3i$, $\operatorname{Re} z=0$, $\operatorname{Im} z=-3.$

3) Запишем число в стандартном виде: $z=(\sqrt{3}+1)-i.$ Поэтому $\operatorname{Re} z=\sqrt{3}+1$, $\operatorname{Im} z=-1.$

Пример 2. Даны комплексные числа $z_1=-2+i$ и $z_2=3+i.$ Найти:

1) z_1+z_2; 2) z_2-z_1; 3) $z_1\cdot z_2$; 4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. 1) $z_1+z_2=-2+i+3+i=(-2+3)+i(1+1)=1+2i.$

2) $z_2-z_1=3+i-(-2+i)=(3-(-2))+i(1-1)=5+0i=5.$

3) Перемножим числа z_1 и z_2:

$z_1\cdot z_2=(-2+i)(3+i)=(-2\cdot 3-1\cdot 1)+(-2\cdot 1+3\cdot 1)i=-7+i.$

4) Для нахождения частного $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-2+i}{3+i}$ умножим числитель и знаменатель дроби на $3-i$ (т. е. на число, сопряженное знаменателю). Тогда получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(-2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{-6+2i+3i-i^2}{3^2+1^2}=\frac{-5+5i}{4}=-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}i.$$

Пример 3. Найти число, сопряженное числу $z=\frac{2-i}{3+i}+3.$

Решение. Умножив числитель и знаменатель дроби на $3-i$, получим

$$z=\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}+3=\frac{6-2i-3i-1}{9+1}+3=\frac{5-5i}{10}+3=$$
$$=\frac{5}{10}-\frac{5}{10}i+3=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Тогда $\overline{z}=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i.$

Пример 4. Вычислить i^n для $n\in\mathbf{N}$.

Решение. При вычислении используем, что, согласно определению, $i^2=-1.$ Тогда

$i^1=i$; $\qquad i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$;

$i^2=-1$; $\qquad i^6=-1$;

$i^3 = i^2 \cdot i = -i;$ $\quad$ $i^7 = -i;$

$i^4 = (i^2)^2 = 1;$ $\quad$ $i^8 = 1.$

Очевидно, что значения степени повторяются циклически:

$i^{4m+1} = i^{4^m} \cdot i = i;$

$i^{4m+2} = i^{4^m} \cdot i^2 = -1;$

$i^{4m+3} = i^{4^m} \cdot i^3 = -i;$

$i^{4m+4} = i^{4^m} \cdot i^4 = 1,$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Пример 5. Найти множество точек, для которых $\operatorname{Re} z = 5.$

Решение. Поскольку $\operatorname{Re} z = x,$ точки искомого множества лежат на прямой $x = 5,$ параллельной мнимой оси (рис. 2.2).

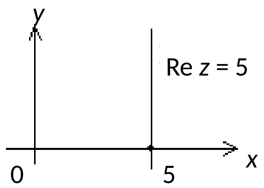


Рис. 2.2

Пример 6. Показать на координатной плоскости множество всех точек, которые находятся на расстоянии, равном 3, от точки $z_0 = 2 - i.$

Решение. Пусть $z = x + iy$ – одна из искомых точек. На плоскости ей соответствует точка с координатами $(x, y).$ Точке z_0 соответствует точка плоскости с координатами $(2, -1).$ В качестве решения задачи подходят все точки, для которых

$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 3,$ т. е. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9.$

Полученному уравнению соответствует множество точек окружности с центром в точке $(2, -1)$ и радиусом 3 (рис. 2.3).

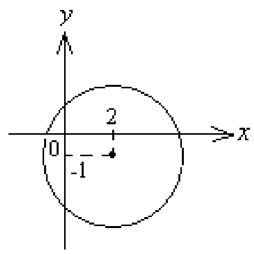


Рис. 2.3

Запись комплексного числа в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (2.6)$$

называется ***тригонометрической формой комплексного числа***.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Тогда для произведения $z_1 \cdot z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$ справедливы формулы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \qquad (2.7)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right). \qquad (2.8)$$

Для комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ справедлива ***формула Муавра***:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in\mathbf{N}. \qquad (2.9)$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w такое, что $w^n=z$.

Корень n-й степени из комплексного числа

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

имеет ***n*** различных значений, которые находят по формуле

$$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (2.10)$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня.

Все значения корня $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$, $k=\overline{0,\ n-1}$, расположены на окружности с центром в начале системы координат и радиусом $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного вписанного в окружность n-угольника.

Соотношение

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (2.11)$$

называется ***формулой Эйлера***.

Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме. Используя формулу Эйлера (2.11), можно записать:

$$z=re^{i\varphi}. \qquad (2.12)$$

Такая форма записи называется ***показательной формой*** комплексного числа.

Правила действий над комплексными числами в показательной форме

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z^n=r^n\cdot e^{in\varphi};$$

$$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ \text{где}\ k=\overline{0;\ n-1}.$$

Задания

I уровень

1.1. Укажите действительную и мнимую часть комплексного числа:

1) $-2-3i$; 2) $-i+\sqrt{5}$; 3) $-6i$; 4) $1+\sqrt{3}-(\sqrt{5}+1)i$.

1.2. Найдите сумму и произведение комплексных чисел:

1) $z_1=1+2\sqrt{6}i$ и $z_2=1-2\sqrt{6}i$;

2) $z_1=4-3i$ и $z_2=2+i$;

3) $z_1=0{,}2+2i$ и $z_2=-0{,}3+3i$.

1.3. Найдите разность и частное комплексных чисел:

1) $z_1=2+2i$ и $z_2=1-i$;

2) $z_1=2\sqrt{5}+\sqrt{6}i$ и $z_2=2\sqrt{5}-\sqrt{6}i$;

3) $z_1=2i$ и $z_2=1+i$.

1.4. Найдите действительную часть комплексного числа:

1) $(5-6i)(-10+8i)$; 2) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$;

3) $\dfrac{4}{1-3i}$; 4) $\dfrac{(3+4i)(-1+3i)}{6-8i}$.

1.5. Найдите мнимую часть комплексного числа:

1) $(4-6i)\cdot 0{,}5i$; 2) $\dfrac{4-5i}{-2+7i}$; 3) $\dfrac{-4+6i}{(2+i)(3-2i)}$.

1.6. Выполните действия:

1) $i^3\cdot i^{81}$; 2) $\dfrac{1}{i^3}$; 3) i^{235};

4) $\dfrac{1}{i^8}-\dfrac{2-i}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$; 5) $(1-6i)(1+2i)^2-i^{12}$.

1.7. Определите, при каких действительных значениях *x* и *y* равны комплексные числа:
1) $z_1=x^2+3y+i$ и $z_2=xi+y$; 2) $4y+x^2i=4i+2y+x$.

1.8. Проверьте справедливость равенства $z=\left(2-\dfrac{z+1}{z+7}\right)^2$ при условии $z=3+4i$.

1.9. Представьте число в тригонометрической и показательной формах, изобразите его на плоскости:
1) $z=-2i$; 2) $z=8-8\sqrt{3}i$; 3) $z=1{,}5\sqrt{3}+1{,}5i$;
4) $z=12$; 5) $z=\left(\sqrt{5}-2\right)i$; 6) $z=-10+10i$.

1.10. Представьте комплексное число в алгебраической форме:

1) $z=2\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$; 2) $z=5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $z=-\sqrt{2}i\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

1.11. Используя тригонометрическую формулу комплексного числа, выполните действия:

1) $\left(-3+\sqrt{3}i\right)\cdot\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\left(-4+4\sqrt{3}i\right)\cdot\left(2+2\sqrt{3}i\right)$;

3) $\dfrac{-2+2\sqrt{3}}{1-i}$; 4) $\dfrac{8i}{2+2\sqrt{3}i}$;

5) $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}i\right)\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{i\sqrt{6}}{4}\right)$; 6) $\dfrac{\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}-i}$;

7) $\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{23\pi}{45}+i\sin\dfrac{25\pi}{45}\right)\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{22\pi}{45}+i\sin\dfrac{22\pi}{45}\right)$.

1.12. Возведите в степень:

1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{18}+i\sin\dfrac{\pi}{18}\right)^9$; 2) $\left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{18}\right)\right)^8$;

3) $(2+2i)^5$; 4) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{10}$.

1.13. Представив комплексные числа $z_1=-1-i$, $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $z_3=1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме, вычислите $\frac{4z_1 \cdot z_3}{z_2}$.

1.14. Вычислите корни из комплексных чисел и дайте геометрическую интерпретацию их значений:

1) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$; 2) $\sqrt[3]{27i}$; 3) $\sqrt{-1-i}$; 4) $\sqrt{-6+6\sqrt{3}i}$;

5) $\sqrt[3]{-125}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{-i}{8}}$; 7) $\sqrt{4-4i}$; 8) $\sqrt[3]{-i}$.

1.15. Выполните действия, результат запишите в алгебраической форме:

1) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{100}$; 2) $\frac{\left(\sqrt{2}(1+i)\right)^4}{1+2i}$;

3) $\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$; 4) $\left(\frac{2\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)}{\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)}\right)^3$;

5) $\frac{\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^6}{1-i}$; 6) $\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}{1+3i}$.

1.16. Решите уравнение:

1) $z^2 - 3z + 4 = 0$; 2) $z^3 - 1 = 0$;

3) $2z^2 + 8 = 0$; 4) $z^2 + z + 1 = 0$;

5) $\frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{4-3i}{2}\right)z + 2 - 3i = 0$.

II уровень

2.1. Укажите действительную и мнимую часть комплексного числа:

1) $(1-i)(1+i)\sqrt{3}$; 2) $\frac{2+2i}{i} + 2$;

3) $\frac{6-4i}{(3-2i)(1-i)} + i^3$; 4) $\frac{(1+i)^2}{1-\sqrt{3}i}$;

5) $\frac{(4-i)^2 - (5-2i)^2}{i^{11}}$.

2.2. Выполните действия:

1) $\frac{5+12i}{8-6i} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}$; 2) $(3+i)^3 - (3-i)^3$;

3) $\frac{(m+ni)(n+mi)}{n-mi}$; 4) $\frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{1}{i^{10}}$;

5) $\frac{(1+i)^3 - (1-i)^3}{(1+i)^2 - (1-i)^2}$; 6) $(1+i)^4 - \frac{4-i}{2+i}$;

7) $(2i)^3 + \frac{\sqrt{3}-i}{1-2i}$.

2.3. Представьте число в тригонометрической и показательной формах:

1) $z = \frac{2-i}{1+i}$; 2) $z = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$;

3) $z = -0{,}5\sqrt{3} - 0{,}5i$; 4) $z = (1+2i)\cdot(1-i)$;

5) $z = 6\left(\sin\frac{2\pi}{3} + i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$; 6) $z = 1 - \sqrt{3}$.

2.4. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 1 - i$. Представив их в тригонометрической форме, вычислите:

1) $5z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_2}{2z_1}$; 3) $-\frac{z_1^3}{z_2}$; 4) $\bar{z}_2^6$.

2.5. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, выполните действия:

1) $\left(-2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}i\right)^3 \cdot (1+i)^2$; 2) $(1-i)^2\left(0{,}25 - 0{,}25\sqrt{3}i\right)^3$;

3) $\dfrac{4\left(\cos\frac{7\pi}{30} + i\sin\frac{7\pi}{30}\right)}{\left(\cos\frac{17\pi}{60} + i\sin\frac{17\pi}{60}\right)^2}$; 4) $\dfrac{4\sqrt{3} - 4i}{(-1+i)\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}i\right)}$.

2.6. Возведите в степень, результат запишите в алгебраической форме:

1) $\left(\frac{1+i}{-1-i}\right)^{20}$; 2) $\left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{100} \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\frac{1}{\left(\sqrt{3} - i\right)^{12}}$; 4) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$.

2.7. Вычислите корни, а результат изобразите на комплексной плоскости:

1) $\sqrt[4]{16i}$; 2) $\sqrt[4]{-4}$; 3) $\sqrt[5]{-1+i}$;

4) $\sqrt[6]{2 - 2i\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$; 6) $\sqrt[6]{-64i}$.

2.8. Решите уравнение:

1) $z^2 - 64i = 0$; 2) $z^4 + 4 = 0$;

3) $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$; 4) $z^2 + 4iz + 6(2 - 5i) = 0$;

5) $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$; 6) $z^2 - (8+3i)z + 13(1+i)$;

7) $z^2 + (1+i)z + 2^{\frac{i}{2}} = 0$.

2.9. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, для которых:

1) $\frac{\pi}{6} < \arg(z+1) \le \frac{\pi}{4}$; 2) $1 \le |z + 1 - i| \le 2$;

3) $\begin{cases} 0 < \operatorname{Im}(z + 2i) \le 1, \\ \operatorname{Re} z > -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 0 \le \arg(z - 1 + 2i) \le \frac{3\pi}{4}, \\ \operatorname{Im}(z + i) \ge 1; \end{cases}$

5) $|z+1| + |z-i| > 2$; 6) $\begin{cases} \arg z = \frac{\pi}{4}, \\ |z - 1 - i| = 2. \end{cases}$

III уровень

3.1. Найдите мнимую часть комплексного числа:

1) $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{11} + 4$; 2) $z = (1-2i)^6 - (1+2i)^6$.

3.2. Найдите действительную часть комплексного числа:

1) $i^{81}+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 2) $\frac{5i-2}{3i+1}+i+\frac{8i-3}{2-i}$.

3.3. Считая *x* и *y* действительными числами, решите уравнение:

1) $(-1+2i)x-(1-4i)y=2-i$;

2) $(2-7i)x+(4-3i)y=(-6+3i)x-6$;

3) $\frac{2+5i}{x-y}-\frac{1-3i}{x+y}=\frac{-7x+12i}{y^2-x^2}$.

3.4. Представьте в алгебраической и тригонометрической формах комплексные числа и выполните действия:

1) $\frac{\left(0,5\sqrt{2}+0,5\sqrt{6}i\right)^3}{\left(-1,5+0,5\sqrt{3}i\right)^2\cdot i}\cdot 3$; 2) $2\cdot\left(\frac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12}}\right)^3$;

3) $\frac{16i\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)}{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4}-i$; 4) $\frac{4\sqrt{2}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot(1-i)^2}$.

3.5. Пусть $z_1=3+4i,\ \ z_2=-4+3i.$ Найдите действительные значения *a* и *b*, для которых $\frac{z_1}{z_2}=az_1+bz_2$.

3.6. Изобразите множество точек комплексной плоскости, координаты *x* и *y* которых удовлетворяют условию

$$x^2+i-2x+2yi=y-1+\frac{4y^2-1}{2y-1}i.$$

3.7. Найдите комплексное число *z*, удовлетворяющее уравнению

$$(i-z)\cdot(1+2i)+(1-iz)\cdot(3-4i)=1+7i.$$

3.8. Определите, при каких действительных значениях *x* и *y* комплексные числа $z_1=9y^2-4-10xi^5$ и $z_2=8y^2+20i^{11}$ являются сопряженными.

3.9. Решите уравнение:

1) $z^3-\frac{2\sqrt{2}}{1-i}=0$; 2) $-z^5+i=2$; 3) $z^2+|z|=0$;

4) $\left(z^2+z+1\right)\cdot\left(z^2+z+2\right)=12$.

Практическое занятие 3. Формулы сокращенного умножения. Бином Ньютона.

Цель занятия: систематизировать умение выполнять преобразования алгебраических выражений с помощью формул сокращенного умножения и применять полученные умения при решении задач.

Теоретическая часть:

Выражения, составленные из чисел и переменных, связанных действиями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с рациональным показателем, называются ***алгебраическими выражениями.***

При выполнении преобразований алгебраических выражений используются ***формулы сокращенного умножения***:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ – квадрат суммы;
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ – квадрат разности;
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ – разность квадратов;
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ – куб суммы;
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ – куб разности;
$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$ – сумма кубов;
$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$ – разность кубов.

Формулы разности квадратов и разности кубов обобщаются на любой натуральный показатель:

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right),\ n\in\mathbf{N}.$$

Формула суммы кубов обобщается на любой нечетный показатель:

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\cdot\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}\right),\ n\in\mathbf{N}.$$

Формулы квадрата и куба суммы являются частными случаями ***формулы бинома Ньютона***:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots\left(n-(k-1)\right)}{1\cdot 2\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n. \tag{3.1}$$

Коэффициенты в формуле бинома Ньютона называются ***биномиальными коэффициентами.***

Биномиальные коэффициенты можно вычислять, используя схему, которая называется ***треугольником Паскаля***. Все строки начинаются и заканчиваются единицей, каждый внутренний элемент строки равен сумме двух соседних элементов в предыдущей строке, стоящих над искомым элементом:

Показатель степени

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & 1 & & & & & & 0\\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & 1\\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & 2\\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & 3\\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 4\\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & 5\\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{3.2}$$

Числа в строке с определенным номером n, $n\in\mathbf{N}$, являются последовательными коэффициентами в формуле для данного n.

Формула бинома Ньютона обладает следующими свойствами:

1) в разложении двучлена $(a+b)^n$ по формуле Ньютона содержится $n+1$ член;

2) в разложении $(a+b)^n$ показатель степени a убывает от n до 0, а показатель степени b возрастает от 0 до n;

3) сумма показателей степеней a и b в каждом члене равна n;

4) биномиальные коэффициенты членов, равноудаленных от концов разложения, равны между собой;

5) сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n;

6) сумма биномиальных коэффициентов членов, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах, и равна 2^{n-1}.

Разложение $(a-b)^n$ выполняется по тем же правилам с учетом чередования знаков: «+», «–», «+», «–», «+» … и т. д.

Пример 1. Вычислить, используя формулы сокращенного умножения, значение выражения

$$\frac{33^2-23^2}{18\cdot 22-16\cdot 24}-\left(0{,}85^2-0{,}15^2\right)\cdot 10.$$

Решение. Используем формулу разности квадратов. Заданное выражение приобретает вид:

$$\frac{(33-23)(33+23)}{(20-2)\cdot(20+2)-(20-4)\cdot(20+4)}-(0{,}85-0{,}15)\cdot(0{,}85+0{,}15)\cdot 10=$$

$$=\frac{10\cdot 56}{400-4-400+16}-0{,}7\cdot 1\cdot 10=\frac{560}{14}-7=40-7=33.$$

Пример 2. Известно, что $a+b+c=12$ и $ab+ac+bc=22$. Квадратом какого натурального числа является значение $a^2+b^2+c^2$?

Решение. Так как $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, выражаем: $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$. Далее получаем: $a^2+b^2+c^2=12^2-2\cdot 22=100$.

Если обозначить искомое число через x, то $x^2=100$, т. е. $x=\pm 10$. Поскольку $x\in\mathbf{N}$, то в качестве ответа подходит $x=10$.

Пример 3. Вычислить значение выражения

$$\frac{3xy^4+3x^4y}{5xy^3-5x^3y}$$ при $y=1{,}6$, $x=-1{,}4$.

Решение. Упростим выражение, используя формулы суммы кубов и разности квадратов:

$$\frac{3xy^4+3x^4y}{5xy^3-5x^3y}=\frac{3xy\left(y^3+x^3\right)}{5xy\left(y^2-x^2\right)}=\frac{3(y+x)\left(y^2-xy+x^2\right)}{5(y+x)(y-x)}=$$

$$=\frac{3\left(y^2-xy+x^2\right)}{5(y-x)}.$$

При $y=1{,}6$ и $x=-1{,}4$ полученное выражение будет равно

$$\frac{3\cdot\left(1{,}6^2+1{,}6\cdot 1{,}4+1{,}4^2\right)}{5\cdot(1{,}6+1{,}4)}=\frac{2{,}56+(1{,}5+0{,}1)\cdot(1{,}5-0{,}1)+1{,}96}{5}=$$

$$=\frac{4{,}52+1{,}5^2-0{,}1^2}{5}=\frac{4{,}52+2{,}25-0{,}01}{5}=\frac{6{,}76}{5}=\frac{676}{500}=1+\frac{176\cdot 2}{500\cdot 2}=$$

$$=1+\frac{352}{1000}=1{,}352.$$

Пример 4. Разложить выражение $(2a-b)^5$ по формуле бинома Ньютона.

Решение. Используем формулу бинома Ньютона (3.1) и треугольник Паскаля (3.2) с учетом $n=5$.

Разложение будет иметь вид:

$$(2a+b)^5=(2a)^5-5(2a)^4b+10(2a)^3b^2-10(2a)^2b^3+5(2a)b^4-b^5=$$

$$=32a^5-80a^4b+80a^3b^2-40a^2b^3+10ab^4-b^5.$$

Задания

I уровень

1.1. Вычислите:

1) $\dfrac{(0{,}3)^2-(0{,}7)^2}{0{,}4}-4{,}8\cdot 5{,}2;$ 2) $\dfrac{4\cdot 0{,}1\cdot 3{,}99}{1-(0{,}97)^2}-0{,}725(8);$

3) $\dfrac{19^4}{\left(7\frac{1}{4}\right)^3+\left(11\frac{3}{4}\right)^3}\cdot\dfrac{1687}{16}$.

1.2. Упростите выражение:

1) $\dfrac{25}{a^2+5a+25}-\dfrac{2a}{5-a}-\dfrac{a^3+25a^2}{a^3-125}$;

2) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\left(1-\dfrac{x}{x+y}\right)^{-1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{y}{x-y}\right)$;

3) $\dfrac{x^2+(a+b)\cdot x+ab}{x^2-(a-c)\cdot x-ac}\cdot\dfrac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$.

1.3. Известно, что $x_1+x_2=\dfrac{7}{5}$ и $x_1\cdot x_2=-\dfrac{1}{5}$. Найдите:

1) $\left(\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\right)$; 2) $\left(x_1^3+x_2^3\right)$.

1.4. Докажите, что при $a,\ b\in\mathbf{N}$, дробь $\dfrac{(a+b)^4}{a^4+b^4}$ – неправильная.

1.5. Разложите по формуле бинома Ньютона:

1) $(x+y)^8$; 2) $(a+0{,}1\cdot b)^4$; 3) $\left(\sqrt{5}-1\right)^5$.

II уровень

2.1. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(1-2x)^{-2}}{\left(\left(\dfrac{4x^3-4x^2+x}{x+2}\right)^{-1}-\dfrac{2-x}{1-8x^3}\cdot\dfrac{4x^2+2x+1}{2x^2+x}\right)}-\dfrac{x-2}{5}$;

2) $\dfrac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\dfrac{x^2}{4-4x^{-1}+x^2}-\dfrac{4(2x+1)}{x^{-2}(1-2x)}$.

2.2. Известно, что $x_1+x_2=0{,}3$; $x_1\cdot x_2=2$, найдите:

1) $\left|\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}\right|$; 2) $x_1{}^6+x_2{}^6$.

2.3. Докажите, что $\dfrac{2\left(x^4+4x^2-12\right)-x^4-11x^2-30}{x^2-9}>0$, при любых $x\in\mathbf{R},\ x\neq\pm3$.

2.4. Разложите по формуле бинома Ньютона и упростите полученное выражение:

1) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}a-3b\right)^6$; 3) $\left(3+\dfrac{1}{3a}\right)^5$.

2.5. Вычислите:

1) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^7$; 2) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)^4$; 3) $\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^6$.

III уровень

3.1. Определите знак выражения при $a>1$:

$\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}+\dfrac{16}{1+a^{16}}+\dfrac{32}{1+a^{32}}$.

3.2. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^{35}+x^{34}+\ldots+x+1}{x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1}$; 2) $\dfrac{a^{29}+a^{28}+\ldots+a+1}{a^{9}+a^{8}+\ldots+a+1}$.

3.3. Найдите значение выражения $a-\sqrt{a^2+2}$, если $a+\sqrt{a^2+2}=4$.

3.4. Вычислите значение выражения
$(a+1)\cdot(a^2+1)\cdot(a^4+1)\cdot(a^8+1)\cdot(a^{16}+1)$ при $a=2$.

3.5. Докажите, что
$x^4-2x^2y-2xy^2+x^2+y^2+y^4>0$ при любых x, y.

3.6. Упростите выражение $(1+2x)^7-(1-2x)^5$.

3.7. Найдите разность между коэффициентом и биномиальным коэффициентом при x^{-5} для выражения $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^9$.

Практическое занятие 4. Многочлены. Действия над многочленами

Цель занятия: систематизировать умение выполнять действия над многочленами и применять полученные умения при решении задач.

Теоретическая часть:

Выражение вида

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \qquad (4.1)$$

где $a_n;\ a_{n-1};\ \ldots;\ a_1;\ a_0\in\mathbf{R},\ a_n\neq 0,$
называется ***многочленом n-й степени*** от одной переменной *x*, записанным в стандартном виде.

Числа $a_n;\ a_{n-1};\ \ldots;\ a_1;\ a_0$ называются ***коэффициентами*** данного многочлена, a_n – ***старшим коэффициентом***, a_0 – ***свободным членом***.

Если необходимо указать степень многочлена $P(x)$, то пишут $P_n(x)$.

Если $a_n=1$, то $P(x)$ называется ***приведенным многочленом***.

Если кроме $n\in\mathbf{N}$ рассмотреть случай $n=0$, то многочлен вида $P_0(x)=a_0x^0=a_0$ называется ***многочленом нулевой степени***, он есть число.

Каждое слагаемое вида $a_kx^k,\ k=\overline{0,n}$ многочлена (4.1) называется ***одночленом.***

Два многочлена, заданные в виде (4.1), называются ***равными***, если равны все их коэффициенты при соответствующих степенях переменной *x*.

Для всякого многочлена $P_n(x)$ и многочлена $Q_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$ определены следующие операции:

1) ***умножение многочленов*** на число $c\in\mathbf{R}$:
$cP_n(x)=ca_nx^n+ca_{n-1}x^{n-1}+\ldots+ca_1x+ca_0$;

2) ***сложение многочленов***:
$P_n(x)\pm Q_n(x)=(a_n\pm b_n)x^n+\ldots+(a_1\pm b_1)x+(a_0\pm b_0)$;

3) ***умножение многочленов*** производят по следующему правилу: каждый член одного многочлена умножают на каждый член второго многочлена, полученные результаты складывают и приводят подобные;

4) ***деление многочленов*** (при условии, что степень делителя меньше или равна

степени делимого) выполняется по правилу «деления углом».

Результат деления записывается в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ или } P(x) = Q(x)S(x) + R(x), \qquad (4.2)$$

где $S(x)$ – частное (многочлен); $R(x)$ – остаток (степень остатка меньше степени делителя).

Многочлен $P(x)$ делится ***нацело*** на $Q(x)$ $(Q(x) \neq 0)$, если $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x)$ или $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$.

Если $Q(x) = x - x_0$, где $x_0 \in \mathbf{R}$, то результат деления многочлена $P(x)$ на $(x - x_0)$, согласно формуле (2.4), можно записать в виде равенства

$$P_n(x) = (x - x_0)S_{n-1}(x) + R_0, \qquad (4.3)$$

где R_0 – число.

Коэффициенты многочлена

$S_{n-1}(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1 x + b_0$

и остаток R_0 в равенстве (2.5) можно вычислить по ***схеме Горнера***:

$$\begin{aligned} &c_{n-1} = a_n;\ c_{n-2} = a_{n-1} + x_0 c_{n-1};\ c_{n-3} = a_{n-2} + x_0 c_{n-2};\ \ldots \\ &c_0 = a_1 + x_0 c_1;\ R_0 = a_0 + x_0 c_0. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

При вычислении коэффициентов (4.5) используют таблицу:

$x - x_0$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	. . .	a_1	a_0
x_0	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	. . .	c_0	R_0

Верхняя строка заполняется коэффициентами заданного многочлена (4.1), нижняя – числами, которые вычисляют по формулам (4.5).

Число x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$ называется ***корнем многочлена*** $P(x)$, если $P(x_0) = 0$.

Число x_0 называется ***корнем кратности k*** многочлена $P_n(x)$, если $P_n(x) = (x - x_0)^k S_{n-k}(x)$ и $S_{n-k}(x_0) \neq 0$.

Теорема 1 *(Безу). Число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится нацело на $(x - x_0)$.*

Теорема 2. *Число R_0 является остатком от деления многочлена $P(x)$ на $(x - x_0)$ тогда и только тогда, когда $R_0 = P(x_0)$.*

Теорема 3. *Пусть $P(x)$ – приведенный многочлен с целыми коэффициентами. Если он имеет целые корни, то они содержатся среди целых делителей свободного члена.*

Представление многочлена $P(x)$ в виде произведения двух или нескольких многочленов (если это возможно) называется ***разложением*** $P(x)$ ***на множители.***

Общий вид разложения $P_n(x)$ на множители:

$$P_n(x) = A(x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k} \cdot (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{r_1} \cdot \ldots \times$$
$$\times (a_m x^2 + b_m x + c_m)^{r_m},$$

где A, a_1; …; a_m; b_1; …; b_m; c_1; …; c_m $\in$ **R** (const);

x_1; x_2; …; x_k – корни многочлена $P_n(x)$;

n_1; n_2; …; n_k; r_1 … $r_m \in \mathbf{N}$;

$n_1 + n_2 + \ldots + n_r + 2r_1 + \ldots + 2r_m = n.$

Квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Основные методы разложения:

1) вынесение общего множителя за скобки;

2) метод группировки:
- непосредственно;
- с предварительными преобразованиями слагаемых;
3) использование формул сокращенного умножения;
4) использование формул разложения квадратного трехчлена на множители

$$ax^2+bx+c=\left[\begin{array}{l} a(x-x_1)(x-x_2), \text{если } D>0 \text{ и } x_1, x_2 - \text{ корни},\\ a(x-x_0)^2, \text{если } D=0 \text{ и } x_0 - \text{ корень;}\end{array}\right.$$

5) выделение полного квадрата и сведение к разности квадратов;
6) введение новой переменной;
7) поиск корней многочлена среди делителей свободного члена, использование теоремы Безу.

Многочлен может зависеть не только от одной переменной, но и от двух $(P_n(x;y))$; трех $(P_n(x;y;z))$ и т. д. Данные многочлены называются ***многочленами от нескольких переменных***. Тогда их ***одночленом*** называют выражение, представляющее собой произведение чисел и переменных в некоторых степенях. ***Степенью*** одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Старшая степень многочлена нескольких переменных определяется старшей степенью его одночлена.

Многочлен от двух переменных $P(x;y)$ называется ***симметрическим***, если при замене переменных *x* на *y* и *y* на *x* выражение $P(x;y)$ не меняется.

Над многочленами от нескольких переменных можно выполнять действия, аналогичные действиям над многочленами от одной переменной. Для разложения данных многочленов на множители применяются те же методы, что и для многочленов от одной переменной.

Пример 1. Представить многочлен в стандартном виде, определить его степень:
1) $(x-4)^3+3x^2(2-x)+2x^3$; 2) $-3x^2y(7y^2+3x-8)$.

Решение. 1) Раскроем скобки и приведем подобные:

$$(x-4)^3+3x^2(2-x)+2x^3=x^3-12x^2+48x-64+6x^2-3x^3+2x^3=$$

$$=-6x^2+48x-64.$$

Данный многочлен является многочленом 2-й степени относительно *x*.
2) Умножим многочлен на одночлен

$$-3x^2y(7y^2+3x-8)=3x^2y\cdot 7y^2-3x^2y\cdot 3x+3x^2y\cdot 8.$$

Приведем подобные и получаем многочлен

$$-21x^2y^3-9x^3y+24x^2y,$$

который является многочленом 5-й степени от двух переменных *x*, *y* (наибольшее суммарное значение показателей имеем в первом одночлене: 2 + 3 = 5).

Пример 2. Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)=3x^4-x^3+2x^2-5x-7$ на многочлен $Q(x)=x^2+x-4$. Результат деления записать в виде равенства.

Решение. Воспользуемся правилом «деления углом»:

$$\begin{array}{rl}
-\;\; 3x^4-x^3+2x^2-5x-7 & \left|\,\underline{x^2+x-4}\right. \\
\underline{3x^4+3x^3-12x^2} \qquad\qquad & \;\; 3x^2-4x+18 \\
-\;\; -4x^3+14x^2-5x-7 & \\
\underline{-4x^3-4x^2+16x} \qquad & \\
-\;\; -18x^2-21x-7 & \\
\underline{-18x^2+18x-72} & \\
-39x+65 &
\end{array}$$

Получаем:
$3x^2-4x+18$ – частное (целая часть);
$-39x+65$ – остаток (многочлен 1-й степени).

Тогда
$$\frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x - 7}{x^2 + x - 4} = 3x^2 - 4x + 18 - \frac{39x - 65}{x^2 + x - 4}.$$

Задания

I уровень

1.1. Запишите многочлен в стандартном виде:

1) $(5x - 4y)^3 - (y + x)^2 - x;$ 2) $(a^2 - b^2)^2 + (a^2 + b^2)^2.$

1.2. Найдите значение многочлена при $x = x_0$:

1) $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1,\ x_0 = 1;$

2) $P(x) = 16x^4 + 0{,}2x - 11,\ x_0 = 0{,}2.$

1.3. Выполните деление многочлена $P(x)$, результат запишите в виде равенства:

1) $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ í à $(x - 1);$

2) $P(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$ í à $x.$

1.4. Найдите (если они существуют) целые корни многочлена:

1) $x^3 + 2x^2 + x - 4;$ 2) $x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 5.$

1.5. Разложите многочлен на множители:

1) $a^2 - 2ab + 2a - 4b;$ 2) $72a^5x^4 - 54a^3x^5 + 36a^2x^6;$

3) $(2x + 1)^3 - 8;$ 4) $y^2 - 10y + 25 - 4m^2;$

5) $(a - b)^2 - (c + d)^2 - a + b - c - d.$

II уровень

2.1. Выполните действия, запишите результат в стандартном виде, определите старшую степень многочлена:

1) $(-x^2 - 4x - 1)\cdot(4x^2 + x - 3);$

2) $(-2ax^2xy^4 - 8y^7)\cdot(5a^7x - 2x^4 + 3y).$

2.2. Не выполняя деления, проверьте, делится ли данный многочлен $P(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x + 8$ на:

1) $x - 1;$ 2) $x + 2.$

Если не делится, укажите остаток от деления.

2.3. Найдите частное и остаток от деления:

1) $\dfrac{3x^4 + x^4 - x + 1}{x^2 + 3};$ 2) $\dfrac{7 - x^4}{x^3 + 1}.$

2.4. Выполните действия и найдите значение выражения при $x = -1$:
$$\frac{3x^6 + 11x^3 + x^5 + 4x^2 - 4}{x^3 + 4} - 3x^3 - 2x^2 + 4.$$

III уровень

3.1. Известно, что многочлен $P(x) = x - \lambda x^3 - 4x + 1$ имеет целые корни. Найдите значение λ, при котором они существуют.

3.2. Сократите дробь $\dfrac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1}.$

3.3. Найдите:

1) наибольшее значение выражения $8ab - 5a^2 - 5b^2$ и определите, при каких a и b оно достигается;

2) наименьшее значение многочлена

$2x^2 + 5x^2 + 3z^2 - 6xy - 2xz + 5yz.$

3.4. Найдите сумму всех целых значений n, при каждом из которых значение выражения:

1) $\dfrac{3n-5}{n+1}$ является целым числом;
2) $\dfrac{6n-9}{2n-1}$ является натуральным числом;
3) $\dfrac{3n^2-16n+23}{n-3}$ является натуральным числом.

3.5. Разложите на множители:

1) $x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$; 2) p^4+324;
3) x^3-3x-2; 4) $63m^4n^3+27m^3n^4-45m^5n^7$;
5) $7-56a^6b^3$; 6) $x^3-3x^2-16x+48$;
7) $16x^4-1$; 8) $(a+b)^3+(a-b)^3-3a$.

Практическое занятие 5. Алгебраические уравнения высших степеней.
Цель занятия: систематизировать умение находить решение алгебраических уравнений и применять полученные умения при решении задач.
Теоретическая часть:

Уравнение вида
$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0, \qquad (5.1)$$
где $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n\in\mathbf{R},\ a_n\neq 0,\ n\in\mathbf{N},$ называется ***уравнением n-й степени.***

Если $n=1,$ уравнение $a_1x+a_0=0$ называется ***линейным.***

Если $n=2,$ уравнение $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ называется ***квадратным.***

Если $a_0=0,$ уравнение называется ***однородным***.

Основными методами решения уравнений типа (5.1) при $n\geq 3$ являются:

1) метод разложения многочлена в левой части уравнения (5.1) на множители и сведение к равносильной совокупности уравнений;

2) метод замены переменной, в результате применения которого уравнение (5.1) заменяется равносильным уравнением, степень которого ниже, чем *n*;

3) поиск корней среди делителей свободного члена.

Рассмотрим некоторые виды уравнений (5.1) и их решения.

Уравнения вида $ax^{n+2}+bx^{n+1}+cx^n=0$ решаются вынесением общего множителя x^n за скобки:
$$x^n\left(ax^2+bx+c\right)=0$$
и сведением к совокупности:
$$\left[\begin{array}{l} x^n=0, \\ ax^2+bx+c=0. \end{array}\right.$$

Уравнение вида
$$ax^{2n}+bx^n+c=0,\ a\neq 0,\ n\geq 2,\ n\in\mathbf{N}, \qquad (5.2)$$
решается заменой $y=x^n$. Получаем уравнение $ay^2+by+c=0,$ которое решается, как квадратное. Находим его корни (если такие существуют) и возвращаемся к старой переменной.

При $n=2$ уравнение (5.2) имеет вид:
$ax^4+bx^2+c=0$ – ***биквадратное уравнение***.

Уравнение
$$(x+\alpha)^4+(x+\beta)^4=c, \qquad (5.3)$$
где $\alpha,\beta,c\in\mathbf{R},$ сводится к биквадратному уравнению заменой $y=\dfrac{(x+\alpha)+(x+\beta)}{2}$.

Уравнение

$$(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)\cdot(x-\delta)=A, \qquad (5.4)$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ и A таковы, что $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ и $\beta-\alpha=\delta-\gamma$, сводится к биквадратному уравнению заменой

$$y=\frac{x-\alpha+x-\beta+x-\gamma+x-\delta}{4}.$$

или при $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ к уравнению

$$\left(x^2+x\cdot(\alpha+\beta)+\alpha\beta\right)\cdot\left(x^2+x\cdot(\gamma+\delta)+\gamma\delta\right)=A$$

заменой

$$x^2+x(\alpha+\beta)+\alpha\beta=y.$$

Уравнение

$$\left(ax^2+b_1x+c\right)\cdot\left(ax^2+b_2x+c\right)=Ax^2, \qquad (5.5)$$

где $c\neq 0$ и $A\neq 0$, делением на x^2 (так как $x=0$ – не является корнем) сводится к равносильному ему уравнению:

$$\left(ax+\frac{c}{x}+b_1\right)\cdot\left(ax+\frac{c}{x}+b_2\right)-A=0,$$

далее заменой $y=ax+\dfrac{c}{x}$ оно сводится к квадратному уравнению.

Уравнение

$$(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)\cdot(x-\delta)=Ax^2,$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ и A таковы, что $\alpha\beta=\gamma\delta\neq 0$, сводится к уравнению вида (3.5) после попарного перемножения выражений в скобках:

$$\left(x^2-x\cdot(\alpha+\beta)+\alpha\beta\right)\cdot\left(x^2-x\cdot(\gamma+\delta)+\gamma\delta\right)=Ax^2.$$

Уравнения вида

$$ax^3+bx^2+bx+a=0, \qquad (5.6)$$

где $a\neq 0$, называются ***симметрическими уравнениями третьей степени.***

Так как

$$ax^3+bx^2+bx+a=a\cdot\left(x^3+1\right)+bx\cdot(x+1)=$$
$$=(x+1)\cdot\left(ax^2+(b-a)\cdot x+1\right),$$

то уравнение (5.5) равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}x+1=0,\\ ax^2+(b-a)x+a=0.\end{array}\right.$$

Уравнения вида

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \qquad (5.7)$$

где $a\neq 0$, называются ***симметрическими уравнениями четвертой степени***.

Так как $x=0$ не является корнем уравнения (5.7), то деление обеих частей уравнения (5.7) на x^2 приводит его к уравнению

$$ax^2+\frac{a}{x^2}+bx+\frac{b}{x}+c=0 \text{ или}$$

$$a\cdot\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)+b\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Далее заменяем $y=x+\dfrac{1}{x}$ и сводим его к квадратному уравнению.

Пример 1. Решить уравнение $2x^8-3x^7+x^6=0$.

Решение. Выносим общий множитель за скобки:

$$x^6\cdot\left(2x^2-3x+1\right)=0.$$

Получаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^6 = 0, \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Ее решение дает три корня:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{1}{2}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\left(x^2 + 2x - 1\right)^2 - 7 \cdot \left(x^2 + 2x - 1\right) + 12 = 0.$$

Решение. Заменяем $x^2 + 2x - 1 = y$ и приходим к уравнению

$$y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни:

$$\left[\begin{array}{l} y = 4, \\ y = 3. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 = 4, \\ x^2 + 2x - 1 = 3. \end{array}\right.$$

Решаем полученные квадратные уравнения и приходим к ответу:

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \pm \sqrt{6}, \\ x = -1 \pm \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Пример 3. Решить уравнение $(x + 4)^4 + (x + 2)^4 = 2.$

Решение. Задано уравнение вида (5.3). Заменяем

$y = \dfrac{x + 4 + x + 2}{2} = x + 3,$ т. е. $x = y - 3.$ Подставим это значение в заданное уравнение:

$$(y - 3 + 4)^4 + (y - 3 + 2)^4 = 2.$$

После упрощения имеем:

$$(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 2.$$

Дополним до полного квадрата суммы:

$$\left((y + 1)^2 + (y - 1)^2\right)^2 - 2(y + 1)^2 \cdot (y - 1)^2 = 2.$$

После упрощения уравнение приобретает вид:

$y^4 + 6y^2 = 0,$ т. е. $y^2\left(y^2 + 6\right) = 0.$

Его решением является лишь $y = 0.$

Возвращаясь к переменной *x*, получим $x + 3 = 0,$ что приводит к ответу: $x = -3.$

Пример 4. Решить уравнение $\left(x^2 - 5x - 5\right) \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) = 12.$

Решение. Имеем уравнение вида (5.4).

Так как $-3 - 2 = -5,$ то перемножим выражения во 2-й и 3-й скобках. Получим:

$$\left(x^2 - 5x - 5\right) \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) = 12.$$

Заменяем $x^2 - 5x - 5 = y.$

Поскольку $x^2 - 5x + 6 = \left(x^2 - 5x - 5\right) + 11,$ приходим к уравнению

$$y(y + 11) = 12.$$

Решая его как квадратное, получим корни:

$$\left[\begin{array}{l} y = -12, \\ y = 1. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 5 = -12, \\ x^2 - 5x - 5 = 1. \end{array}\right.$$

Первое квадратное уравнение полученной совокупности не имеет корней, так как $D < 0,$

а второе имеет корни $\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=6, \end{array}\right.$ что и будет ответом.

Пример 5. Решить уравнение $\left(x^2+2x-1\right)\cdot\left(x^2-3x-1\right)=-4x^2$.

Решение. Имеем уравнение вида (5.5). Поскольку $x=0$ не является его корнем (в чем можно убедиться подстановкой), то делим его почленно на x^2. Получаем

$$\left(x-\frac{1}{x}+2\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}-3\right)=-4.$$

Введем замену $x-\frac{1}{x}=y$, которая приводит к уравнению

$(y+2)\cdot(y-3)=-4$, т. е. $y^2-y-2=0$.

Находим корни $\left[\begin{array}{l} y=-1, \\ y=2, \end{array}\right.$ и возвращаемся к переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}=2, \\ x-\frac{1}{x}=-1. \end{array}\right.$$

Решаем полученную совокупность дробно-рациональных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-2x-1}{x}=0, \\ \dfrac{x^2+x-1}{x}=0, \end{array}\right. \text{ т. е. } \left[\begin{array}{l} x^2-2x-1=0, \\ x^2+x-1=0. \end{array}\right.$$

Получаем в совокупности 4 корня:

$$\left[\begin{array}{l} x=1\pm\sqrt{2}, \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $3x^4+3x^3-7x^2-7x=0$; 2) $\left(x^2-5x+2\right)\cdot\left(x^2-5x-1\right)=28$;

3) $x^8+3x^4-4=0$; 4) $x^6-7x^3-8=0$;

5) $x^3-3x^2+6x-8=0$; 6) $x^4-16-x^3+4x=0$;

7) $5x^7+3x^6-x^5=0$; 8) $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$;

9) $2x^3+5x^2+5x+2=0$; 10) $\left(x^2-x-2\right)^2+\left(x^2-x-2\right)-2=0$;

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $3x^3+4x-7=0$; 2) $\left(3x^2-3x+5\right)^2=\left(2x^2+6x-3\right)^2$;

3) $2x^3-9x^2+12x-5=0$; 4) $(x-2)\cdot(x-3)^2\cdot(x-4)=20$;

5) $x^4-1+\left(x^2-1\right)^2=0$; 6) $3x^4+2x^3+5x^2+2x+3=0$;

7) $x^4-7x^2-6{,}25=0$; 8) $3x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)=48$;

9) $x^3+10x^2+35x+42=0$; 10) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0$;

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $9+4\sqrt{10}x^2-x^4=0;$ 2) $5x^3-x^2-36=0;$

3) $\left(x^3+x^2-12\right)^2+\left(x^4-16\right)^4=0;$ 4) $\dfrac{2x^3+3x^2-4x-1}{5x^{49}-3x^{11}-2}=0;$

5) $\dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{\sqrt{x^2+2x-1}}=0;$ 6) $(x+3)^4+(x+5)^4=16;$

7) $\left(x^2-\sqrt{5}x\right)\cdot\left(2x^3+5\sqrt{3}x^2-3{,}125x\right)=0;$

8) $\left(2x^2-3x+1\right)\cdot\left(2x^2+5x+1\right)=9x^2;$

9) $4(x+5)\cdot(x+6)\cdot(x+10)\cdot(x+12)-3x^2=0;$

10) $\left(x^2+x-21\right)^2+\left(x^2+6x+4\right)^2=25(x+5)^2;$

Практическое занятие 6. Дробно-рациональные уравнения. Уравнения с модулем.

Цель занятия: систематизировать умение находить решение дробно-рациональных уравнений, уравнений с модулем и применять полученные умения при решении задач.

Теоретическая часть:

Стандартный вид дробно-рационального уравнения:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \qquad (6.1)$$

где $P(x), Q(x)$ – многочлены.

Область допустимых значений (ОДЗ) данного уравнения: $Q(x)\neq 0.$ Решение уравнений (6.1) сводится к решению системы

$$\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

Дробно-рациональные уравнения вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{S(x)},$$

где $P(x),\ Q(x),\ R(x),\ S(x)$ – многочлены, можно решать, используя основное свойство пропорции:

$$\begin{cases} P(x)\cdot S(x)=R(x)\cdot Q(x), \\ Q(x)\neq 0, \\ S(x)\neq 0. \end{cases}$$

К основному методу решения дробно-рациональных уравнений относится также метод замены переменной.

Некоторые специальные приемы будут рассмотрены далее на примерах.

Пример 1. Решить уравнение $\dfrac{x}{x-x^2}=3.$

Решение. Сводим заданное уравнение к стандартному виду:

$\dfrac{x}{x-x^2}-3=0,$ т. е. $\dfrac{3x^2-2x}{x-x^2}=0.$

Его решением будет решение системы

$$\begin{cases} 3x^2-2x=0, \\ x-x^2\neq 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \\ \ldots, \\ x\neq 0, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Значит, решением заданного уравнения является $x=\dfrac{2}{3}.$

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{4}{x+4}$.

Решение. Применим основное свойство пропорции с учетом ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x(x+4)=4(x^2-1), \\ x^2-1\neq 0, \\ x+4\neq 0. \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} 3x^2-4x-4=0, \\ x\neq \pm 1, \\ x\neq -4. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-\dfrac{2}{3}, \end{array}\right. \\ \ldots, \\ x\neq \pm 1, \\ x\neq -4. \end{cases}$$

Оба корня являются решениями, так как подходят по ОДЗ. В ответе имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{3}, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Модулем (***абсолютной величиной***) ***числа*** $x\in \mathbf{R}$ называется неотрицательное число:

$$|x|=\left[\begin{array}{l} x, \text{ если } x\geq 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{array}\right. \qquad (6.2)$$

Геометрическая интерпретация модуля: $|x-a|$ – это расстояние от точки a до точки x на координатной оси, в частности, $|x|$ – это расстояние от точки 0 до точки x.

Свойства модуля:

1) $|x|\geq 0$; 2) $|-x|=|x|$; 3) $|xy|=|x||y|$;

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$, $y\neq 0$; 5) $|x|^2=x^2$; 6) $\sqrt{x^2}=|x|$;

7) $|x|\geq x$; 8) $|x+y|\leq |x|+|y|$; 9) $|x-y|\geq ||x|-|y||$.

Пусть $f(x)$ – некоторое алгебраическое выражение. Тогда, используя определение модуля (6.2) при соответствующих предположениях, можно раскрыть знак абсолютной величины данного выражения:

$$|f(x)|=\left[\begin{array}{l} f(x) \text{ для всех } x, \text{ при которых } f(x)\geq 0, \\ -f(x) \text{ для всех } x, \text{ при которых } f(x)<0. \end{array}\right.$$

Уравнение, содержащее выражение с неизвестной x под знаком модуля, называется ***уравнением с модулем.*** Рассмотрим основные типы уравнений с модулем и методы их решения.

I тип: уравнение вида

$$|f(x)|=a, \qquad (6.3)$$

где a – число, $a\in \mathbf{R}$; $f(x)$ – некоторое выражение с неизвестной x.

1. Если $a<0$, уравнение решений не имеет.
2. Если $a=0$, уравнение равносильно уравнению $f(x)=0$.
3. Если $a>0$, уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$

II тип: уравнение вида

$|f(x)|=g(x)$,

где $f(x)$, $g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной x.

Решать это уравнение можно несколькими способами.

1-й способ – используя определения модуля:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ f(x)=g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ -f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

2-й способ – используя подход к решению, как к уравнениям I типа с дополнительным условием на знак выражения $g(x)$:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. 1-й или 2-й способ решения таких уравнений выбирают в зависимости от того, какое из неравенств $f(x) \geq 0$ или $g(x) \geq 0$ решается легче.

3-й способ – метод интервалов. Необходимо:

1) найти те значения *x*, для которых $f(x) = 0$;

2) нанести полученные значения *x* на числовую ось;

3) определить знаки $f(x)$ для каждого из полученных интервалов;

4) нарисовать кривую знаков;

5) решить уравнение на каждом промежутке в отдельности, раскрывая модуль согласно рисунку;

6) для каждого конкретного промежутка проверить, принадлежат ли полученные корни этому промежутку;

7) в ответе указать совокупность всех полученных корней.

III тип: уравнения, содержащие несколько модулей. Если их два, то это уравнение вида

$$A|f(x)| + B|g(x)| + h(x) = 0, \qquad (6.4)$$

где $A,\ B \in \mathbf{R},\ f(x),\ g(x),\ h(x)$ – некоторые выражения с неизвестной *x*.

1-й способ – можно использовать определение модуля и рассматривать 4 случая возможных знаков $f(x),\ g(x).$ Этот способ, как правило, не является рациональным.

2-й способ – метод интервалов. Необходимо нарисовать столько числовых осей и кривых знаков, сколько модулей в уравнении. Для уравнения рисуют две оси, располагая их одна под другой (одна ось для $f(x)$, вторая – для $g(x)$). Для каждого выражения $f(x)$ и $g(x)$ следует изобразить кривую знаков на соответствующей оси. Затем раскрывают модули, используя рисунок, и решают уравнение отдельно на каждом промежутке. Подходят только те корни, которые принадлежат рассматриваемому промежутку. В ответе необходимо указать совокупность полученных корней.

IV тип: уравнение вида

$$A|f(x)| = B|g(x)|, \qquad (6.5)$$

где $f(x),\ g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной *x*; $A,\ B > 0,\ \ A,\ B \in \mathbf{R}$.

1-й способ – решение уравнения (3.12) сводится к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} Af(x) = Bg(x), \\ Af(x) = -Bg(x). \end{array} \right.$$

2-й способ – метод интервалов (не рационально).

3-й способ – после возведения уравнения в квадрат и использования свойства модуля $|a|^2 = a^2,$ уравнение сводится к равносильному:

$$A^2(f(x))^2 = B^2(g(x))^2.$$

Полученное уравнение решается в зависимости от его типа.

V тип: уравнения, решаемые заменой переменной, например:

$$af^2(x) + b|f(x)| + c = 0,$$

где $f(x),\ g(x)$ – некоторые выражения с неизвестной *x*; $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0.$

По свойству модуля оно записывается в виде

$$a|f(x)|^2 + b|f(x)| + c = 0.$$

Вводят замену $|f(x)| = y$ и решают полученное квадратное уравнение относительно неизвестной *y*. Затем необходимо вернуться к старой переменной. В случае 2-х различных корней y_1, y_2 квадратного уравнения это будет совокупность уравнений I типа:

$$\left[\begin{array}{l} |f(x)| = y_1, \\ |f(x)| = y_2, \end{array} \right.$$

если корень y_0 единственный, то остается решить уравнение $|f(x)|=y_0$.

Необходимо помнить, что в случае отрицательного значения y_1, y_2, y_0 уравнение с модулем не имеет решений.

Пример 1. Решить уравнение $\left|\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}\right|=1.$

Решение. Это уравнение I типа. Его ОДЗ: $x\neq 3$.

Уравнение записывается в виде $\left|\dfrac{x-3}{(x-3)^2}\right|=1.$

На ОДЗ можно сократить и получаем

$\left|\dfrac{1}{x-3}\right|=1,$ откуда $\left[\begin{aligned}&\frac{1}{x-3}=1,\\&\frac{1}{x-3}=-1,\end{aligned}\right.$ т. е. $\left[\begin{aligned}&1=x-3,\\&1=-(x-3).\end{aligned}\right.$

Получаем корни $\left[\begin{aligned}&x=4,\\&x=2,\end{aligned}\right.$ которые подходят по ОДЗ.

Пример 2. Решить уравнение $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|=\dfrac{1}{x+1}.$

Решение. Это уравнение II типа. Его ОДЗ: $x\neq\pm 1$. Оно имеет решение, если $\dfrac{1}{x+1}>0,$ т. е. при $x>-1$. Таким образом, для $x\in(-1;1)\cup(1;+\infty)$ получаем:

$$\left[\begin{aligned}&\frac{x+2}{x-1}=\frac{1}{x+1},\\&\frac{x+2}{x-1}=-\frac{1}{x+1}.\end{aligned}\right.$$

Решим отдельно полученные дробно-рациональные уравнения. Первое уравнение сводится к виду

$\dfrac{(x+2)\cdot(x+1)-(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=0,$ откуда $x^2+2x+3=0.$

Это квадратное уравнение решений не имеет, так как $D<0$.

Из второго уравнения совокупности получаем

$\dfrac{(x+2)\cdot(x+1)+(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=0,$ т. е. $x^2+4x+1=0.$

Квадратное уравнение имеет корни:

$$\left[\begin{aligned}&x=\frac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3},\\&x=\frac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3},\end{aligned}\right.$$

т. е. первый корень не принадлежит множеству $x\in(-1;1)\cup(1;+\infty),$ на котором решали уравнение, следовательно, ответом является только $x=-2+\sqrt{3}$.

Задания

I уровень

1.1. Решите уравнение:

1) $3\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0;$ 2) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2}{x}=4;$

3) $\dfrac{3}{9-x}+2=x;$ 4) $\dfrac{-5}{4-x^2}-\dfrac{x}{x-2}=0;$

5) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{3(x-2)}{x}-4=0;$ 6) $\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-7)}{\sqrt{20-19x-x^{11}}}=0;$

7) $\dfrac{\left(x^2-7x+10\right)\sqrt{16-2x}}{32-4x}=0;$ 8) $\dfrac{x^3-8}{2x-4}=12x-18.$

1.2. Решите уравнение:

1) $|1-x|-7=0;$ 2) $|3-x|+3=0;$

3) $\sqrt{(x-5)^2}-3=0;$ 4) $\left|-x^2-4\right|=5;$

5) $|x-5|=2x+5;$ 6) $|x-3|=-x;$

7) $|x-2|-|x+6|=0;$ 8) $\left|x^3\right|-x^2=-2;$

9) $\sqrt{9x^2+30x+25}=2-x;$ 10) $|2+|3+x||-5=0;$

11) $\dfrac{7}{|x-2|}=3;$ 12) $\sqrt{x+1}\cdot(|x+2|-4)=0;$

13) $\dfrac{|2-x|-3}{2x^2-9x-5}=0;$ 14) $(x-4)^2-5|x-4|-14=0.$

II уровень

2.1. Решите уравнение:

1) $\dfrac{-4}{2x^2-5x-3}=\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{3}{3-x};$ 2) $\dfrac{x}{x-4}+x^{-1}-\dfrac{2}{4-x}=0;$

3) $(x+3)^2-\dfrac{1}{x^2+6x}=0;$ 4) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}=\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}+1;$

5) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6};$ 6) $\dfrac{3x^2+11x+6}{8+10x-3x^2}=\dfrac{x+3}{4-x};$

7) $\dfrac{x-6\sqrt{x}+5}{2-2\sqrt{x}}=\dfrac{x}{5};$ 8) $\dfrac{7-2x-5x^2}{3x^{202}-4x^{101}+1}=0.$

2.2. Решите уравнение:

1) $|2-x|+|3x-6|+|x|=4;$ 2) $\dfrac{(|x-6|-4)\cdot(|2x+3|-7)\cdot|x|}{\sqrt{2-x}}=0;$

3) $||x+4|-2x|=3x-1;$ 4) $\left|(2x-1)^4+3(2x-1)^2\right|-10=0;$

5) $\left(\dfrac{x+4}{2}\right)^2+\left|2+\dfrac{x}{2}\right|=2;$ 6) $\dfrac{x|x-1|}{|x-2|}=-\dfrac{2}{3};$

7) $\left|\dfrac{x-2}{x^3}\right|=x|2-x|;$ 8) $\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+8x+16}}{|x|}=|1-x|;$

9) $\left|x^2+2|x|+3\right|=2;$ 10) $\left|\dfrac{x+1}{2x-4}\right|-2\left|\dfrac{2x-4}{x+1}\right|=-1;$

III уровень

3.1. Решите уравнение:

1) $\dfrac{-x^2-3\sqrt{2}x-4}{x^2-\left(4-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{32}}=0;$ 2) $9x^2+\dfrac{1}{x^2}-10\left(3x+\dfrac{1}{x}\right)+30=0;$

3) $x^2+\dfrac{36x^2}{(x+6)^2}=1;$ 4) $\dfrac{4x^2+3x+2}{3x^2+1}=\dfrac{3x^2+3x+6}{2x^2+5};$

5) $\dfrac{1-(1{,}5x)^{-1}}{(3x-2)^{-1}}=(3x)^{-1}+5x^{-1}$; 6) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\dfrac{13}{3}=0$;

7) $\dfrac{x^2}{x+5}+\dfrac{5x}{x^2-5}-6=0$; 8) $\dfrac{x^2+ax+a^2}{x^2-ax+a^2}=\dfrac{a^2}{x^2}$.

3.2. Найдите квадрат суммы корней $x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{4a^2}{(a-1)^2}$ при $a>1$.

3.3. Определите при каких значениях *a* уравнение имеет действительные корни:

$$(a-2)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2-a\frac{x^2+1}{x^2}+3a=0.$$

3.4. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sqrt{8-x}\cdot\left(\left|x^2-9\right|-8x\right)}{\sqrt{x}+1}=0$; 2) $\left|2x^2-3x+4\right|=\left|3x-2\right|+2x^2+2$;

3) $\left|\left|\left|3-x^2\right|-2x\right|-4\right|=5$; 4) $\left|\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-2x-8}\right|=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x-14}$;

5) $\left|x^2-4x+3\right|=-\left(4+2\sqrt{3}\right)x$; 6) $\dfrac{|x-1|+|x+3|-4}{\sqrt{7-x^2}}=0$.

Практическое занятие 7. **Алгебраические неравенства.**

Цель занятия: систематизировать знания о методах решения алгебраических неравенств и выработать умение применять знания при решении задач.

Теоретическая часть:

Неравенством с одной переменной x называют соотношения вида:

$$\begin{aligned}&1)\ f(x)<g(x);\\&2)\ f(x)>g(x);\\&3)\ f(x)\le g(x);\\&4)\ f(x)\ge g(x),\end{aligned}\qquad(7.1)$$

где $f(x), g(x)$ – некоторые выражения, зависящие от переменной *x*, при условии, что ставится задача нахождения всех тех значений $x\ (x\in\mathbf{R})$, при которых эти неравенства верны.

Неравенства 1) и 2) называются ***строгими***, а 3) и 4) – ***нестрогими***.

Решением неравенств типа (7.1) называют такое значение переменной *x*, при котором оно обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти множество всех его решений или доказать, что неравенство решений не имеет.

Два неравенства называются ***равносильными***, если они имеют одно и то же множество решений.

Свойства равносильности неравенств:

1) неравенства $f(x)<g(x)$ и $g(x)>f(x)$ – равносильны;

2) неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)-g(x)<0$ – равносильны;

3) если $m>0$, то неравенства $f(x)<g(x)$ и $mf(x)<mg(x)$ – равносильны;

4) если $m<0$, то $f(x)<g(x)$ и $mf(x)>mg(x)$ – равносильны;

5) неравенства $f(x)<g(x)$ и $f(x)+h(x)<g(x)+h(x)$ – равносильны;

6) неравенства $f(x)<g(x)$ и $(f(x))^{2n+1}<(g(x))^{2n+1}$ – равносильны;

7) неравенство

$$f(x) < g(x), \qquad (7.2)$$

где $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$,

равносильно неравенству

$$(f(x))^{2n} < (g(x))^{2n},\ n \in \mathbf{N}. \qquad (7.3)$$

Аналогичные свойства имеют место для всех остальных неравенств.

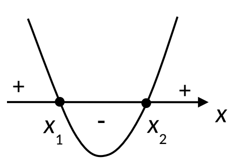
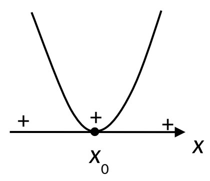
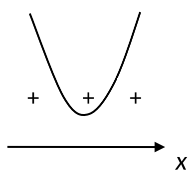
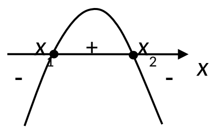
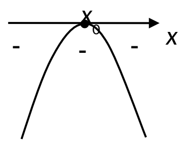
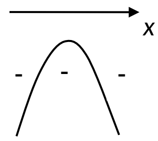
Неравенство вида

$ax + b < cx + d\ (\leq, >;\ \geq)$,

где $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R}$, называется ***линейным неравенством***.

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0\ (\geq, <;\ \leq)$ называется ***квадратным неравенством***.

В основе решения квадратного неравенства лежит графический метод. В зависимости от знака коэффициента *a* и дискриминанта *D* возможен один из шести случаев расположения графика функций $y = ax^2 + bx + c$.

a	D		
	$D > 0$ x_1, x_2 – корни	$D = 0$ x_0 – корень	$D < 0$ нет корней
$a > 0$			
$a < 0$			

Решение квадратного неравенства находят по расположению соответствующего графика функции относительно оси *Ox*.

Неравенство

$$P_n(x) > 0\ (\geq, <;\ \leq), \qquad (7.4)$$

где $P(x)$ – многочлен степени $n > 2$, называется ***неравенством высшей степени***.

Основной метод решения неравенств – ***метод интервалов***. Он состоит в следующем:

1. Многочлен $P(x)$ необходимо разложить на множители. Допустим, получено неравенство

$$A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot (ax^2 + bx + c) > 0,$$

где $A,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$, квадратный трехчлен имеет $D < 0$.

2. Коэффициент *A* и квадратный трехчлен следует «отбросить» (поделить на них). Если $A < 0$ или $a < 0$, то знак неравенства при этом изменяется на противоположный.

Допустим, что приходим к неравенству вида

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) < 0, \qquad (7.5)$$

где корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ расположены в порядке возрастания.

3. Корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ наносят на числовую ось. Справа от самого большого корня x_k ставят знак «+» над промежутком, далее идет чередование знаков.

4. Необходимо нарисовать кривую знаков.

5. Штрихуют те промежутки, которые отвечают смыслу неравенства.

6. Записывают ответ в виде промежутка, объединения промежутков (если их несколько) или множества из отдельных точек.

Если в результате преобразований неравенство приняло вид

$(x-x_1)^{n_1}\cdot(x-x_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{n_k}>0,$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$ и $x_1, x_2, \ldots, x_k$ расположены в порядке возрастания, то для решения используют ***обобщенный метод интервалов***, который состоит в следующем:

1. Корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ наносят на числовую ось.

2. Справа от самого большого корня x_k ставят над промежутком знак «+»:

а) если n_k *– нечетное число*, то при «переходе» через корень x_k *знак изменится на противоположный* (т. е. следующий промежуток отметим знаком «–»);

б) если n_k *– четное число*, то при «переходе» через корень x_k *знак не изменится*;

в) аналогично при «переходе» через остальные корни.

3. Необходимо нарисовать кривую знаков.

4. Штрихуют те промежутки, которые соответствуют смыслу неравенства.

5. Ответ записывают в виде промежутка, объединения промежутков (если их несколько) или множества из отдельных точек.

Метод интервалов – частный случай обобщенного метода интервалов.

Неравенство типа

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0 \ (\geq; <; \leq), \qquad (7.6)$$

где $P(x), Q(x)$ – некоторые многочлены, называется ***дробно-рациональным*** неравенством.

Его запись (7.6) называется ***стандартным видом дробно-рационального неравенства***.

Основными методами решения данных неравенств являются:

- метод интервалов (или обобщенный метод интервалов);
- метод замены переменной.

При решении строгих неравенств типа (7.6) вначале их записывают в виде

$P(x)\cdot Q(x)>0 \ (<0),$

а затем используют метод интервалов или обобщенный метод интервалов.

Решение нестрогих неравенств

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0 \quad (\leq 0)$$

сводится к решению системы

$$\begin{cases} P(x)\cdot Q(x)\geq 0, \ (\leq 0), \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

В любом случае, при изображении нулей знаменателя на числовой оси, точки, представляющие их, выкалываются.

Неравенства вида $g(x)\leq f(x)\leq \upsilon(x)$ называются ***двойными*** неравенствами, они равносильны системе:

$$\begin{cases} f(x)\geq g(x), \\ f(x)\leq \upsilon(x). \end{cases}$$

Решением системы неравенств называют такие значения переменной, при которых ***каждое*** из заданных неравенств обращается в верное числовое неравенство.

При ***решении совокупности*** неравенств полученные решения каждого неравенства объединяются.

Пример 1. Решить неравенство $(x-1)^2\cdot(x-2)^2\geq(x-1)^2\cdot(6-2x).$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству:

$(x-1)^2\cdot\left(x^2-2\right)-(x-1)^2\cdot(6-2x)\geq 0.$

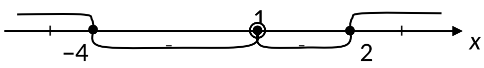
Преобразуем его разложив на множители:

$(x-1)^2\cdot\left(x^2-2-6+2x\right)\geq 0;$

$(x-1)^2\cdot\left(x^2+2x-8\right)\geq 0;$

$(x+4)\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)\geq 0.$

Используем обобщенный метод интервалов.



Заметим, что $x=1$ – двукратный корень, при переходе через данное значение знак не меняется. Поскольку неравенство нестрогое, в качестве решения подходят также те значения, при которых многочлен обращается в 0, т. е. $x=1$.

Получаем ответ $x\in\left(-\infty;-4\right]\cup\left\{1\right\}\cup\left[2;+\infty\right)$.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{x^3-1+(x-1)^2}{\sqrt{x^2-4}}<0.$

Решение. ОДЗ: $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

С учетом ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству:

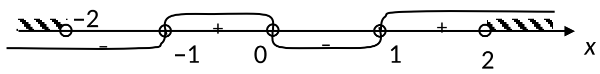
$x^3-1+(x-1)^2<0;$

$(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+(x-1)^2<0;$

$(x-1)\cdot\left(x^2+x\right)<0;$

$(x+1)\cdot x\cdot(x-1)<0.$

Методом интервалов решаем последнее неравенство, учитывая ОДЗ.



Получаем решение $x\in(-\infty;-2)$.

Пример 3. Найти наибольшее решение системы неравенств

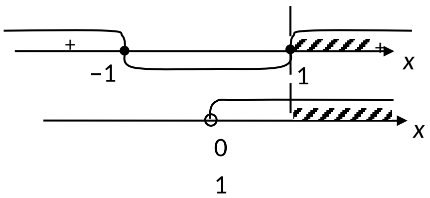
$$\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x^2}\leq 0,\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}\geq 0.\end{cases}$$

Решение. Заданная система равносильна системе:

$$\begin{cases}x^4-1\leq 0,\\ x\neq 0;\\ x\geq 0;\end{cases}\quad\begin{cases}(x^2-1)\cdot(x^2+1)\leq 0,\\ x\neq 0;\\ x\geq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+1)\cdot(x-1)\leq 0,\\ x>0.\end{cases}$$

Решением является промежуток: $(0;1]$. Наибольшее значение на данном промежутке $x=1$.



Неравенства с модулем

I тип: неравенство содержит некоторое выражение $f(x)$ под модулем и число вне модуля:

$$|f(x)|<a,\ \text{где}\ a\in\mathbf{R}. \qquad (7.7)$$

Решение зависит от знака числа *a*.

1. Если $a\leq 0,$ то неравенство (7.7) не имеет решений.

2. Если $a>0,$ то неравенство (7.7) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$$

$$|f(x)| \le a, \text{ где } a \in \mathbf{R}. \qquad (7.8)$$

1. Если $a < 0,$ то неравенство (3.28) не имеет решений.

2. Если $a = 0,$ то неравенство (3.28) равносильно уравнению $f(x) = 0.$

3. Если $a > 0$, то неравенство (3.28) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \ge -a, \\ f(x) \le a. \end{cases}$$

$$|f(x)| > a, \text{ где } a \in \mathbf{R}. \qquad (7.9)$$

1. Если $a < 0,$ то решением неравенства (7.9) является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x).$

2. Если $a = 0,$ то решением неравенства (7.9) является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x)$ таких, что $f(x) \ne 0.$

3. Если $a > 0,$ то неравенство (7.9) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) < -a, \\ f(x) > a. \end{array}\right.$$

$$|f(x)| \ge a, \text{ где } a \in \mathbf{R}. \qquad (7.10)$$

1. Если $a \le 0,$ то решением неравенства является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x).$

2. Если $a > 0,$ то неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le -a, \\ f(x) \ge a. \end{array}\right.$$

II тип: неравенство, которое содержит выражение с переменной под знаком модуля и вне его:

$$|f(x)| > g(x), \qquad (7.11)$$

где $f(x), g(x)$ – некоторые выражения с переменной x.

Для решения неравенств типа (7.11) можно использовать следующие способы.

1-й способ: используя определение модуля, получаем равносильную совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

2-й способ: решаем аналогично решению неравенства (7.9) при дополнительном ограничении на знак выражения $g(x)$:

1. Если

$$g(x) < 0, \qquad (7.12)$$

то решением является множество всех значений x из ОДЗ выражения $f(x),$ которые удовлетворяют условию (7.12).

2. Если

$$g(x) = 0,$$

то решением является множество всех значений x, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \ne 0. \end{cases}$$

3. Если $g(x) > 0,$ решение определяется системой

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x), \\ f(x) > g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответом является объединение всех решений, полученных на этапах 1–3.

3-й способ: метод интервалов.

Для решения необходимо:

1) найти значения x, для которых $f(x) = 0;$

2) найденные значения x нанести на числовую ось;

3) определить знак выражения $f(x)$ на всех полученных промежутках;

4) нарисовать кривую знаков;

5) раскрыть модуль, пользуясь рисунком, и получить соответствующее неравенство, которое следует решить вместе с условием принадлежности переменной x определенному промежутку;

6) в ответе неравенства указать совокупность полученных решений.

III тип: неравенство содержит несколько модулей и решается двумя способами:

1-й способ: можно использовать определение модуля и решать совокупность систем неравенств. Этот способ, как правило, не является рациональным.

2-й способ: использовать метод интервалов. Необходимо нарисовать столько числовых осей и кривых знаков, сколько модулей содержится в неравенстве. Для каждого промежутка следует решать полученное после раскрытия модулей неравенство при условии, что переменная x принадлежит конкретному промежутку. В ответе указывают объединение всех полученных решений.

IV тип: неравенство вида

$$A|f(x)| > B|g(x)|, \text{ где } A, B > 0,\ A, B \in \mathbf{R}. \qquad (7.13)$$

решается двумя способами:

1-й способ: метод интервалов.

2-й способ: согласно теореме равносильности неравенство можно возводить в квадрат:
$A^2|f(x)|^2 > B^2|g(x)|^2.$

Решение неравенства (7.13) сводится к решению неравенства
$A^2(f(x))^2 > B^2(g(x))^2.$

Аналогично решают неравенства IV типа (7.13), если они заданы со знаками $\geq, <, \leq$.

V тип: неравенства, решаемые заменой переменной.

В таком случае выражение с модулем обозначают новой переменной. Неравенство с новой переменной решают до конца (т. е. до возможного получения промежутков решения для новой переменной). Затем возвращаются к старой переменной и решают полученные неравенства с модулем как неравенства I типа.

Пример 1. Решить неравенства:

1) $|x - 2| \leq 5;$ 2) $|x^2 - 2x - 6| > 9;$

3) $|x - 1| \leq \dfrac{1}{x - 1};$ 4) $x^2 - 8|x| + 7 \geq 0;$

5) $\left|\dfrac{x + 5}{x - 3}\right| > 1 - \dfrac{2}{|x - 3|};$ 6) $\left|\dfrac{x - 1}{x}\right| + 5\left|\dfrac{x}{x - 1}\right| \leq 6.$

Решение. 1) Решаем как неравенство I типа:

$|x - 2| \leq 5;\ \begin{cases} x - 2 \leq 5, \\ x - 2 \geq -5; \end{cases} \begin{cases} x \leq 7, \\ x \geq -3. \end{cases}$

Получаем ответ: $x \in [-3; 7]$.

2) Решаем как неравенство I типа:

$|x^2 - 2x - 6| > 9;\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 6 > 9, \\ x^2 - 3x - 6 < -9; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 15 > 0, \\ x^2 - 2x + 3 < 0. \end{array}\right.$

Второе неравенство совокупности не имеет решения (соответствующая парабола лежит над осью Ox). Первое неравенство сводится к виду
$(x + 3)(x - 5) > 0.$

Его решение: $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty),$ это и есть ответ.

3) Решаем как неравенство II типа. Оно имеет решение, если $x - 1 > 0.$ Поэтому получаем равносильную систему:

$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x - 1 \leq \dfrac{1}{x - 1}, \\ x - 1 \geq -\dfrac{1}{x - 1}; \end{cases} \begin{cases} x - 1 > 0, \\ x - 1 - \dfrac{1}{x - 1} \leq 0, \\ x - 1 + \dfrac{1}{x - 1} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x - 1 > 0, \\ \dfrac{(x - 1)^2 - 1}{x - 1} \leq 0, \\ \dfrac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1} \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1} \leq 0, \\ \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x - 1 > 0, \\ x(x - 2) \leq 0, \\ x^2 - 2x + 2 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ 0 \leq x \leq 2, \\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$

Получаем ответ: $x \in (1; 2]$.

4) Заданное неравенство может быть записано в виде
$|x|^2 - 8|x| + 7 \geq 0.$

Заменим переменную $y = |x|.$ Решаем неравенство

$y^2 - 8y + 7 \geq 0.$

Его решение $\left[\begin{array}{l} y \leq 1, \\ y \geq 7. \end{array}\right.$

Возвращаемся к переменной *x* и решаем совокупность $\left[\begin{array}{l} |x| \leq 1, \\ |x| \geq 7. \end{array}\right.$

Получаем $\left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1, \\ x \leq -7, \\ x \geq 7, \end{array}\right.$

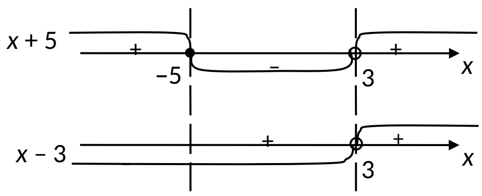
т. е. приходим к ответу $x \in (-\infty; -7] \cup [-1; 1] \cup [7; +\infty).$

5) Для решения неравенства $\left|\dfrac{x+5}{x-3}\right| > 1 - \dfrac{2}{|x-3|}$ используем метод интервалов. Запишем неравенство в виде

$$\frac{|x+5|}{|x-3|} > 1 - \frac{2}{|x-3|}.$$

Построим числовые прямые и определим знаки выражений, стоящих под модулем.

ОДЗ: $x \neq 3.$



а) рассмотрим неравенство на 1-м промежутке. Получаем систему

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -5], \\ \dfrac{x+5}{x-3} > 1 + \dfrac{2}{x-3}. \end{cases}$$

Решаем неравенство

$$\frac{x+5}{x-3} - 1 - \frac{2}{x-3} > 0;$$

$$\frac{x+5-x+3-2}{x-3} > 0;$$

$$\frac{6}{x-3} > 0.$$

Получаем $x > 3.$

Система сводится к системе

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -5], \\ x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

На данном промежутке решений нет.

б) $\begin{cases} x \in (-5; 3), \\ -\dfrac{x+5}{x-3} > 1 + \dfrac{2}{x-3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-5; 3), \\ \dfrac{2(x-2)}{x-3} < 0; \end{cases}$

$$-\frac{x+5}{x-3} - 1 - \frac{2}{x-3} > 0; \quad \frac{-2x-4}{x-3} > 0; \quad \frac{x+2}{x-3} < 0.$$

Если $x \in (-5; 3),$, то $x - 3 < 0.$ С учетом рассматриваемого промежутка имеем:

$$\begin{cases} x \in (-5; 3), \\ x - 3 < 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

Получаем $x \in (2; 3).$

в) $\begin{cases} x \in (3; +\infty), \\ \dfrac{x+5}{x-3} > 1 - \dfrac{2}{x-3}; \end{cases}$

$$\frac{x+5}{x-3} - 1 + \frac{2}{x-3} > 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{10}{x-3} > 0, \\ x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

Решением является промежуток: $x \in (3; +\infty).$

Объединим полученные решения и приходим к ответу: $x \in (2; 3) \cup (3; +\infty).$

6) $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| + 5\left|\dfrac{x}{x-1}\right| \le 6.$

ОДЗ: $\begin{cases} x \ne 0, \\ x \ne 1. \end{cases}$

Введем новую переменную:

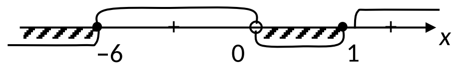
$\left|\dfrac{x-1}{x}\right| = y,$ тогда $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{y}$ и приходим к неравенству вида

$y + \dfrac{5}{y} \le 6.$

Решаем его

$\dfrac{y^2 + 5 - 6y}{y} \le 0;$ $\quad \dfrac{(y-1)\cdot(y+6)}{y} \le 0;$ $\quad \begin{cases} (y+6)\cdot y \cdot (y-1) \le 0, \\ y \ne 0. \end{cases}$

Используем метод интервалов.



$y \in (-\infty; -6] \cup (0; 1].$ Запишем полученное решение в виде совокупности: $\left[\begin{array}{l} y \le -6, \\ 0 < y \le 1. \end{array}\right.$

Вернемся к переменной *x*:

$\left[\begin{array}{l} \left|\dfrac{x-1}{x}\right| < -6 - \text{ данное неравенство решений не имеет,} \\ 0 < \left|\dfrac{x-1}{x}\right| \le 1 - \text{ неравенство равносильно системе :} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{x}\right| > 0, \\ \left|\dfrac{x-1}{x}\right| \le 1; \end{cases}$$

$\left|\dfrac{x-1}{x}\right| > 0$ – выполняется при любых $x \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}.$

С учетом ОДЗ второе неравенство системы равносильно системе

$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x} \le 1, \\ \dfrac{x-1}{x} \ge -1, \\ x \ne 0, \\ x \ne 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dfrac{x-1-x}{x} \le 0, \\ \dfrac{x-1+x}{x} \ge 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{x} \le 0, \\ \dfrac{2x-1}{x} \ge 0, \\ x \ne 0, \\ x \ne 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{x} \ge 0, \\ x \ne 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x > 0, \\ x - \dfrac{1}{2} \ge 0, \\ x \ne 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2}, \\ x \ne 1. \end{cases}$

Получаем ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty).$

Задания

I уровень

1.1. Решите неравенство:

1) $\dfrac{9}{x} \ge \dfrac{x}{9};$ $\quad$ 2) $\dfrac{23}{1-x} \ge \dfrac{3}{4};$ $\quad$ 3) $\dfrac{3}{5+x} < \dfrac{2x}{x-1};$

4) $\dfrac{1}{7-28x^2} \le \dfrac{4}{5};$ $\quad$ 5) $x - 5 + \dfrac{6}{x} < 0;$ $\quad$ 6) $\dfrac{x^2}{(x+1)^2} > 1;$

7) $\dfrac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 8x + 15} \le 0;$ $\quad$ 8) $\dfrac{2}{x^2 - x + 1} - \dfrac{1}{x+1} \ge \dfrac{2x-1}{x^3+1}.$

1.2. Решите систему и совокупность неравенств:

1) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0, \\ x^2 - x - 6 \ge 0; \end{cases}$ $\quad$ 2) $\begin{cases} (x^2 - 3x - 2)\cdot(x^2 - 3x + 1) < 10, \\ x^2 \le 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+4}{3} > x-5, \\ 3x-\dfrac{2x-5}{3} > 6-0{,}2x; \end{cases}$ 4) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-7>0, \\ 2x+19>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-5\ge 0, \\ 2x-16\le 0; \end{cases} \end{array} \right.$

5) $\begin{cases} x^2>25, \\ x^2+6x\le 27; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-5}<\dfrac{5}{7-x}, \\ x^4+3x^3<4x^2; \end{cases}$

7) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2}>4, \\ \dfrac{x}{20}-\dfrac{5}{x}\le 0; \end{array} \right.$ 8) $\begin{cases} \dfrac{4}{6-x}>\dfrac{6}{x}, \\ 9-4x^2\ge 0. \end{cases}$

1.3. Решите неравенство:

1) $|2+x|+2\ge 0;$ 2) $|3-x|+1<0;$

3) $|3-x|\le 2;$ 4) $|2x-1|>5;$

5) $\left|2(x-2)\right|\le x^2-4;$ 6) $|0{,}5x-0{,}3|>|5-x|;$

7) $2\le|7-2x|<5;$ 8) $|x+4|-2x\ge 3;$

9) $|x-1|+|2-x|>3;$ 10) $|2x-5|-4\le|7-2x|.$

1.2. Решите систему или совокупность неравенств:

1) $\begin{cases} 3-|x+4|\ge 0, \\ |x-1|-|x+4|<0; \end{cases}$ 2) $\left[\begin{array}{l} |x-1|<6, \\ 3-|2-x|>4-x. \end{array} \right.$

II уровень

2.1. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x(x-2)}{\left(x^2-2x+1\right)\cdot(x-3)^2}\ge 0;$ 2) $\dfrac{(x-3)^3\cdot(x-2)}{(x+1)^4\cdot(x+5)}>0;$

3) $\left(x^2-4x+4\right)\cdot\left(3x^2-2x-1\right)\le 0;$ 4) $1\le\dfrac{5x^2-3x+1}{x^2+2}\le 3;$

5) $\dfrac{\left(x^2+2x+1\right)\cdot\left(x^2-6x+9\right)}{x-3}\ge 0;$ 6) $5-x<x^2\le 16;$

7) $\dfrac{x^2(x-2)\cdot(x-3)^4\cdot(5-x)^5}{(2-x)^3}<0;$ 8) $5x-20\le -x^2\le 8x;$

9) $\dfrac{(x-5)^2\cdot\sqrt{x^2-3x+2}}{-x^2+4x-4}>0;$ 10) $216x^6+19x^3\le 1;$

11) $\left(x^2+7x-8\right)^2+\left(x^3+2x-3\right)^2\le 0;$

12) $\left(6-x-x^2\right)^2+\left(x^3+x^2-7x+2\right)\le 0.$

2.2. Решите систему и совокупность неравенств:

1) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+1\le 0, \\ x-2>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-4\ge 0, \\ 2x-3\le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+2\ge 5x-3, \\ 2-3x<7-2x; \end{cases} \end{array} \right.$ 2) $\begin{cases} (x-0{,}5)^2\cdot(3x+9)>(x+3)\cdot\left(4x^2-1\right), \\ \dfrac{5x+1}{x^2-3x-4}\le -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+1}{1-x^2}\le 1, \\ \dfrac{(2x+6)\sqrt{x}}{(-5-x)^3\cdot(10-x)^2}>0; \end{cases}$ 4) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2x^2}\ge\dfrac{2}{2x^2+32}, \\ \dfrac{4}{4x^2+2x-2}+\dfrac{1}{3+2x-x^2}<0. \end{array} \right.$

2.3. Найдите сумму целочисленных решений неравенства:

1) $\dfrac{x+2}{\sqrt{10-3x-x^2}} \le 0$; 2) $\left(x^2-16\right)\sqrt{3-x} \le 0$.

2.4. Найдите количество целых решений неравенства

$$-\frac{3}{x^2+2} \le \frac{1}{1-2x} \le \frac{1}{x^2},$$

принадлежащих промежутку $(-4;\ 5]$.

2.5. Решите неравенство:

1) $\left|\dfrac{3-2x}{x-4}\right| \ge 1$; 2) $\left|x^2+6x+8\right| \le -x^2-6x-8$;

3) $\sqrt{x^2-6x+9}+x < |12-4x|$; 4) $\dfrac{\sqrt{9-x^2}\cdot\left(x^2-|x|-12\right)}{x-3} \ge 0$;

5) $(|x-3|-6)\cdot(|7-x|+4) < 0$; 6) $\left|\dfrac{x+7}{x-3}\right| > \dfrac{1}{x+3}$;

7) $|2-|3+x||-5 \le 0$; 8) $4-||2x+4|-8| < 0$;

9) $|x-2|-\sqrt{x^2} \ge |4-3x|$; 10) $\left|x^2-4\right|+|x-2| > 5-x$.

2.6. Решите систему или совокупность неравенств:

1) $\begin{cases} |x-2| < \dfrac{3}{|x-1|-3}, \\ \left|x^2-1\right|-\left|4-x^2\right| \ge 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-|4x+2| > -5, \\ \left|x^2-1\right| > x^2+7; \end{cases}$

3) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{|x-5|}{\sqrt{x^2+2x+1}} \le 1, \\ |x-3|-|1-x|+|x+4| > 0; \end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l} \sqrt{5-x}\,(1-|x|) \ge 0, \\ \dfrac{1}{3-|5-x|} > \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$

III уровень

3.1. Найдите сумму всех натуральных решений неравенства:

1) $\dfrac{x^3-x^2+5x}{x^2-x-6}\cdot\dfrac{x^3}{\sqrt{5-x}} \ge 0$; 2) $\dfrac{x^3-2x^2-2x+1}{(|3+x|-4)^4\cdot\sqrt{9-x^2}} > 0$;

3) $\dfrac{y^2-x^2+6x-7}{x+5} < y^2$, где $y=\sqrt{3-x}$.

3.2. Найдите все значения *a*, при которых неравенство имеет единственное решение:

$$\left(x^2+8x+17\right)\cdot\left(y^2-4y+a\right) \le 18.$$

3.3. Определите, при каких значениях параметра a всякое решение неравенства $6x^2+x-1<0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2-(1-3a)x+a^2>0$.

3.4. Решите систему неравенств в зависимости от параметра *a*:

$$\begin{cases} x^2+(a-2)x-a<0, \\ x^2-(3-a)x+a+1 \le 0. \end{cases}$$

3.5. Определите, при каких значениях параметра a неравенство выполняется для любых x:

$$\frac{2x^2+ax-1-a}{x^2-2x+4} > -2.$$

3.6. Решите неравенство:

1) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{4-x^2}\right|\le 3;$ 2) $\left|1-\left|x^2-4x-4\right|\right|>1;$

3) $0<\left|2|x-2|+5\right|\le 10;$ 4) $\sqrt{x-3}\cdot\left|3-\dfrac{x^2+5x-4}{x^2+6}\right|>0;$

5) $\dfrac{|4-x|-2}{1+|x+2|}<|x|;$ 6) $\dfrac{x^4-5\sqrt{x^4-2x^2+4}-2x^2+4}{|5-0{,}5x|}\ge 0;$

7) $|x-1|\le\dfrac{|x|^2-2|x|-3}{\sqrt{(5-x)^2}};$ 8) $\dfrac{(x-0{,}3)\cdot(|x-1|-|-x|)}{(2x-4)^2}\le 0;$

9) $\sqrt{9x-x^2-8}\cdot\left(4-\left|x^2-3x-4\right|\right)\le 0.$

3.7. Определите, при каких значениях параметра a неравенство выполняется при всех $x\in\mathbf{R}$:

$$x^2-|x-a|+|x-2|+4>0.$$

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Математика в примерах и задачах. Часть 1: учебное пособие / Л. И. Майсеня, А. А. Ермолицкий, И. Ю. Мацкевич [и др.] ; под редакцией Л. И. Майсеня. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 359 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35494.html.

Перечень дополнительной литературы

1.Чулков, П. В. Практические занятия по элементарной математике: учебное пособие / П. В. Чулков. — Москва: Прометей, 2012. — 102 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/18603.html.

2. Нестандартные задачи по математике (для подготовки студентов к олимпиадам): учебное пособие / Ю. А. Чиркунов, Ю. М. Вахромеев, Т. В. Вахромеева [и др.]. — Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), ЭБС АСВ, 2017. — 109 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/85877.html