МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске

Методические указания
по выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Математика»

Направление подготовки 08.03.01 Строительство
Направленность (профиль) Строительство зданий и сооружений
Квалификация выпускника Бакалавр
Форма обучения очная
Год начала обучения 2020
Изучается в 1,2 семестрах

Пятигорск 2020

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры физики, электроэнергетики и электротехники

протокол № ___ от _______________2020

Зав.кафедрой ФЭиЭ _________________________________А.В.Пермяков

Составитель: доцент кафедры ФЭиЭ Манторова И.В.

Содержание

Введение

Дисциплина «Математика» входит в базовую часть дисциплин подготовки бакалавра направления 08.03.01 «Строительство». Ее освоение происходит в 1,2 семестрах.

Задачи освоения дисциплины: формирование представлений о роли и месте математики в современном мире, этапах развития, универсальности ее понятий и представлений; формирование умений конструирования и анализа математических моделей объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой будущей профессиональной деятельности; овладение навыками точного и сжатого выражения математической мысли в устном и письменном изложении, с использованием соответствующей символики.

В результате освоения содержания дисциплины студент должен:

знать: элементы линейной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа; основы математической статистики; методологию организации, проведения и обработки данных теоретического и экспериментального исследования.

уметь: эффективно использовать методы математического анализа и математического моделирования в профессиональной деятельности; конструировать и анализировать математические модели объектов, систем и процессов при решении задач, связанных со сферой профессиональной деятельности.

владеть: навыками использования компьютерных программ для представления и математической обработки информации; навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач.

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математика» составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, рабочим учебным планом и рабочей программой дисциплины «Математика».

Тематический план лабораторных работ

№ Темы	Наименование работы	Обьем часов	Форма проведения
1 семестр			
1	Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы.	1,5	
1	Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.	1,5	Решение разноуровневых задач
2	Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы.	1,5	
2	Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	1,5	
3	Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями.	1,5	
3	Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.	1,5	
4	Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.	1,5	
4	Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.	1,5	
4	Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Общее уравнение линий второго порядка.	1,5	
5	Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.	1,5	
5	Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.	1,5	
5	Прямая линия в пространстве. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой.	1,5	
5	Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.	1,5	
7	Вычисление предела последовательности. Число е.	1,5	
8	Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функций.	1,5	Решение разноуровневых задач
8	Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших	1,5	

	порядков.		
9	Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции.	1,5	
9	Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.	1,5	
	Итого за 1 семестр	27	3

Лабораторная работа № 1.

Действия над матрицами. Вычисление ранга матрицы.

Цель работы: выработать умение применять алгоритм выполнения действий над матрицами и вычисления ранга матрицы и применять умения для решения практических задач.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Прямоугольная таблица из $m \cdot n$ чисел, содержащая m – строк и n столбцов называется *матрицей* и обозначается

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко матрицу обозначают $A = \| a_{ij} \|$, $i = 1,2,\ldots, m$; $j = 1,2,\ldots, n$.

Сложение матриц.

Пусть даны две матрицы A и B одинакового строения. Их суммой называется матрица $C = A + B$ того же строения, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, т.е. если $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то $A + B = C = \|c_{ij}\|$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+1 & 5-3 \\ 4+1 & 1-2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов. Действие сложения матриц может быть распространено на случай любого конечного числа слагаемых одинаковых строений.

Разностью B - A матриц B и A (одинаковых строений) называется такая матрица X, что

$$A + X = B.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица O, все элементы которой равны нулю называется нулевой матрицей. Очевидно, $A + O = A$, $A - A = O$.

Разность $O - A$ обозначается через $-A$. Матрица $-A$ называется *противоположной* матрице A.

Умножение матриц.

а) Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число α, надо умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\alpha \| a_{ij} \| = \| \alpha\, a_{ij} \|$$

Пример. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$, $\alpha A = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

б) Умножение двух матриц.

Умножение матрицы B на матрицу A возможно только в том случае, когда число столбцов в матрице B равно числу строк в матрице A.

Элемент матрицы $C = B \cdot A$, расположенный в i-ой строке и j –ом столбце (т.е. C_{ij}) равен сумме произведений элементов i – ой строки матрицы B на соответствующие элементы j – го столбца матрицы A.

Следует отметить, что умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$.

Например $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ -1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -11 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

Рассмотрим некоторую, *не обязательно квадратную* матрицу A. Выберем какие-нибудь S номеров строк $i_1, i_2, \ldots, i_s$ и S номеров столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_s$.

<u>Определение</u>. *Минором порядка* S матрицы A (соответствующим выбранным строкам и столбцам) называется определитель порядка S, образованный элементами, стоящими на пересечении выбранных строк и столбцов, т.е. число

$$M^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_s} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_s} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & \ldots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}.$$

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка S, сколькими способами можно выбрать номера строк $i_1, i_2, \ldots, i_s$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_s$.

<u>Определение</u>. В матрице A размеров $m \times n$ минор порядка S называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $s+1$ равны нулю или миноров порядка $s+1$ у матрицы A вообще нет.

Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров, но все базисные миноры имеют один и тот же порядок. Действительно, если все миноры порядка $s+1$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка $s+2$, а, следовательно, и всех бóльших порядков.

<u>Определение</u>. *Рангом матрицы* называется порядок базисного минора, или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы, по определению, считают нулем.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$. Из определения ранга следует, что для матрицы A размеров $m \times n$ справедливо соотношение $0 \le r(A) \le \min(m, n)$.

Рассмотрим способы вычисления ранга матрицы:

а) *Метод окаймляющих миноров*

Пусть в матрице найден минор M k-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

<u>Пример</u>. Найти ранг матрицы A методом окаймляющих миноров.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Существует только один минор третьего порядка, окаймляющий выбранный минор M_2. Вычислим его.

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 7 \cdot (-2) -$$

$$- 3 \cdot 5 \cdot (-3) - 4 \cdot 7 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \cdot 7 = -35 - 24 - 42 + 45 + 28 + 28 = 0.$$

Значит, минор M_2 базисный, а ранг матрицы равен его порядку, т.е. $r(A)=2$.

Ясно, что перебирать таким способом миноры в поисках базисного – задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Существует, однако, более простой способ нахождения ранга матрицы – при помощи элементарных преобразований.

б) *Метод элементарных преобразований*

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называют следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановку строк;
4) такие же преобразования столбцов.

Преобразования 1 и 2 выполняются поэлементно.

Комбинируя преобразования первого и второго вида, мы можем к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк.

Теорема. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

Идея практического метода вычисления ранга матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

заключается в том, что с помощью элементарных преобразований данную матрицу A приводят к виду

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в котором «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Условимся называть матрицу B такого вида треугольной (иначе, ее называют диагональной, трапециевидной или лестничной). После приведения матрицы A к треугольному виду можно сразу записать, что $r(A)=r$.

В самом деле, $r(A)=r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга). Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11}\cdot b_{22}\cdot\ldots\cdot b_{rr}\neq 0,$$

а любой минор порядка $r+1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B. Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B.

Пример: Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{bmatrix}.$$

Решение: Поменяем местами первую и вторую строку (т.к. первый элемент второй строки −1 и с ней будет удобно выполнять преобразования). В результате получим матрицу, эквивалентную данной.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{bmatrix}.$$

Обозначим i-тую строку матрицы – C_i. Нам необходимо привести исходную матрицу к треугольному виду. Первую строку будем считать ведущей, она будет участвовать во всех преобразованиях, но сама остается без изменений.

На первом этапе выполним преобразования, позволяющие получить в первом столбце нули, кроме первого элемента. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2 $(C_2 - 2C_1)$, к третьей строке прибавим первую $(C_3 + C_1)$, а из третьей вычтем первую, умноженную на 3 $(C_3 - 3C_1)$. Получаем матрицу, ранг которой совпадает с рангом данной матрицы. Обозначим ее той же буквой A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Вычтем из четвертой строки вторую. При этом имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получена матрица треугольного вида, и можно сделать вывод, что $r(A) = 2$, т. е. числу ненулевых строк. Коротко решение задачи можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \times C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - 2C_1,\, C_3 + C_1,\, C_3 - 3C_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

A = и B = .

Вычислите следующие выражения:

а) ;

б) .

Задача 2. Даны матрицы

A = , B = , C=, D = , F = .

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) .

Задача 3. Даны квадратные матрицы 2–ого порядка

A = и B = .

Вычислите следующие выражения:

а) ;

б) ;
в) .
Задача 4. Даны матрицы

A = , B = , C = , D = (–1 , 2, 3), X = .

Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):
а) 2;
б) ;
в) ;
г) ;
д) ;
е) .
Задача 5. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка
A = и B =
Вычислите , и .
Задача 6. Даны матрицы
A = , B = , C = , D = , F =
Задача 7. Вычислите следующие матричные выражения (если какая–нибудь операция не определена, объясните, почему):
а) и ;
б) и ;
в) и ;
г) и ;
д) ;
е) .
Задача 8. Вычислить ранг матрицы двумя способами: с помощью элементарных преобразований и методом окаймления миноров.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 18 & -6 & -12 & -24 \\ 0 & 6 & 7 & 23 & 11 \end{pmatrix};A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 13 & 0 \\ 7 & 7 & -6 & 3 & 12 \\ -16 & -11 & -17 & 56 & -36 \end{pmatrix}$$

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 2.

Вычисление определителей разложением по элементам строки (столбца). Обратная матрица.

Цель работы: выработать умение применять алгоритмы вычисления определителя n-го порядка и обратной матрицы и применять умение для решения практических задач.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:

ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Вычисление определителей

Если в матрице число строк равняется числу столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы (без перестановок) называется определителем матрицы А.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заметим, что не квадратная матрица не имеет определителя.

Число $a_{11}\ a_{22}\ -\ a_{21}\ a_{12}$ называется определителем второго порядка и обозначается символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Схематически формула дл я вычисления определителя третьего порядка выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель третьего порядка также равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Например, разложение определителя по элементам первой строки:

$$\Delta = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Разложением по элементам строки или столбца можно вычислить определитель любого порядка. В качестве примера рассмотрим определитель четвертого порядка и разложим его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(5+0-3-4-0+15)+$$

$$+1(5+0-9-12-0+10)+2(15+8+9-36-3-10)-3(0-2+3+9-0-1)=$$

$$=13-6+2\cdot(-17)-3\cdot 9 = 13-6-34-27 = -54$$

Рассмотренный определитель можно вычислить другим способом. А именно, умножим элементы первой строки на (-1) и сложим с элементами второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки и, наконец, умножим элементы первой строки на (-3) и сложим с соответствующими с элементами четвертой строки. Тогда получим определитель 4-го порядка, в первом столбце которого стоят нули, кроме первой строки, т.е. имеем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 24-30+36+12-36-60 = -54$$

Пусть задано некоторое число a и пусть существует такое число m, что am = 1. Число m в этом случае называется обратным для a. Если, теперь, рассмотрим квадратную матрицу n–го порядка, то единичная матрица E будет играть роль единицы. Естественно поставить вопрос о существовании обратной матрицы, т.е. такой матрицы, которая в произведении с данной дает единичную матрицу E.

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица X (того же порядка n) называется обратной для A, если AX = XA = E.

Квадратная матрица n-го порядка называется особенной (вырожденной), если ее определитель равен нулю. Если же Δ (A) $\neq$ 0, то A называется несобственной (невырожденной) матрицей.

Для нахождения обратной матрицы, рассмотрим матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ и пусть $$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Обратной матрицей A^{-1} будет матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где Aij есть алгебраическое дополнение элемента aij определителя $\Delta = \Delta$ (A).

Пример. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+6+0-3-0-2 = -1 \neq 0$$

Находим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Проверка: А А-1 = Е

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12 \\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0 \\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Даны квадратные матрицы 2– ого порядка А = и В = .
Вычислите следующие выражения:
а) ;
б)
в) .
Проверьте, что .
Задача 2. Даны квадратные матрицы 3– го порядка
А = и В =
Вычислите следующие выражения:
а) ;
б)
в) .
Проверьте, что .

Задача 3. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Задача 4.

Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 41 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 155 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 3.

Решение невырожденных систем линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы.

Цель работы: выработать умение решать невырожденные СЛУ матричным методом и и методом Крамера применять умения для решения практических задач.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что основная матрица A невырожденная. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Помножив матричное уравнение $A \cdot X = B$ на матрицу A^{-1} слева, получим формулу, на которой основан матричный метод решения систем линейных уравнений:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

<u>Замечание.</u> Отметим, что матричный метод решения систем линейных уравнений в отличие от метода Гаусса имеет ограниченное применение: этим методом могут быть решены только такие системы линейных уравнений, у которых, во-первых, число неизвестных равно числу уравнений, а во-вторых, основная матрица невырожденная.

<u>Пример.</u> Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Задана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Основная матрица системы уравнений невырожденная, поскольку её определитель отличен от нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30.$$

Обратную матрицу A^{-1} составим одним из методов, описанных в пункте 3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}.$$

По формуле матричного метода решения систем линейных уравнений получим

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами: $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ — определитель матрицы системы и Δ_k — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой k–ого столбца столбцом свободных членов.

<u>Пример</u>. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 4x + y - 2z = 10 \end{cases}$$

<u>Решение</u>: Найдем основной и дополнительные определители.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 8 - 36 - 1 + 8 = -21$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 10 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30 - 9 + 20 - 90 - 5 + 12 = -42$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = -6-60+20+36-10+20=0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -30+10+24+60-3-40=21$$

По формулам Крамера имеем

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-42}{-21}=2; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{0}{-21}=0; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{21}{-21}=-1.$$

Ответ: $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Решить СЛУ матричным методом и методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4 \\ x_1+3x_2-x_3=11 \\ x_1-2x_2+2x_3=-7 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6 \\ 2x_1-x_2-x_3=-9 \end{cases}$

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 c. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 c. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 4.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель работы: выработать умение решать СЛУ методом Гаусса и применять умения для решения практических задач.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть:

Практически для решения систем линейных уравнений чаще всего применяется метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений:

Будем производить над системой следующие элементарные преобразования:

1. Вычеркивание уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$.
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.
3. Перемена местами двух уравнений.

Пусть теперь $a_{11} \neq 0$.(Если $a_{11} = 0$,то мы поменяем местами первое уравнение с тем уравнением, где коэффициент при x_1 отличен от нуля). Исключим теперь x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению прибавим первое уравнение, умноженное на ($-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$), затем прибавим к третьему уравнению первое, умноженное на ($-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$) и т.д. к последнему уравнению прибавим первое, умноженное на ($-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$). При этом получим систему

Далее, применив те же рассуждения к полученной системе, исключим из уравнений, начиная с третьего x_2 и т.д.

Продолжая этот процесс, мы придем к одному из двух случаев:

1. Либо после определенного шага получиться система, содержащая уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = в$ и $в \neq 0$. Тогда наша система не имеет решений, т.е. несовместна.
2. либо система не содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = в$ и $в \neq 0$. Тогда рано или поздно мы придем к системе

Возможны два случая:

a) $r = n$. Тогда последнее уравнение последней системы имеет вид: $c_{nn} x_n = a_n$, откуда $x_n = \dfrac{a_n}{c_{nn}}$. Из предпоследнего уравнения находим x_{n-1} и т.д. из первого уравнения системы находим x_1.

b) $r < n$. Тогда система имеет бесчисленное множество решений.

<u>Замечание</u>. С практической точки зрения процесс решения системы можно облегчить, если вместо преобразований над самой системой производить преобразования над соответствующей расширенной матрицей системы.

<u>Пример</u>. Решить систему методом Гаусса.

<u>Решение</u>. Рассмотрим расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножив первую строку на $-\frac{3}{2}$, затем умножив первую строку на $-\frac{5}{2}$, наконец, умножив первую строку на -1, сложим первую строку последовательно со второй, с третьей и с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

В последней матрице мы умножили вторую и третью строку на 2. Далее 1 и 2 строки оставляем без изменения. Сперва умножим вторую строку на $-\frac{3}{7}$ и сложим с третьей строкой, затем умножим вторую строку на $-\frac{2}{7}$ и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{20}{7} & -\frac{52}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{19}{7} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Последнюю матрицу мы получили, умножив третью строку на $\frac{1}{2}$ и сложив с четвертой строкой. Последняя четвертая строка означает, что мы имеем уравнение:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -7$$

следовательно, по сказанному выше система несовместна.

<u>Пример</u>. Решить методом Гаусса систему уравнений.

[illegible]

<u>Решение</u>. Рассмотрим расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножим сперва первую строку на (-1) и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей строкой и, наконец, умножим первую строку на (-2) и сложим с четвертой строкой. Получим

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторую матрицу мы получим сложив сперва вторую строчку с третьей, затем сложив вторую строчку с четвертой. Нулевые строчки выбрасываем. Остается система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \end{cases} \qquad (*)$$

Будем считать x_3 и x_4 свободными неизвестными, обозначая их: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$

Из второго уравнения системы (∗) найдем x_2

$x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2$

Подставив x_2 в первое уравнение, получим:

$x_1 + 2(10\alpha - 17\beta - 2) - 3\alpha + 5\beta = 1$ или

$x_1 + 20\alpha - 34\beta - 4 - 3\alpha + 5\beta = 1$ или

$x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5$.

Таким образом, данная система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5 \\ x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2 \end{cases} \qquad \alpha \in (R)$$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

1.Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 18 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13 \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$

2.Являются ли системы уравнений, соответствующие матрицам, получающимся в результате элементарных преобразований строк расширенной матрицы, эквивалентными? Обоснуйте ответ.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 5.

Линейные операции над векторами. Разложение вектора по ортам координатных осей. Действия над векторами, заданными проекциями.

Цель работы: выработать умение выполнять линейные операции над векторами; действия над векторами, заданными проекциями

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и

	технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

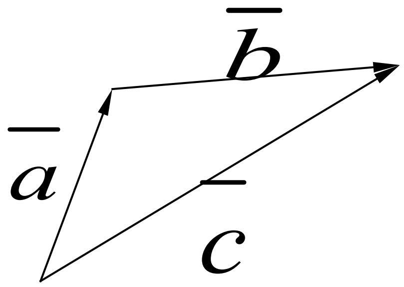
Направленный отрезок будем называть вектором и обозначать $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ *или* $\overline{a}$, $\overline{в}$, ...

Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают и обозначают $\overline{o}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину равную нулю.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых. Два вектора называются равными, если выполнены следующие три условия: 1) длины векторов равны, 2) векторы параллельны (коллинеарны), 3) векторы направлены в одну и ту же сторону.

1. Сложение векторов

Суммой $\overline{a} + \overline{в}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$ (правило треугольника) и записывают $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.



Сложение векторов обладает следующими основными свойствами:

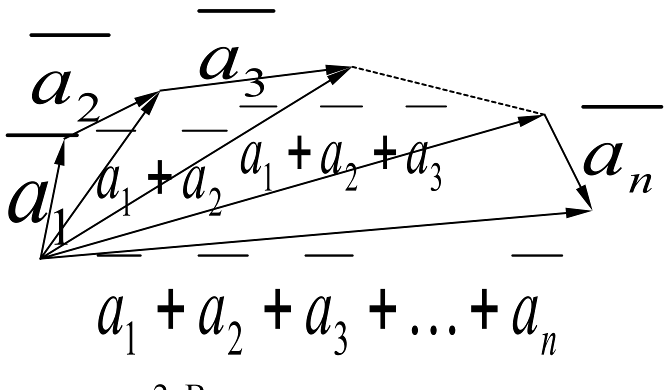
1. Коммутативность: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$

2. Ассоциативность: для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ выполняется равенство $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$

3. Прибавление нулевого вектора к любому вектору $\overline{a}$ не меняет последнего: $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$.

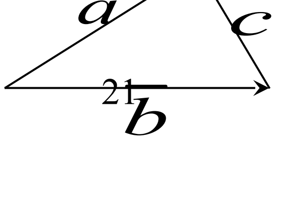
4. Сумма вектора $\overline{a}$ и противоположного вектора $\overline{a}^1$ равна нулевому вектору, т. е. $\overline{a} + \overline{a}^1 = 0$

Из второго свойства следует, что если даны векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots \overline{a_n}$, расположенные так, что конец предыдущего вектора является началом последующего, то сумма $\overline{a_1} + \overline{a_2} + \dots + \overline{a_n}$, будет представлять собой вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}_1$ в конец вектора $\overline{a}_n$.

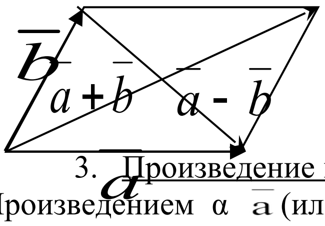


2. Вычитание векторов

Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой третий вектор $\overline{c}$, что $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$ и обозначает $\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$. Чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно их отнести к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора – вычитаемого в конечную точку вектора – уменьшаемого.



Замечание. Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) правилом параллелограмма: если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\bar{a}$ + $\bar{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а вторая диагональ, идущая из конца вектора $\bar{b}$ в конец вектора $\bar{a}$ есть разность $\bar{a}$ - $\bar{b}$.



3. Произведение вектора на число

Произведением α $\bar{a}$ (или $\bar{a}$ α) вектора $\bar{a}$ на вещестренное число α называется вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, (причем вектор $\bar{b}$ имеет длину, равную $|\alpha||\bar{a}|$) и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{a}$ в случае $\alpha > 0$ и противоположное направление в случае $\alpha < 0$.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число можно выразить так: при умножении вектора $\bar{a}$ на число α вектор $\bar{a}$ растягивается (сжимается) в α раз.

При этом, если $\alpha > 1$, то $\bar{a}$ растягивается, если $0< \alpha <1$, то вектор $\bar{a}$ сжимается и вектор α $\bar{a}$ сохраняет то же направление, что и вектор $\bar{a}$.

Если же $\alpha < 0$, то вектор $\bar{a}$ растягивается при $|\alpha| > 1$ и сжимается при $|\alpha| < 1$ и при этом происходит изменение направления на противоположное.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1. $\alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ (распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов).
2. $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ (распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел).
3. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$ (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Так как по определению вектор есть направленный отрезок, а проекции направленного отрезка на оси координат находят как разности одноименных координат конца и начала направленного отрезка, то точно также находят проекции вектора на координатные оси. Эти проекции и называются координатами вектора.

Например, пусть даны точки A(3, -2, 5) и B(-1, 2, 3). Тогда координатами вектора $\overline{AB}$ будут: -1-3=-4; 2-(-2)=4, 3-5=-2 и обозначают $\overline{AB}=\{-4, 4, -2\}$.

В дальнейшем, координаты (проекции на оси) мы будем обозначать $\bar{a}=\{x, y, z\}$.

Отметим, что действия над векторами можно произвести в координатах.

Пусть даны векторы в координатах: $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

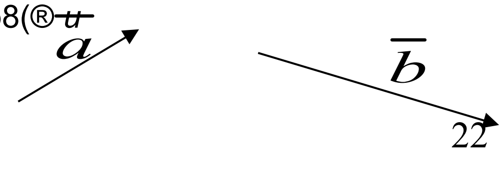
Тогда: $\bar{a} + \bar{b} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$, $\bar{a} - \bar{b} = \{x_1 - x_2,\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$, $\alpha\bar{a} = \{\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\}$.

Содержание отчета

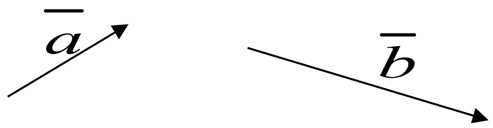
1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. По данным векторам \s\up8(® *и* \s\up8(® *постройте векторы* \s\up8(®, \s\up8(®, \s\up8(®



Задача 2. По данным векторам \s\up8(® *и* \s\up8(® постройте векторы , *и* .



Задача 3. Какому условию должны удовлетворять векторы \s\up8(® *и* \s\up8(®, чтобы векторы \s\up8(® *и* \s\up8(® были коллинеарны. Какой геометрический смысл имеет это условие?
Задача 4. Определите координаты начала вектора \s\up8(®, если его конец совпадает с точкой .
Задача 5. Пусть в некотором базисе \s\up8(® *и* \s\up8(®. Найдите координаты вектора \s\up8(® в этом базисе.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 6.
Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

Цель работы*:* выработать умение применять на практике скалярное, векторное и смешанное произведения векторов в соответствии с геометрическими, физическими приложениями.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Скалярное произведение векторов

Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Скалярными произведениями двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$(\overline{a}\overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\vartheta, \quad \text{где } \vartheta \text{ - угол между векторами}$$

Можно дать другое определение скалярного произведения двух векторов. Из теории проекций известно, что

$$пр_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\vartheta \quad \text{и } пр_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\cos\vartheta.$$

Т.о. скалярное произведение двух векторов есть число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на первый вектор.

$$(\overline{a}\overline{b}) = |\overline{b}|пр_{\overline{b}}\overline{a} \quad или \quad (\overline{a}\overline{b}) = |\overline{a}|пр_{\overline{a}}\overline{b}.$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими основными свойствами:

1. Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обращается в нуль в том случае, когда по крайней мере один из векторов является нулевым или если векторы перпендикулярны.
2. Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно произведению длин этих векторов, если данные векторы параллельны, т. е. $\varphi = 0$.

$$(\overline{a}\,\overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 0 = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$$

Отсюда следует, что скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату длины этого вектора, т. е. $(\overline{a} \cdot \overline{a}) = |\overline{a}|^2$

3. Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством умножения: $(\overline{a}\,\overline{b}) = (\overline{b}\,\overline{a})$.
4. Скалярное произведение обладает распределительным свойством относительно суммы векторов: $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = (\overline{a}\,\overline{c}) + (\overline{b}\,\overline{c})$.

Пусть даны два вектора в координатах: $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ $и$ $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

<u>Векторное произведение векторов</u>

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ $и$ $\overline{b}$ называется такой третий вектор $\overline{c}$, который обладает следующими свойствами:
1) $\overline{c} \perp \overline{a}$ $и$ $\overline{c} \perp \overline{b}$, то есть вектор $\overline{c}$ перпендикулярен к плоскости, где лежат вектора $\overline{a}$ $и$ $\overline{b}$;
2) Длина вектора $\overline{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ $и$ $\overline{b}$, т.е. $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
3) вектор $\overline{c}$ направлен в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ к второму вектору $\overline{b}$ вокруг вектора $\overline{c}$ представлялся происходящим против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\overline{c}$.

Векторное произведение обозначают символом $\overline{c} = [\overline{a}\overline{b}]$ $или$ $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

а) <u>Основные свойства векторного произведения:</u>

1. Векторное произведение двух векторов $\overline{a}$ $и$ $\overline{b}$ равно нулевому вектору в том и только в том случае, когда эти векторы параллельны.

Из этого свойства следует, что векторное произведение любого вектора на самого себя, т.е. $[\overline{a}\overline{a}] = 0$.

2. Векторное произведение двух векторов антикоммутативно, а именно:
$[\overline{a}\overline{b}] = -[\overline{b}\overline{a}]$
3. Векторное произведение обладает свойствами сочетательности относительно числового множителя: $\alpha[\overline{a}\overline{b}] = [\alpha\overline{a} \cdot \overline{b}]$ $или$ $[\overline{a} \cdot \alpha\overline{b}]$.
4. Векторное произведение векторов обладает распределительным свойством относительно векторов.

<u>Векторное произведение векторов в координатах</u>

Пусть векторы $\overline{a}$ $и$ $\overline{b}$ заданы в координатах $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда $[\overline{a}\overline{b}] = \overline{c}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}$.

<u>Пример.</u> Пусть даны векторы $\overline{a} = \{2, -1, 4\}$ $и$ $\overline{b} = \{3, 1, 0\}$

$$[\overline{a}\overline{b}] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2l_3 + 12l_2 + 3ll_3 - 4l_1 = -4l_1 + 12l_2 + 5l_3.$$

т.е. $[\overline{a}\overline{b}] = \overline{c} = \{-4, 12, 5\}$.

Пусть даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Если из трех векторов любые два вектора умножить векторно, а затем полученный вектор $\overline{d} = [\overline{a}\ \overline{b}]$ умножить на третий вектор $\overline{c}$ скалярно, то в результате мы получим число, которое и называется смешанным произведением трех векторов и обозначают: либо $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$, либо $([\overline{a}\ \overline{b}]\overline{c})$.

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Смешанное произведение векторов в координатах.

Пусть даны три вектора в координатах $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}, \bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}. \bar{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$. Тогда смешанное произведение этих векторов можно вычислить по формуле:

$$([\bar{a}\bar{b}]\bar{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Многие задачи геометрии, физики, механики решаются методами векторной алгебры.

Пример. Вычислить, какую работу производит сила $\overline{F}$ = {3, -5, -2} когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения *A* (2, 5, -3) в положение *B* (3, -1, -2).

Решение. Найдем координаты вектора $\overline{S}=\overline{AB}$

$\overline{S}$ = {3-2; -1-5; -2+3} = {1; -6; 1}

Тогда величина искомой работа равна скалярному произведению ($\overline{F}\cdot\overline{S}$), т.е.

$W=(\overline{F}\ \overline{S})=3\cdot 1+(-5)\cdot(-6)-2\cdot 1=31$.

Пример. Найти угол, образованный векторами: $\bar{a}$={3,0,-4} и $\bar{b}$={-1,1,-2}.

Решение. $\cos\varphi=\dfrac{3\cdot(-1)+0\cdot 1+(-4)\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+0+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{5\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Пример. Даны координаты вершин треугольника *A*(1,2,0), *B*(3,0,-3) и *C*(5,2,6). Найти площадь этого треугольника.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$\overline{AB}$ = {3-1, 0-2, -3-0} = {2, -2, -3}

$\overline{AC}$ = {5-1, 2-0, 6-0} = {4, 0, 6}

Найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=$

$-12e_1-12e_2+8e_3-12e_2=-12e_1-24e_2+8e_3$

Итак, $[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]=\bar{d}$ = {-12, -24, 8}.

Найдем модуль векторного произведения

$|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]|=|\bar{d}|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{144+576+64}=\sqrt{784}=28.$

Искомая площадь треугольника: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 28=14$ кв. ед.

Пример. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках O(1,1,2), A(2,3,-1), B(2,-2,4), C(-1,1,3).

Решение. Тетраэдр построен на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}$ и $\overline{OC}$ Найдем координаты этих векторов: $\overline{OA}=\{1,2,-3\}$, $\overline{OB}=\{1,-3,2\}$, $\overline{OC}=\{-2,0,1\}$. Тогда искомый объем:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\left[\overline{OA}\cdot\overline{OB}\right]\cdot\overline{OC}\right)\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}|-3-8+18-2|=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}$$

$V=\dfrac{5}{6}$ куб. ед.

Пример. Вычислить модуль вектора $\bar{a}$ = {6,3,-2}.

Решение. Если дан вектор $\bar{a}$ = {*x*, *y*, *z*}, то $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Следовательно, имеем $|\bar{a}|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{49}=7$.

Пример. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ = {12,-15,-16}.

Решение. $|\bar{a}|=\sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2}=\sqrt{625}=25$.

$\cos\alpha=\dfrac{x}{|\bar{a}|}=\dfrac{12}{25}$; $\cos\beta=\dfrac{y}{|\bar{a}|}=\dfrac{-15}{25}=-\dfrac{3}{5}$; $\cos\gamma=\dfrac{z}{|\bar{a}|}=\dfrac{-16}{25}$.

Пример. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол φ = 60^0, причем $|\bar{a}|$ = 5 и $|\bar{b}|$ = 8. Определить $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$.

Решение. Рассмотрим скалярное произведение ($\bar{a}+\bar{b}$) и ($\bar{a}+\bar{b}$) т.е.

$(\bar{a}+\bar{b})^2 = (\bar{a}\,\bar{a}) + 2(\bar{a}\,\bar{b}) + (\bar{b}\,\bar{b}) = |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos 60^0 + |\bar{b}|^2 = 25+2\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2}+64 = 129$,

следовательно $|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{129}$.

Аналогично, рассмотрим $(\bar{a}-\bar{b})^2$

$(\bar{a}-\bar{b})^2 = |\bar{a}|^2 - 2(\bar{a}\,\bar{b}) + |\bar{b}|^2 = 25-2\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2}+64 = 49.$ $\quad |\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{49} = 7$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания:

Задача 1. Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a}=\{-2, 3, \beta\}$ и $\bar{b}=\{\alpha, -6, 2\}$ коллинеарны.

Задача 2. Даны три вектора $\bar{p} = \{3,-2,1\}$, $\bar{q} = \{-1,1,-2\}$, $\bar{r} = \{2,1,-3\}$. Найти разложение вектора $\bar{c} = \{11,-6,5\}$ по базису $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$.

Задача 3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\bar{p} = \bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{q} = \bar{a}-\bar{b}$.

Задача 4. Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = \{5,2,5\}$ на ось вектора $\bar{b} = \{2,-1,2\}$.

Задача 5. Даны вершины тетраэдра: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Задача 6. Найти орт вектора $\bar{a} = 3e_1 + 4e_2 - 12e_3$.

Задача 7. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\bar{a} = \{1,-3,1\}$ и $\bar{b} = \{2,-1,3\}$.

Задача 8. Вычислить внутренние углы треугольника с вершинами $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$ и $C(7;4;-2)$. Убедиться, что этот треугольник равнобедренный. Сделать чертеж.

Задача 9. Зная одну из вершин треугольника $A(2;-5;3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB} = \{4;1;2\}$ и $\overline{BC} = \{3;-2;5\}$. Найти остальные вершины и координаты вектора $\overline{CA}$.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 7.

Прямая линия на плоскости: уравнение прямой с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; уравнение прямой в отрезках.

Цель работы*:* сформировать представление о возможных способах задания прямой на плоскости, выработать умение выбирать соответствующее уравнение для конкретной задачи.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением 1–й степени и, обратно, каждое уравнение 1–й степени определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: y=kx+b, где k – угловой коэффициент прямой, b – начальная ордината.

Пример: Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1)$ и образующей с прямой $3x - y + 2 = 0$ угол в 45°.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_o(x_o,y_o)$ имеет вид:

$$y - y_0 = k_1(x - x_0),\ \text{т.е. } y - 1 = k_1(x + 2)$$

В равенстве необходимо определить угловой коэффициент k_1. Для этого воспользуемся условием, что искомая прямая образует с данной прямой $3x–y+2=0$ угол в 45°. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 3$. Тогда имеем:

$$tg45^\circ = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{3 - k_1}{1 + 3k_2},$$

откуда $1 + 3k_1 = 3 - k_1$, или $k_1 = \frac{1}{2}$. Подставив $k_1 = \frac{1}{2}$, получим: $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$ или $x - 2y + 4 = 0$ – искомое уравнение прямой.

Общее уравнение прямой: Ax+By+C=0, где A, B, C – произвольные числа. Очевидно, A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях.

Замечание. Прямая линия в отрезках отсекает от координатного угла прямоугольный треугольник, площадь которого определяется формулой $S_\Delta = \frac{1}{2}|a||b|$.

Пример. Дана прямая 5x-3y-30=0. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой от координатных осей.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках, разделив все члены данного уравнения на 30: $\frac{x}{6} - \frac{y}{10} = 1$. Из уравнения видно, что a=6;b=-10. Следовательно, $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|6||-10| = 30$ кв.ед.

Нормальное уравнение прямой: $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$, где θ - угол, который образует прямая с положительным направлением оси OX.

Пример. Дано уравнение прямой 5x – 12y + 26 = 0. Привести к нормальному виду.

Решение. Для перехода от общего уравнения прямой к нормальному необходимо обе части общего уравнения умножить на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак выбирается противоположным знаку С. В данном уравнении A=5, B= -12, C=26. Так как C>0, то нормирующий множитель берем со знаком минус, т.е. $M = -\frac{1}{\pm\sqrt{25+144}} = -\frac{1}{13}$. Умножив на $M = -\frac{1}{13}$ данное уравнение, получим: $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$ - нормальное уравнение прямой: $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $P = 2$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задачи:

Задача 1. Дано общее уравнение прямой . Составьте уравнение этой прямой с угловым коэффициентом и уравнение в отрезках.

Задача 2. Составьте уравнение прямой с угловым коэффициентом , проходящей через точку .

Задача 3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки и .

Задача 4. Дано общее уравнение прямой *12x – 5y – 60 = 0*. Написать:

1) уравнение с угловым коэффициентом;
2) уравнение в отрезках;
3) нормальное уравнение.

Задача 5. Прямая на плоскости отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 8 кв.ед.

Вопросы:

1. Что такое угловой коэффициент прямой на плоскости? Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Для каких прямых угловой коэффициент не определяется?
3. Исследование общего уравнения прямой на плоскости.

4. Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках?
5. Запишите нормальное уравнение прямой.
6. Запишите уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 8.
Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

Цель работы: сформировать умение находить угол между двумя прямыми, определять параллельность и перпендикулярность двух прямых и применять умение при решении практических задач

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Пусть даны две прямые $\left.\begin{matrix} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{matrix}\right\}$.Угол между двумя прямыми на плоскости может быть вычислен по формуле: $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1=k_2$. Необходимое и достаточное условием перпендикулярности двух прямых заключается в том, что произведение их угловых коэффициентов равно (-1): $k_1k_2=-1$.

<u>Замечание</u>. Если уравнения двух прямых заданы в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то угловые коэффициенты этих прямых будут иметь вид: $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$.

1) Пусть прямые параллельны. Тогда $k_1=k_2$ или $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$, т.е. если в уравнениях двух прямых соответствующие коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, то прямые параллельны. Если при этом имеем отношение $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

2) Пусть прямые перпендикулярны. Тогда выполняется равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=-1$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ - это есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых, уравнения которых заданы в общем виде.

Пример. Даны уравнения двух прямых: 2x – y + 3 = 0 и 4x – 2y + 5 = 0. Как расположены эти прямые? Здесь $A_1 = 2$, $B_1 = -1$, $C_1 = 3$, $A_2 = 4$, $B_2 = -2$, $C_2 = 5$. Здесь выполняются соотношения: $\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{3}{5}$, т.е. прямые параллельны.

Пример. Даны уравнения двух прямых 3x – 2y + 1 = 0 и 2x + 3y + 4 = 0. Как расположены эти прямые?

Решение. Выпишем коэффициенты при переменных x и y: $A_1 = 3$ $B_1 = -2$, $C_1=1$, $A_2 = 2$, $B_2 = 3$, $C_2 = 4$. Рассмотрим выполнение условие перпендикулярности. Имеем: $A_1A_2 + B_1B_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$. Условие выполнено. Следовательно, данные прямые перпендикулярны.

Чтобы найти расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой, необходимо: 1)уравнение данной прямой привести к нормальному виду; 2)подставить вместо текущих координат, координаты точки $M_0(x_0,y_0)$.

$$|d| = | x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - P|$$

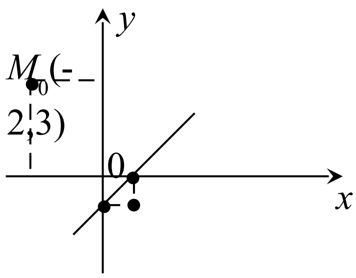
Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-2,3)$ до прямой $3x - 4y - 2 = 0.$

Решение. Приводим данное уравнение к нормальному виду, умножая его на нормирующий множитель

$$M=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}.$$

Получим нормальное уравнение $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0.$

Тогда отклонение $d=\frac{3}{5}\cdot(-2)-\frac{4}{5}\cdot 3-\frac{2}{5}=-\frac{6}{5}-\frac{12}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{20}{5}=-4$



Отрицательное значение для отклонения d, указывает на то, что данная точка M_0(-2,3) лежит от данной прямой с той же стороны, что начало координат. Искомое расстояние $|d| = |-4| = 4$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы

5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задачи:

1. Провести через точку пересечения прямых $x–y–3=0$, $2x+3y–11=0$, прямую, параллельную прямой $5x – 4y – 17 = 0$.
2. Луч света, проходящий через точку $M_1(3;–1)$, отражается от прямой $2x–y-1=0$ и после этого проходит через точку $M_2(5;3)$. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.
3. Найти проекцию точки $M(3;2)$ на прямую $3x – 2y + 1 = 0$.
4. Даны вершины треугольника: $A(3;1)$, $B(-5; -5)$, $C(-1;4)$. Найти уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.
5. Даны вершины треугольника: $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.
6. Не вычисляя координаты вершин треугольника, написать уравнения прямых, проведенных через эти вершины параллельно противолежащим сторонам. Стороны треугольника заданы уравнениями: $5x–2y+6=0$; $4x–y+3=0$ и $x+3y–7=0$.
7. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8;6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв.ед.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2; 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5; -1)$ и $B(3; 7)$.
9. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми: $3x – 4y – 10 = 0$; $6x – 8y+5=0$.

Вопросы:

1. Дайте определение угла между двумя прямыми. Как определяется косинус угла между двумя прямыми на плоскости?
2. Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности прямых, заданных а) общими уравнениями; б) уравнениями с угловым коэффициентом.
3. Как определить расстояние между а) точкой и прямой; б) двумя параллельными прямыми?
4. Можно ли считать условие $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ признаком параллельности прямых?

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 9.

Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Общее уравнение линий второго порядка.

Цель работы: сформировать представление об уравнении кривой второго порядка, уравнениях окружности, эллипса, гиперболы и параболы, научиться определять основные параметры кривых по заданному уравнению.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:

ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром. Каноническое уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Если $x_0 = y_0 = 0$, то центр окружности находится в начале координат и уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$

Пример. Определить центр и радиус окружности, данной уравнением: $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$

Решение. Данное уравнение представляет окружность, так как отсутствует член с произведением координат и коэффициенты при квадратах координат равны между собой. Приводим данное уравнение к каноническому виду. Для этого перепишем данное уравнение в виде:

$(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) + 21 = 0$ или

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) + 21 - 16 - 9 = 0$ или

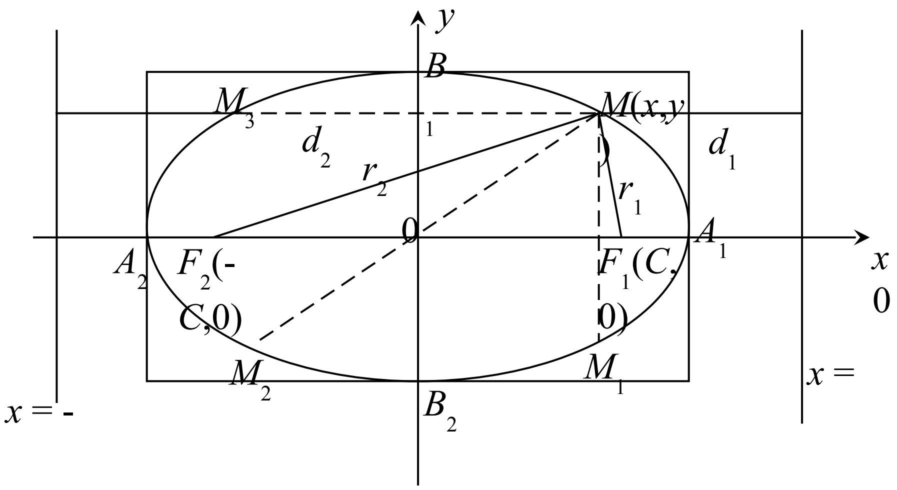
$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$

Откуда заключаем, что центр окружности имеет координаты $C(4,-3)$ и $R = 2$.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Если $a = b$, то эллипс становится окружностью.

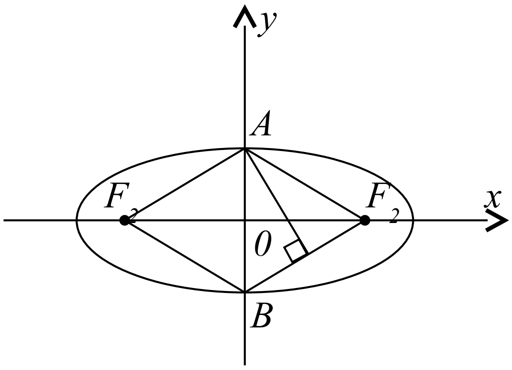
Величина $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается через букву ε .

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра, называются директрисами эллипса. Директрисы эллипса обладают свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.



Пример. Сторона ромба равна 5 и высота 4,8. Через две вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.

Решение: По условию задачи $AF_1 = 5$ и $AK = 4,8$. Тогда площадь ромба $S = AF_1 \cdot AK = 4,8 \cdot 5 = 24$.



С другой стороны, как известно, площадь равна половине произведения диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot F_1F_2$; но $AB = 2b$, $F_1F_2 = 2c$. Тогда $S = 2bc = 24$, откуда $b = \frac{12}{c}$. Далее, $AO^2 + OF_1^2 = AF_1^2$ или $b^2 + c^2 = 25$. Следовательно, для определения c имеем: $\frac{144}{c^2} + c^2 = 25$ или $c^4 - 25c^2 + 144 = 0$.

Обозначим $c^2 = t$. Тогда имеем: $t^2 - 25t + 144 = 0$;

$t_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2}$; $t_1 = 16$, $t_2 = 9$.

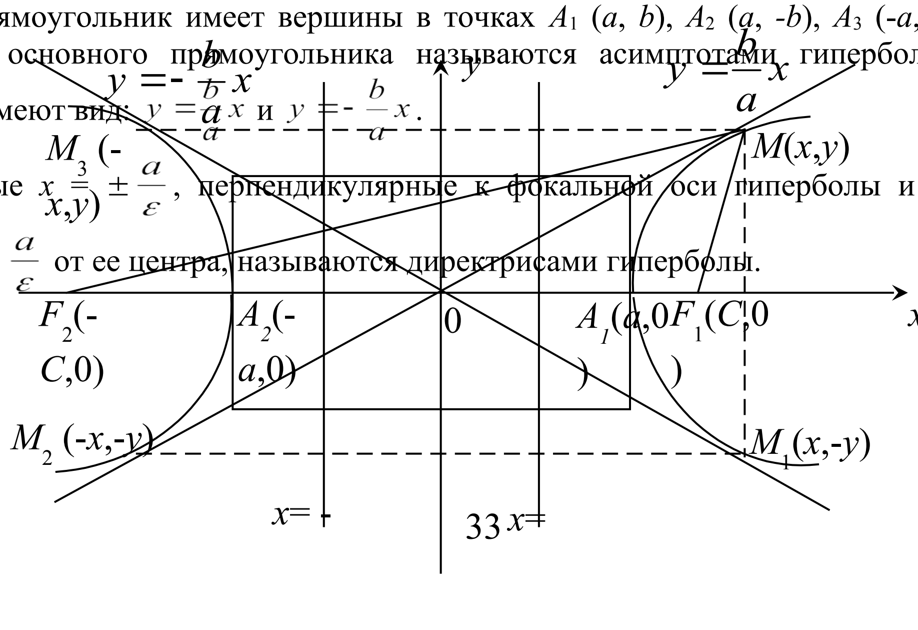
Так как $c > 0$, то $c_1 = 3$, $c_2 = 4$. Тогда $b_1 = 4$, $b_2 = 3$. Известно, что для эллипса $a^2 = b^2 + c^2$, тогда $a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $a = 5$.

Искомыми уравнениями эллипса будут: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (если фокусы лежат на оси Ox) и $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (если фокусы лежат на оси Oy).

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Если гипербола задана своим каноническим уравнением, то главными осями гиперболы являются оси координат, а центр гиперболы находится в начале координат.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершине, называется основным прямоугольником гиперболы. Данный прямоугольник имеет вершины в точках A_1 (a, b), A_2 $(a, -b)$, A_3 $(-a, -b)$, A_4 $(-a, b)$. Диагональ основного прямоугольника называются асимптотами гиперболы. Уравнения асимптот имеют вид: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные к фокальной оси гиперболы и отстоящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от ее центра, называются директрисами гиперболы.



Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равностоящих от одной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Дано уравнение эллипса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

Задача 2. В эллипс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ вписан правильный (равносторонний) треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большой оси. Найти координаты двух других вершин треугольника.

Задача 3. В эллипс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят чрез фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

Задача 4. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиус-векторы этой точки и угол между ними.

Задача 5. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Задача 6. Вычислить параметр параболы $y^2 = 2px$, если известно, что она касается прямой $x - 2y + 5 = 0$.

Задача 7. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 м, а высота – 6 м.

Задача 8. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой p = 0,1 м. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстояние 2 м от места выхода.

Вопросы.

1. Запишите общее уравнение кривой второго порядка.
2. Что такое окружность? Запишите каноническое уравнение окружности. Какие особенности имеет общее уравнение окружности?
3. Дайте определение эллипса. Запишите его каноническое уравнение. Проведите с помощью канонического уравнения исследование формы эллипса.
4. Что такое эксцентриситет и директрисы эллипса?
5. Как определяются фокальные радиусы эллипса?

6. Дайте определение гиперболы. Запишите каноническое уравнение гиперболы. Какая гипербола называется сопряженной данной?

7. Сделайте чертеж гиперболы. Напишите уравнения асимптот гиперболы.

8. Дайте определение параболы. Запишите каноническое уравнение параболы. Что такое параметр параболы?

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 10.

Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости.

Цель работы: сформировать представление о различных способах задания плоскости, научиться определять расположение плоскости в пространстве по заданному уравнению.

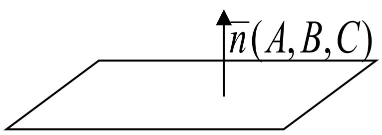
Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Если фиксирована произвольная декартова прямоугольная система координат, то плоскость (*P*) определяется уравнением первой степени относительно совокупности переменных *x*, *y*, *z*.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D произвольные постоянные, причем хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля, вектор $\overline{n}$ = {A, B, C} перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором плоскости.



Частные случаи общего уравнения плоскости:

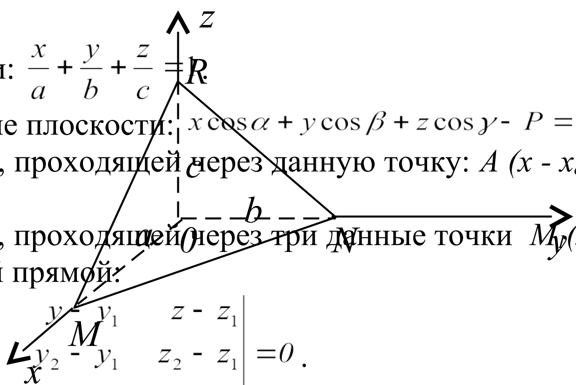
1. Свободный член равен нулю, т. е. $D=0$: $Ax+By+Cz=0$	плоскость проходит через начало координат
2. Один из коэффициентов при текущих координатах равен 0 и	
а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной оси:	
$A=0$, *тогда* $By+Cz+D=0$	плоскость параллельна оси *Ox*
$B=0$, *тогда* $Ax+Cz+D=0$	плоскость параллельна оси *Oy*
$C=0$, *тогда* $Ax+By+D=0$	плоскость параллельна оси *Oz*
б) $D=0$, тогда плоскость проходит через соответствующую координатную ось:	
$A=0$, *тогда* $By+Cz=0$	плоскость проходит через ось *Ox*
$B=0$, *тогда* $Ax+Cz=0$	плоскость проходит через ось *Oy*
$C=0$, *тогда* $Ax+By=0$	плоскость проходит через ось *Oz*

3. Два коэффициента при текущих координатах равны 0 и	
а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:	
$B=0,\quad C=0,\quad тогда\quad Ax+D=0$	плоскость параллельна плоскости *Oyz* (перпендикулярна оси *Ox*)
$A=0,\quad C=0,\quad тогда\quad By+D=0$	плоскость параллельна плоскости *Oxz* (перпендикулярна оси *Oy*)
$A=0,\quad B=0,\quad тогда\quad Cz+D=0$	плоскость параллельна плоскости *Oxy* (перпендикулярна оси *Oz*)
б) $D=0$, тогда плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:	
$B=0, C=0, тогда\ Ax=0\ или\ x=0$	уравнение плоскости *Oyz*
$A=0, C=0, тогда\ By=0\ или\ y=0$	уравнение плоскости *Oxz*
$A=0, B=0, тогда\ Cz=0\ или\ z=0$	уравнение плоскости *Oxy*

Различные виды уравнений плоскости

1. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость не проходит через начало координат, а отсекает от осей координат соответственно отрезки *a*, *b*, *c*, т. е. плоскость проходит через точки *M(a,0,0)*, *N(0,b,0)* и *R(0,0,c)*.



Уравнение такой плоскости: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

2. Нормальное уравнение плоскости: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0$.
3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$.
4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$((\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2})\cdot\overline{M_1M_3})=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки *A(2,1,3), B(1,0,4)* и *C(1,1,5)*.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1-2 & 0-1 & 4-3 \\ 1-2 & 1-1 & 5-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2(x-2)-1(y-1)-1(z-3)+2(y-1)=$$

$= -2x + 4 - y + 1 - z + 3 + 2y - 2 = -2x + y - z + 6 = 0$ или

$2x - y + z - 6 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задачи:

Задача 1. Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Задача 2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(3; -2; -7)$ параллельно плоскости $2x - z + 5 = 0$.

Задача 3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda (x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; параллельна оси Ox; параллельна оси Oy; параллельна оси Oz.
Задача 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0; 2; 1)$ и параллельной векторам $\overline{a} = \{1; 1; 1\}$ и $\overline{b} = \{1; 1; -1\}$.
Задача 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ перпендикулярно данной плоскости.
Задача 6. Две грани куба лежат на плоскостях: $2x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.
Задача 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку G(4,2,-5).
Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения плоскости.
2. Как найти расстояние от точки до плоскости?
3. Покажите, что всякое уравнение первой степени относительно совокупности переменных x, y, z определяет плоскость в прямоугольной системе координат в трехмерном пространстве.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 11.

Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Цель работы: сформировать умение находить расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями, определять параллельность или перпендикулярность плоскостей.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Пусть даны две плоскости (P_1) и (P_2). Пусть даны их общие уравнения: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями. При этом $cos\varphi = \frac{(\overline{n}_1\overline{n}_2)}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Расстояние от точки $M_o(x_o,y_o,z_o)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

<u>Пример.</u> Вычислить расстояние от точки M(-9,6,6) до плоскости 2x – 6y – 3z +9 =0.

Решение: $d = \dfrac{|2\cdot(-9) - 6\cdot 6 - 3\cdot 6 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2}} = \dfrac{63}{7} = 9$.

<u>Пример.</u> Найти острый угол между плоскостями:

$5x - 3y + 4z - 4 = 0$, (1)

$3x - 4y - 2z + 5 = 0$. (2)

Решение: По формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{15+12-8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}}\right|;\quad \cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}};$$

$$\cos\varphi = 0{,}4990;\quad \varphi = 60°04'.$$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задачи:

Задача 1. Вычислить расстояние от точки M до плоскости α, если: 1) M (-2,7,1), α : *2x-6y+3z+1=0;*

2) M (1,-3,4), α :*2x-6y-3z+27=0.*

Задача 2. Найти величину острого угла между плоскостями:

11x-8y-7z-15=0, 4x-10y+z-2=0; 2) 2x+3y-4z+4=0, 5x-2y+z-3=0.

Задача 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки M1 (0,0,2) и M2 (0,1,0) и образующей угол 45 градусов с плоскостью OYZ.

Вопросы.

1.Как определить величину угла между двумя плоскостями?

2.Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

3.Можно ли считать условие $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ признаком параллельности плоскостей? Что можно сказать об этих плоскостях?

4.Как Вы думаете, какое из приведенных ниже уравнений соответствует плоскости, проходящей через точки M(0,-3,2) и N(5,4,-1) параллельно оси *Oy*: *3x+5z-10 = 0, 3y-z-10 = 0, 2x-5y+10 = 0, 3x-5z+10 = 0?*

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 12.

Прямая линия в пространстве. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Общие уравнения прямой.

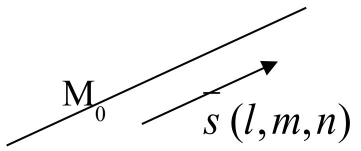
Цель работы: сформировать умение составлять необходимое уравнение прямой в пространстве, определять параметры прямой по уравнению и применять умение для решения практических задач.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Положение прямой в трехмерном пространстве будет вполне определено, если зададим на прямой определенную точку M_0 при помощи ее радиус – вектора $\overline{Z}_0$ и вектор $\overline{S} \neq 0$, которому прямая параллельна. Вектор $\overline{S}$ при этом называется направляющей.



Параметрические уравнения прямой в пространстве: [illegible],
канонические уравнения: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Любая прямая в трехмерном пространстве может быть выражена также уравнениями двух плоскостей: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, которые определяют общее уравнение прямой в пространстве, если плоскости, определяемые этими уравнениями, различны и не параллельны.

<u>Пример.</u> Дано общее уравнение прямой: $\begin{cases} 2x-3y+z-5=0, \\ 3x+y-2z-2=0 \end{cases}$.

Требуется привести данное уравнение к каноническому виду. Для этого сначала найдем точку $M_o(x_o,y_o,z_o)$, лежащую на данной прямой.

Положим $z=z_0=0$ в и решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + y = 2 \end{cases}.$$

Умножив второе уравнение на 3 и сложив с первым уравнением, получим $11x=11$, $x=1$. Из второго уравнения $y=2–3x=2–3=–1$. Итак, точка $M_o(1,–1,0)$ найдена.

Находим направляющий вектор $\bar{s} = [\bar{n}_1 \bar{n}_2]$, где $\bar{n}_1 = \{2; -3; 1\}$, $\bar{n}_2 = \{3; 1; -2\}$.

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6l_1 + 3l_2 + 2l_3 + 9l_3 - l_1 + 4l_2 = 5l_1 + 7l_2 + 11l_3$$

Итак, точка $M_o(1,–1,0)$ и $\bar{s} = \{5; 7; 11\}$ найдены. Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{11}.$$

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задачи:

Задача 1. Составить параметрические уравнения прямых: $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x + 5y + 2z + 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y + 4z - 8 = 0, \\ 6x + 3y + 2z - 18 = 0. \end{cases}$

Задача 2. Определить координаты направляющего вектора прямой 1) $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0 \\ 3x + 2y + 4z + 7 = 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 3x - y + 7z - 1 = 0 \\ -x + 2y + 11z + 5 = 0 \end{cases}$.

Вопросы.

1. Запишите известные Вам уравнения прямой линии в пространстве.
2. Что такое направляющий вектор прямой?
3. Как определить координаты направляющего вектора прямой по общему ее уравнению?
4. Как преобразовать общее уравнение прямой к каноническому?

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 13.

Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Цель работы*:* сформировать умение вычислять угол между двумя прямыми в пространстве, расстояние от точки до прямой, кратчайшее расстояние между двумя прямыми, угол между прямой и плоскостью и применять умение при решении практических задач профессиональной деятельности.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Углом между двумя прямыми в пространстве будем называть любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данным. Очевидно, за угол φ между прямыми можно взять угол между их направляющими векторами: $\bar{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\bar{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$, косинус которого можно найти по формуле:

$$cos\varphi = \pm\frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Углом между прямой $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

$$cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

$Al+Bm+Cn=0$ – условие параллельности прямой и плоскости.

$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ – условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Вычислить косинус угла между прямыми:

1) $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z}{5}$ и $\begin{cases} x = 5t - 4 \\ y = -2t \\ z = -t + 1 \end{cases}$; 2) $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z - 3}{1}$ и $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = 5t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases}$;

3) $\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 11}{1}$ и $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -t + 4 \end{cases}$; 4) $\frac{x - 1}{5} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 1}{-2}$ и $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 5 \end{cases}$.

Задача 2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 1}{2}$ и плоскости $x+y-z-3 = 0$.

Вопросы.

1.Как определить угол между двумя прямыми в пространстве?

2.Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в трехмерном пространстве?

3.Как найти точку пересечения прямой и плоскости в трехмерном пространстве?

4.Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 14.
Вычисление предела последовательности. Число е.

Цель работы: сформировать представление об основных алгоритмах вычисления предела последовательности, замечательных пределах и применять изученное при решении практических задач профессиональной деятельности.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Число А называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$ если для любого сколь угодно малого положительного числа ε>0 существует такой номер N (зависящий от ε) $N = N_\varepsilon$, что для всех членов последовательности с номерами n>N верно неравенство $|a_n\text{-}A|<\varepsilon$

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n \to \infty$

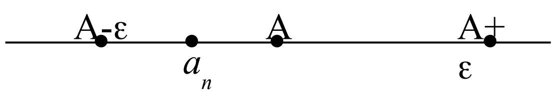
.

Иногда говорят, что если А есть предел числовой последовательности $\{a_n\}$, то эта последовательность сходится к А. Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших n члены последовательности $\{a_n\}$ как угодно мало отличаются от числа А. Важно отметить, что номер N, вообще говоря, не может быть указан раз и навсегда: он зависит от выбора числа ε. При уменьшении ε, соответствующий номер N_ε, вообще говоря увеличивается.

Для геометрической интерпретации понятия предела числовой последовательности распишем неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$$
$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

Изобразим числа А, А + ε, А-ε и значение a_n точками на числовой оси. Получим наглядно геометрическое истолкование предела последовательности:



Какой бы малый отрезок (длины 2ε) с центром в точке А ни взять, все точки a_n начиная с некоторой из них должны попасть внутрь этого отрезка (так, что вне его может остаться лишь конечное число этих точек).

Последовательность a_n имеющая своим пределом 0 называется бесконечно малой величиной или, просто, бесконечно малой.

Леммы о бесконечно малых.

Лемма 1. Сумма любого конечного числа бесконечного малых есть также величина бесконечно малая.

Лемма 2. Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.

Бесконечная последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если она по абсолютной величине становится и остается большей сколь угодно большего наперед заданного числа E>0, начиная с некоторого места $|x_n| > E$ (для $n > N_E$).

Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой и сохраняет определенный знак (+ или -) то в соответствии со знаком, говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел +∞ или -∞ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad x_n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Если $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то ее обратная величина $a_n = \dfrac{1}{x_n}$ будет бесконечно малой (верно и обратно).

Последовательность точек расширенной числовой прямой может иметь на этой прямой только один предел.

Теоремы о пределах. Предельный переход в равенствах и неравенствах

1. Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при всех их изменениях равны: $x_n = y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, то равны и эти пределы A= B.

2. Если для двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ всегда выполняется неравенство $x_n \geq y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел: $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, то A ≥ B.

3. Если для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ всегда выполняются неравенства $x_n \leq y_n \leq z_n$ причем $x_n \to A$ $z_n \to A$ (т.е. к общему пределу А), то и последовательность $\{y_n\}$ имеет тот же предел, т.е. $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

Арифметические операции над полследовательностями

1. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$

2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то их произведение также имеют конечный предел $\lim x_n\ y_n = a \cdot b$

3. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ причем b≠0, то их отношение также имеет конечный предел $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718281$ - иррациональное число

Содержание отчета
1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.
Задача 1.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^2-(2+n)^4}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3-(2-n)^3}{(1-n)^3-(1+n)^3}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)^2-(1+n)^2}{(1+n)^2-(2-n)^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^2-(2+n)^2}{(2+n)^2-(1-n)^2}$. 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n+2)^2}{(n-2)^3-(n+2)^3}$.

Задача 2.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-1}\right)^n$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+4}{2n+3}\right)^{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$. 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+3}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$. 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+7}{n+5}\right)^{n+3}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-2n}{3n^2-2n+5}\right)^{n+2}$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+1}\right)^{3n^2}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+3}{n^3-2}\right)^{n-n^3}$. 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{3n^2+1}$.

Задача 3.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$.

Задача 4.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n^2-n+1}{8n^3+n+3}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{5n}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Вопросы
1. Дайте определение бесконечно малой последовательности. Приведите пример.
2. Сформулируйте леммы о бесконечно малых.
3. Какая последовательность называется бесконечно большой?
4. Охарактеризуйте взаимосвязь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.
5. Какие арифметические операции можно выполнять над последовательностями? Опишите алгоритм выполнения арифметических операций над последовательностями.
6. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 15.

Производные некоторых элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функций.

Цель работы*:* сформировать умение вычислять производные элементарных функций, сложной и обратной функций и применять умение при решении практических задач профессиональной деятельности.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

I. Постоянный множитель можно вынести за знак производной. Иными словами, если функция $u=\varphi(x)$ *имеет в точке* x *производную* u'*, то в этой точке*

$$(Cu)'=Cu' \quad (C=const).$$

Пример

$$y=5\cos x, \qquad y'=(5\cos x)'=5(\cos x)'=-5\sin x.$$

II. Производная от алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.

Более точно: если функции $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ имеют в точке x производные, то

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

Пример

$$y=x^5-3x^2+2x-1,$$

$$y'=(x^5)'-(3x^2)'+(2x)'-(1)'=5x^4-6x+2.$$

III. Если функции $u=\varphi(x)$ *и* $v=\psi(x)$ *имеют в точке* x *производные, то справедлива формула*

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Пример

$y=(x^2-3x)\sin x$,

$y'=(x^2-3x)'\sin x+(x^2-3x)(\sin x)'=(2x-3)\sin x+(x^2-3x)\cos x$.

Пример

$y=(x-1)(x-2)(x-3)$,

$y'=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$

IV. Если функции $u=\varphi(x)$ *и* $v=\psi(x)$ *имеют в точке* x *производные, причем в этой точке* $v\neq 0$*, то справедлива формула*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$. В соответствии с формулой находим

$$y' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \qquad (x \neq 1).$$

При вычислении производной функции целесообразно пользоваться следующими формулами:

$y = \dfrac{a}{u}$; $y' = -\dfrac{a}{u^2} \cdot u'$ (a — постоянная величина);

$y = u^n$; $y' = nu^{n-1} \cdot u'$

(n — любое действительное число)

$y = \sqrt{u}$; $\quad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} u'$;

$y = a^u$; $y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $y = e^u$; $y' = e^u u'$; $a > 0$, $a \neq 1$;

$y = \log_a u$; $\quad y' = \dfrac{1}{u} u' \log_a e = \dfrac{u'}{u \ln a}$;

$y = \ln u$; $\quad y' = \dfrac{1}{u} u'$;

$y = \sin u$; $\quad y' = \cos u \cdot u'$;

$y = \cos u$; $\quad y' = -\sin u \cdot u'$;

$y = \operatorname{tg} u$; $\quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u'$;

$y = \operatorname{ctg} u$; $\quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} u'$;

$y = \sec u$; $\quad y' = \sec u \operatorname{tg} u \cdot u'$;

$y = \operatorname{cosec} u$; $\quad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'$;

$y = \arcsin u$; $\quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

$y = \arccos u$; $\quad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

$y = \operatorname{arctg} u$; $\quad y' = \dfrac{1}{1+u^2} u'$;

$y = \operatorname{arcctg} u$; $\quad y' = -\dfrac{1}{1+u^2} u'$.

Пусть даны функция $f(u)$ аргумента u и функция $\varphi(x)$ аргумента x. С их помощью можно образовать сложную функцию

$$f(\varphi(x))$$

аргумента x. В этом случае говорят, что мы «взяли функцию от функции» или произвели «суперпозицию» функций. Точный смысл таков: по заданному x находится число $\varphi(x)$; это число берется в качестве значения аргумента для функции $f(u)$; то, что при этом получится, и есть значение $f(\varphi(x))$ для данного x.

Говорят еще, что функция $f(\varphi(x))$ получается из $f(u)$ с помощью подстановки $u = \varphi(x)$.

Пример $y = u^3$. Если взять $u = x^2 - 3x + 1$, то получим сложную функцию $y = (x^2 - 3x + 1)^3$.

Пример $y = \sqrt{u}$, $u = 2 - x$. Тогда $y = \sqrt{2 - x}$.

Пример $y = \dfrac{1}{u + |u|}$, $u = \sin x$. Тогда $y = \dfrac{1}{\sin x + |\sin x|}$.

Установим важную теорему, позволяющую весьма просто вычислять производные сложных функций.

Теорема. Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений u и x существуют конечные производные $f'(u)$ и u', то существует и конечная производная от y по x, причем $y'=f'(u)u'$, т. е.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

<u>Пример</u> $y=(1+x^2)^5$. Положим $y=u^5$, $u=1+x^2$. $y'=5u^4u'=5(1+x^2)^4(1+x^2)'=10x(1+x^2)^4$.

<u>Пример</u> $y=\sin 3x$, т. е. $y=\sin u$, где $u=3x$. $y'=\cos u\, u'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$.

В случае сложной функции, полученной в результате *нескольких* суперпозиций, производная находится повторным применением формулы несколько раз.

<u>Пример</u> $y=(1+\sin 2x)^3$, $y'=3(1+\sin 2x)^2(1+\sin 2x)'=3(1+\sin 2x)^2\cos 2x(2x)'=6(1+\sin 2x)^2\cos 2x$.

Пусть дана функция $y=f(x)$ (однозначная), E - ее область задания, ε - область изменения.

Возьмем какое-нибудь значение y из области изменения ε. Если функция $y=f(x)$ *возрастающая* (или *убывающая*), то взятому y отвечает лишь одно значение x из E, для которого $y=f(x)$, и тем самым мы получаем некоторую однозначную функцию $x=g(y)$, которую называют обратной для функции $y=f(x)$. Она имеет своей областью задания множество ε, а областью изменения E; E и ε поменялись ролями.

Теорема. Пусть $y=f(x)$ и $x=g(y)$ - взаимно обратные, возрастающие (или убывающие) и непрерывные функции, заданные в некоторых промежутках. Если в точке x существует конечная производная $f'(x)\neq 0$, то в соответствующей точке y функция $g(y)$ также имеет производную (по y), причем

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

что можно записать и так:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Если функция имеет нулевую или бесконечную производную, то обратная функция в соответствующей точке имеет бесконечную или соответственно нулевую производную.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Найти производную функции в точке x=0:

1. $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^3+x^2\sin\frac{2}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x^2\cos\frac{1}{9x}\right)+2x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x\cos\frac{1}{5x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\operatorname{tg}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x\sin\frac{3}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\frac{1}{x}\right)}-1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Задача 2. Найти производные функций:

1. 1. $y=2x^3+5x^2-7x-4$
2. $y=\sqrt{x}$
3. $y=-ctg\,x-x$
4. $y=\dfrac{1}{x^2}$
5. $y=\sqrt[3]{x^2}$
6. $y=5\sin x+3\cos x$
7. $y=5(tg\,x-x)$
8. $y=\dfrac{1}{e^x+1}$
9. $y=2^{x^2}$
10. $y=x\sqrt{x}$

Задача 3. Найти производные заданных функций:

1. $y=2^{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$. 2. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 3. $y=\ln^2(1-\cos x)$.

4. $y=\ln(\arcsin\sqrt{x})$. 5. $y=\dfrac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+\ln^2 3}$. 6. $y=\dfrac{\operatorname{sh}2x}{\operatorname{ch}^2 2x}$.

7. $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 8. $y=\operatorname{arctg}3^{\sqrt{x}}$. 9. $y=\ln(1+\sqrt{\operatorname{th}x})$.

10. $y=\ln\sin 3-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Задание 4. Вычислить производную функции

а) $y=5^x+x\ln x$, в точке $x_0=1$;

б) $y(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{5}x-4x^3+5$, в точке $x_0=1$;

в) $f(x)=2x\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x_0=4$;

г) $f(x)=4x^3+6x+3$ в точке $x_0=1$.

Задание 5. Вычислить производные:

а)

1) $y=\arcsin 5x$; 2) $y=\arcsin\sqrt{x}\ (x>0)$; 3) $y=\arcsin mx$;
4) $y=\arccos 6x$; 5) $y=\arccos(1-x^2)$; 6) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

б)

1) $y=\operatorname{arctg}5x$; 2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 3) $y=\operatorname{arctg}3x^2$;

4) $y=\sqrt{\operatorname{arctg}x}$; 5) $y=\operatorname{arcctg}mx$; 6) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{1+x^2}$.

в)

1) $y = \ln(ax+b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln \sin x$;

4) $y = \ln \operatorname{arc\,tg} x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;

7) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Вопросы

1. Сформулируйте задачи, приводящие к понятию производной.
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
4. Какая функция называется сложной?
5. Объясните правила дифференцирования сложной функции.
6. Какая функция называется обратной данной?
7. Каковы правила дифференцирования обратной функции?

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 16.

Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.

Цель работы: сформировать умение вычислять производные неявных, показательно-степенных и параметрически заданных функций, производные высших порядков и применять умение при решении практических задач профессиональной деятельности.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Пусть необходимо вычислить производную функции, заданной параметрически, если зависимость *y* от *x* задана посредством параметра t:

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

то зависимость y' от x задается посредством параметра t формулами

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}. \end{cases} \qquad (1)$$

Вычисляем $f'(t)$ и $g'(t)$, подставляем в формулу (1) и записываем ответ.

Пример

Найти производную y'_x, если

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y = \sqrt{1+t^2} - \ln \dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

Решение. Вычисляем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}} \frac{\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} - (1+\sqrt{1+t^2})}{t^2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (1), получаем

$$\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}), \\ y' = \dfrac{1+t^2}{t}. \end{cases}$$

Если независимая переменная *x* и функция *y* связаны уравнением вида *f(x,y)=0*, которое не разрешено относительно *y*, то *y* называется неявной функцией *x*. Несмотря на то, что уравнение *f(x,y)=0* не разрешено относительно *y*, оказывается возможным найти производную от *y* по *x*. Прием вычисления производной неявной функции состоит в том, что обе части уравнения *f(x,y)=0* дифференцируются по *x* с учетом, что *y* есть функция *x*. Из полученного уравнения определяется y'.

Пример Найти производную от неявной функции 5x+3y-7=0.

Дифференцируя по x обе части равенства и учитывая, что: 1) y есть функция x и что 2) производная правой части равенства равна 0, получаем $5 + 3y' = 0;\ 3y' = -5;$ $y' = -\frac{5}{3}$.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $y' = f'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка. Эта производная сама является *функцией* от x и, может быть, в свою очередь имеет производную. Производную от функции $y' = f'(x)$ называют *второй* производной (или производной *второго порядка*) от функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов

$$y'',\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad f''(x),\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2},\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x).$$

Может случиться, что и вторая производная в свою очередь имеет производную; эту производную называют *третьей* производной (или производной *третьего порядка*) от функции $y = f(x)$ и обозначают каким-либо из символов

$$y''',\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad f'''(x),\quad \frac{d^3f(x)}{dx^3},\quad \frac{d^3}{dx^3}f(x).$$

Аналогично вводится *четвертая, пятая* и другие производные - производные любого порядка. Для обозначения производной n-го порядка употребляются символы:

$$y^{(n)},\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^nf(x)}{dx^n},\quad \frac{d^n}{dx^n}f(x).$$

Иногда для указания той переменной, по которой берется производная, пишут

$$y''_{xx},\quad y'''_{xxx},\quad \ldots$$

или, более коротко,

$$y''_{x^2},\quad y'''_{x^3},\quad \ldots$$

Пример

$y = 2x^3,\quad y' = 6x^2,\quad y'' = 12x,\quad y''' = 12,\quad y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = 0$.

Пример

$y = 2x^3 - 5x^2 + 1,\quad y' = 6x^2 - 10x,\quad y'' = 12x - 10,\quad y''' = 12,\quad y^{(4)} = y^{(5)} = \ldots = 0$.

Пример

$y=\sin x$, $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y'''=-\cos x$, $y^{(4)}=\sin x$, значения последующих производных чередуются в том же порядке.

Чтобы имело смысл говорить о конечном или бесконечном значении $y^{(n)}$ в точке x_0, нужно, чтобы $y^{(n-1)}$ как функция от x была определена и конечна в некотором промежутке, содержащем точку x_0. Таким образом, когда говорят, что в точке x_0 имеется конечная или бесконечная *n*-я производная, то тем самым подразумевают существование конечной $(n-1)$-й производной в некотором промежутке, содержащем точку x_0.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Вычислить производную функции:

а)

1) $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

2) $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

3) $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)$.

б)

1. $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$. 2. $y=x^x 3^{\sqrt{x}}$.

5. $y=(\operatorname{tg} x)^{\ln x}$. 6. $y=x^{\sqrt{x}}\,2^{\sin x}$.

7. $y=x^{2^{\cos x}}$. 8. $y=x^{\operatorname{tg} x}$.

9. $y=(\sin 3x)^{\ln\sin 3x}$. 10. $y=x^{2^x}\,3^x$.

Задание 2. Найти производные n-го порядка заданных функций:

1. $y=\sin 2x+\cos 3x$. 2. $y=\sin(3x+1)+\cos 2x$. 3. $y=2^{3x}$.

4. $y=\ln(2x+4)$. 5. $y=\dfrac{x}{x+1}$. 6. $y=\dfrac{x+1}{2x+3}$.

7. $y=3^{2x+1}$. 8. $y=\ln(3x+1)$. 9. $y=5^{2x+4}$.

10. $y=\sqrt{x}$.

Вопросы

1. Какая функция считается заданной неявно?
2. Запишите формулы дифференцирования функции, заданной неявно.
3. Для дифференцирования каких функций целесообразно применение метода логарифмического дифференцирования?
4. Дайте определение производной порядка n. Как обозначаются производные высших порядков?
5. Опишите особенности дифференцирования функций, заданных параметрически.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 17.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции.

Цель работы*:* сформировать умение использовать различные приложения производной функции при решении практических задач.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Речь пойдет о вычислении предела отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших. В первом случае говорят, что имеют дело с «неопределенностью типа $\frac{0}{0}$», во втором случае – с «неопределенностью типа $\frac{\infty}{\infty}$». Конечно, сами по себе символы $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ лишены смысла, и их используют лишь для обозначения типа неопределенности.

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\ln x}$ – неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+5x-1}{2x^3+3}$ – неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Следующая теорема основывается на теореме Коши и дает полезное общее правило для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, в литературе обычно называющееся *правилом Лопиталя*:

Пусть при $x\to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если второй предел (конечный или бесконечный) существует. При этом предполагается, что в некоторой окрестности точки а (за исключением, быть может, самой этой точки) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x)\neq 0$ при $x\neq a$.

Правило сохраняет силу и тогда, когда рассматриваются лишь значения $x<a$ или $x>a$, а также в случае $a=\infty$, $+\infty$ или $-\infty$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{\sec^2 x}=5.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos \pi x}{\frac{1}{x}}=-\pi$$

Пример.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{(x^2-3)(2x-3)}=4.$$

Может случиться, что отношение производных опять приводит к неопределенности. Но к отношению производных можно снова применить установленное правило (если, конечно, выполнены условия его применимости), т.е. перейти к отношению вторых производных. Если и здесь получается неопределенность, то переходим к третьим производным, и т. д. Коль скоро на каком-то шаге мы получим предел, который сможем вычислить, то найденное его значение и будет искомым пределом отношения функций.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Имеется еще ряд особых случаев вычисления пределов, однако все они легко сводятся к случаям неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$:

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$, где $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ – случай неопределенности типа $0\cdot\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$, где $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ – случай $\infty-\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$, где либо $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ – случай 0^0, либо $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to 0$ – случай ∞^0, либо $f(x)\to 1$ и $g(x)\to\infty$ – случай 1^∞.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 x}{\sin x}=-\lim\limits_{x\to 0}(\cos x\cdot\sin x)=0$

Формула Тейлора для многочлена

Рассмотрим многочлен *n*-й степени

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n \qquad (1)$$

($c_0, c_1, c_2\ldots c_n$ – постоянные). Продифференцируем эту функцию *n* раз:

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1},$$
$$f''(x)=1\cdot 2c_2+2\cdot 3c_3x+\ldots+(n-1)nc_nx^{n-2},$$
$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3c_3+\ldots+(n-2)(n-1)nc_nx^{n-3},$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot nc_n.$$

Если во всех этих формулах положить $x=0$, то получим $f(0)=c_0$, $f'(0)=c_1$, $f''(0)=2!c_2$, $f'''(0)=3!c_3$, . . . , $f^{(n)}(0)=n!c_n$,

откуда

$$c_0=f(0),\ c_1=\frac{f'(0)}{1!},\ c_2=\frac{f''(0)}{2!},\ c_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ .\ .\ .\ ,\ c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставив эти значения в равенство (1), найдем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (2)$$

Здесь коэффициенты многочлена выражены через его значение и значения его производных в точке $x=0$.

Оказывается справедливой и более общая формула. Пусть *a* – какое-нибудь число. Положим $x-a=t$, t – новая переменная. Тогда

$$f(x)=f(t+a)=c_0+c_1(t+a)+c_2(t+a)^2+c_3(t+a)^3+\ldots+c_n(t+a)^n;$$

это – многочлен степени *n* относительно *t*. Раскрыв скобки и сгруппировав члены, получим

$$f(x)=C_0+C_1t+C_2t^2+C_3t^3+\ldots+C_nt^n$$

($C_0, C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$ – новые коэффициенты) или, вернувшись к переменной *x*,

$$f(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+\ldots+C_n(x-a)^n. \qquad (3)$$

Таким образом, *каково бы ни было a, многочлен степени n всегда можно записать в виде* (3). Эта формула носит название *формулы Тейлора* для многочлена и содержит формулу (2) как частный случай (при $a=0$); формулу (2) называют часто *формулой Маклорена*.

Формула Тейлора для любой n раз дифференцируемой функции:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

Формула Тейлора имеет важные применения во многих вопросах математического анализа и его приложений. В частности, во многих случаях она позволяет функцию сложной природы с большой степенью точности заменить многочленом, т.е. функцией более простой, дает простой способ приближенного вычисления значений функции.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$ (0^0)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$ (0^0)

3) $\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

Задача 2. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to0}(\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}$ (1^∞);

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ (1^∞);

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ (1^∞);

4) $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^{x}$ (∞^0);

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$ (∞^0).

Задача 3. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$ и $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$; 5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

Задача 4. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x\operatorname{tg}x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{2}\sec x\right)$.

Задача 5. Разложить многочлен по степеням $x-x_0$, если:

а) $P(x)=x^3+4x^2-6x-8,\quad x_0=-1$;

б) $P(x)=x^5-3x^4+7x+2,\quad x_0=2$.

Задача 6. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0=1$.

Задача 7. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)=2^x$ в точке $x_0=\log_2 3$.

Вопросы

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
2. Неопределенности какого вида можно «раскрывать» при помощи правила Лопиталя?
3. Записать формулу Тейлора для многочлена. Привести пример практического приложения формулы.
4. Запишите формулу Маклорена. Объясните взаимосвязь формул Тейлора и Маклорена для многочлена.
5. Запишите формулу Тейлора для любой дифференцируемой n раз функции.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.

Лабораторная работа № 18.

Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты графика функции.

Цель работы: сформировать умение применять производную функции при ее исследовании и построении графика.

Формируемые компетенции:

Код	Формулировка:
ОПК-1	Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата

Теоретическая часть

Точки, в которых функция имеет экстремумы, следует искать среди тех внутренних точек ее области задания, где либо $f'(x)=0$, *либо* $f'(x)=\infty$, *либо* $f'(x)$ *не существует*. Все эти случаи реализуются, например, для функций $y=x^2$, $y=x^{2/3}$, $y=|x|$, каждая из которых имеет минимум при $x = 0$.

Точки указанного вида условимся называть критическими точками. Не в каждой критической точке обязательно будет экстремум. Действительно, точка x = 0 будет критической для каждой из функций $y=x^3$ ($y'=3x^2$, $y'=0$ при x=0), $y=\sqrt[3]{x}$ ($y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}$, $y'=\infty$ при x=0),

Следующие теоремы позволяют определить, имеется в данной критической точке экстремум или нет, и если имеется, то максимум или минимум.

Теорема 1. *Пусть* x_0 *—критическая точка и функция* $f(x)$ *непрерывна в этой точке. Если в некоторой окрестности точки* x_0*:*

1) $f'(x)>0$ *при x<* x_0 *и* $f'(x)<0$ *при x>*x_0*, т. е. при переходе через точку* x_0 *производная меняет знак с плюса на минус, или*

2) $f'(x)<0$ *при x<* x_0 *и* $f'(x)>0$ *при x<* x_0*, т. е. при переходе через* x_0 *производная меняет знак с минуса на плюс, или*

3) производная не меняет знака при переходе через x_0*, то в случае 1) имеет место максимум, в случае 2)—минимум, в случае 3) экстремума нет.*

<u>Пример</u>. $f(x)=x^3-3x+1$. Функция всюду дифференцируема. Следовательно, все критические точки находятся из уравнения

$$f'(x)=3x^2-3=0.$$

Отсюда

$$x^2-1=0,\ x_1=-1,\ x_2=1$$

— две критические точки.

1) $x_1=-1$. При x < — 1 имеем: $f'(x)=3x^2-3>0$; при $x>-1$ (но x<1): $f'(x)<0$. Следовательно, в точке $x_1=-1$ имеет место *максимум*.

2) $x_2=1$. При x<1 (но x> -1): $f'(x)=3x^2-3<0$; при x>1 имеем: $f'(x)>0$. Следовательно, в точке $x_2=1$ имеет место *минимум*.

Теорема 1 позволяет высказать следующие практически полезные соображения.

Пусть речь идет об отыскании экстремумов функции $f(x)$, непрерывной в некотором промежутке и имеющей в нем *конечное* множество критических точек.

Найдя все критические точки, расположим их в порядке возрастания абсцисс:

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n<b \tag{1}$$

(a и b — концы рассматриваемого промежутка). В каждом из интервалов

$$(a,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{n-1},x_n),(x_n,b) \tag{2}$$

существует конечная $f'(x)\neq 0$ (поскольку все точки, где $f'(x)=0$, $f'(x)=\infty$ или где $f'(x)$ не существует, вошли в число точек x_1, x_2, ... , x_n). Предполагая $f'(x)$ непрерывной в каждом из частичных интервалов (2) — на практике это обычно так и бывает, — нетрудно прийти к выводу, что $f'(x)$ *сохраняет знак* внутри каждого такого интервала (если бы $f'(x)$ *меняла* знак внутри какого-нибудь из интервалов (2), то по свойству непрерывных функций она обращалась бы в нуль в некоторой *внутренней* точке этого интервала, что невозможно). Чтобы найти этот знак, достаточно, например, установить его для какой-нибудь *конкретной* точки соответствующего интервала.

В результате интервалам (2) будет соответствовать некоторая последовательность знаков плюс и минус, характер чередования которых в силу теоремы 1 позволяет судить о наличии максимума (смена плюса на минус), минимума (смена минуса на плюс) или об отсутствии экстремума (сохранение знака) в соответствующих точках.

Пример. $f(x)=(x+1)^2(x-1)^3$. Функция задана и непрерывна во всем бесконечном промежутке $(-\infty,\infty)$. Ее производная

$$f'(x)=2(x+1)(x-1)^3+3(x+1)^2(x-1)^2=(x+1)(x-1)^2(5x+1)=5(x+1)(x-1)^2\left(x+\frac{1}{5}\right) \quad (3)$$

всюду существует и конечна. Следовательно, критическими точками будут *лишь* те, для которых

$$f'(x)=0,$$

т. е.

$$x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{5},\ x_3=1.$$

Промежуток задания функции тем самым разбивается на интервалы

$$(-\infty,-1),\ \left(-1,-\frac{1}{5}\right),\ \left(-\frac{1}{5},1\right),\ (1,+\infty).$$

Соответствующая последовательность знаков производной имеет вид

$$+,-,+,+.$$

Следовательно, в точке $x_1=-1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(-1)=0$; в точке $x_2=-\frac{1}{5}$ - минимум, причем $f\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{16}{25}\cdot\frac{216}{125}=-\frac{3456}{3125}$, в точке $x_3=1$ экстремума нет.

Теорема 2. *Пусть в критической точке x функция* $f(x)$ *n раз дифференцируема* (*n* > 1)*, причем* $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$*, но* $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. *Если n четное, то имеет место экстремум, а именно: при* $f^{(n)}(x_0)<0$ *—максимум, при* $f^{(n)}(x_0)>0$*—минимум. Если же n нечетное, то экстремума нет*.

Отыскание наибольших и наименьших значений функций

Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна в некотором промежутке. Если этот промежуток не является отрезком, то, как мы знаем, среди значений $f(x)$ может и не быть наибольшего или наименьшего. Однако можно указать простой признак, когда такие значения заведомо существуют.

Теорема 3. *Если в данном промежутке имеется единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет либо наибольшим, либо наименьшим, смотря по тому, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.*

Если наибольшее или наименьшее значение достигается во *внутренней* точке отрезка, то оно *необходимо* будет одним из максимумов или минимумов и, следовательно, будет достигаться в одной из критических точек. Но оно может достигаться и в конце отрезка. Отсюда следует, что для отыскания наибольшего или наименьшего значений $f(x)$ достаточно сравнить между собой ее значения во всех критических точках и в точках a и b ; *наибольшее* из всех этих чисел будет *наибольшим значением* $f(x)$ на отрезке $[a,b]$; *наименьшее* из этих чисел даст *наименьшее значение* $f(x)$.

Пример. Функция $f(x)=\sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$ имеет областью существования отрезок [-1,1]. Ее наибольшее и наименьшее значения, очевидно, достигаются в тех же точках, что и для функции $g(x)=(1-x^2)(1+2x^2)$ (рассматриваемой на упомянутом отрезке). Из уравнения

$$g'(x)=-2x(1+2x^2)+(1-x^2)\cdot 4x=2x(1-4x^2)=0$$

находим $x_1=0$, $x_2=-0{,}5$, $x_3=0{,}5$. В этих точках $g(x)$ имеет значения:

$$g(0)=1,\ g(-0{,}5)=g(0{,}5)=1{,}125.$$

Если сопоставим эти значения со значениями в концах $g(-1)=g(1)=0$, то увидим, что наибольшим значением для $g(x)$ на отрезке [-1, 1] будет 1,125 (при $x=\pm 0{,}5$), наименьшим будет 0 (при $x=\pm 1$). Для функции $f(x)$ наибольшим значением будет тогда $\sqrt{1{,}125}$ (при $x=\pm 0{,}5$), наименьшим — по-прежнему 0 (при $x=\pm 1$).

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$ и в точке с абсциссой x_0 имеет касательную, не параллельную оси *Oy*.

Если в некоторой окрестности точки x_0 кривая лежит над этой касательной, то говорят, что кривая в точке x_0 выпукла вниз. *Аналогично, если в некоторой окрестности* x_0 *кривая лежит* под *касательной, то говорят, что она в точке* x_0 выпукла вверх. Если в некоторой окрестности точки x_0 слева от x_0 кривая лежит по одну сторону упомянутой касательной, а справа от x_0 — по другую сторону, то говорят, что x_0 есть *точка перегиба* кривой.

Теорема 4. *Если в точке* x_0 *существует конечная производная* $f''(x_0)$, *причем* $f''(x_0)>0$, *то в точке* x_0 *кривая выпукла вниз, если же* $f''(x_0)<0$, *то кривая выпукла вверх.*

Теорема 5. *Пусть* $f''(x)$ *существует и конечна в некоторой окрестности точки* x_0. *Если* $f''(x)$ *меняет знак при переходе x через точку* x_0, *то* x_0*—точка перегиба. Если же* $f''(x)$ *в окрестности* x_0 *сохраняет знак, то в точке* x_0 *перегиба нет.*

<u>Пример</u>. Найти точки перегиба и исследовать характер выпуклости кривой $y=x^3-3x^2+1$. Вычисляем: $y'=3x^2-6x$, $y''=6x-6$. Уравнение $y''=6x-6=0$ дает $x=1$. При $x<1$, очевидно, $y''<0$ (кривая выпукла вверх), если же $x>1$, то $y''>0$ (кривая выпукла вниз). Точка $x=1$ является точкой перегиба.

Отыскание асимптот

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$. Может случиться, что при $x\to+\infty$ или при $x\to-\infty$ кривая неограниченно приближается к некоторой фиксированной прямой $y=kx+b$, называемой *асимптотой* для данной кривой. Точнее говоря, *прямая* $y=kx+b$ *называется асимптотой для кривой* $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$.

Из высказанного определения следует, что кривая $y=f(x)$ имеет *горизонтальную* асимптоту $y=b$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ (или соответственно при $x\to-\infty$).

Для существования наклонной асимптоты $y=kx+b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$. (При $k=0$ получаем опять горизонтальную асимптоту.)

<u>Пример</u>. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+5}{x+1}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3x+5}{x+1}-x\right]=2$$

Следовательно, имеется асимптота (и при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$): $y=x+2$.

Пример. Определим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-2x^2+3$ на отрезке [-2;1].

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке [-2;1], как многочлен. Поэтому по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Найдем критические точки, для чего продифференцируем функцию.

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)$$

Тогда $f'(x)=0$, если $x = 0$ или $x = -1$ или $x = 1$.

Получили две критические точки $x = 0$ и $x = -1$ принадлежащие данному промежутку [-2;1]. Точка $x = 1$ не является внутренней и поэтому не критическая.

Вычислим значения функции на концах промежутка и в критических точках и выберем из них наибольшее и наименьшее.

$$f(-2)=(-2)^4-2(-2)^2+3=16-8+3=11$$
$$f(1)=1-2+3=2$$
$$f(0)=3$$
$$f(-1)=1-2+3=2$$

Следовательно, $\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=2$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=11$.

Содержание отчета

1. Тема
2. Цель работы
3. Краткое описание выполненной работы.
4. Сформулировать заключение и выводы
5. Ответить на контрольные вопросы.

Контрольные вопросы и задания.

Задача 1. Найти значения x, при которых функция $f(x)=4x+\frac{9}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 2. Найти значения x, при которых функция $f(x)=3x^2+\frac{48}{x}$ имеет экстремумы.

Задача 3. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=x^3+1{,}5x^2+2$.

Задача 4. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

Задача 5. Найти интервалы монотонного убывания функции $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}-x$.

Задача 6. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y=\frac{-3x^2-5x-4}{x+1}$.

Задача 7. Найти уравнение наклонной асимптоты графика функций $y=\frac{x^2+3x-12}{x+5}$.

Задача 8. Найти все критические точки функции $f(x)=2x^2-6|x+1|+5$.

Задача 9. Найти все критические точки х функции $f(x)=x^2-5|x|+6$.

Вопросы

1.Сформулируйте условия монотонности функции.
2. Какие точки называются стационарными; критическими; точками экстремума?
3. Сформулируйте необходимые условие экстремума.
4. Какая функция называется выпуклой вверх (выпуклой вниз)?
5. Что такое точка перегиба?
6. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вверх (вниз).
7. Сформулируйте необходимое условие точки перегиба.
8. Что такое асимптота графика функции? Какие виды асимптот Вы знаете?

9. Как определить наличие вертикальной асимптоты?
10. В каком случае прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции?

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Перечень основной литературы

1.Гусак, А. А. Высшая математика. Том 1: учебник / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2009. — 544 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/28059.html

Перечень дополнительной литературы

1.Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2013. — 304 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20266.html.