

А. В. Ляхов [A. V. Lyakhov]

УДК 621.396

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СКРЫТНОСТИ СИСТЕМ СПУТНИКОВОЙ СВЯЗИ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛОВ ОТ ВЫБОРА РАБОЧЕЙ ЧАСТОТЫ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**DETERMINATION OF DEPENDENCE OF ENERGY STEALTH COEFFICIENT OF SATELLITE COMMUNICATION SYSTEMS AT SIGNAL DETECTION FROM CHOICE OF OPERATING FREQUENCY ON THE BASIS OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS**

*В статье на основе результатов обнаружения сигналов в канале с райсовскими замираниями, анализа глубины замираний в трансионосферном радиоканале и численных методов решения нелинейных уравнений, разработана методика оценки коэффициента энергетической скрытности в системах спутниковой связи в зависимости от выбора рабочей частоты.*

*In the article on the basis of results of signal detection in a channel with the Rician fading, analysis of depth of fading in a transionospheric radio channel and numerical methods of solving nonlinear equations, developed a methodology of estimation of energy stealth coefficient in satellite communications systems depending on the choice of operating frequency.*

**Ключевые слова:** райсовские замирания, трансионосферный радиоканал, численные методы, коэффициент энергетической скрытности, система спутниковой связи, рабочая частота.

**Key words:** Rician fading, transionospheric radio channel, numerical methods, energy stealth coefficient, satellite communications system, operating frequency.

Известна [1] графоаналитическая методика оценки энергетической скрытности в низкочастотных системах спутниковой связи (ССС) при приеме на четыре антенны в зависимости от значения рабочей частоты  $f_0$  в интервале от 30...100 МГц. Эта методика состоит из следующих этапов:

1) аналитически определяются и строятся графики зависимости вероятности правильного обнаружения сигналов  $P_{по}$  от отношения сигнал/шум (С/Ш) на входе приемника  $h^2$  при заданном значении вероятности ложной тревоги  $P_{лт} = 10^{-4}$  для ряда значений рабочей частоты  $f_0$  ССС в интервале от 30 МГц до 1 ГГц. Графическим методом находят допустимые значения отношения С/Ш на входе приемника (ПРМ)  $h^2_{допр}$  при заданных значениях рабочей частоты  $f_0$  и вероятности правильного обнаружения  $P_{по} = 0,99$ ;

2) рассчитываются значения коэффициента энергетической скрытности  $\gamma_{эс} = h^2_{допр} / h^2_p$  в низкочастотных ССС при приеме на четыре антенны в зависимости от значения рабочей частоты при фактическом отношении С/Ш на входе приемника обнаружения  $h^2_p = 16$  дБ.

Недостатком известной методики [1] является то, что она не позволяет автоматизировать процесс определения энергетической скрытности в ССС в зависимости от выбора рабочей частоты, так как на втором этапе этой методики используется графический метод определения допустимых значений отношения С/Ш на входе ПРМ  $h^2_{допр}$  при заданных значениях рабочей частоты  $f_0$  и вероятности правильного обнаружения, что приводит к погрешностям (искомые значения определяются грубо, «на глаз») и значительным затратам времени.

Цель исследования состоит в развитии известной методики методика оценки энергетической скрытности в низкочастотных ССС при разнесенном приеме сигналов на основе применения численных методов решения нелинейных уравнений [2, 3].

Как известно [4], в нормальной ионосфере электронная концентрация (ЭК)  $N_i = \bar{N} + \Delta N_i$  содержит флуктуации  $\Delta N_i$  относительно среднего (фонового) значения  $\bar{N}$ . При РРВ с пониженной частотой (до  $f_0 = 30...100$  МГц) через неоднородную ионосферу к ПРМ ССС приходит множество ( $i = 1 \dots M$ ) рассеянных неоднородностями ЭК ( $\Delta N_i$ ) лучей с относительными фазовыми сдвигами  $\Delta \varphi_i \propto \Delta N_i / f_0$ . Значения  $\Delta \varphi_i$  определяют усло-

вия возникновения интерференционных быстрых замираний райсовского ( $0 < \Delta\varphi_i < 2\pi$ ) или рэлеевского ( $\Delta\varphi_i \gg 2\pi$ ) типа. При традиционно используемых в ССС несущих частотах  $f_0 = 1 \dots 10$  ГГц относительные фазовые сдвиги лучей отсутствуют (т. к.  $\Delta\varphi_i \ll \Delta N_i / f_0 = 0$ ), и поэтому интерференционные быстрые замирания не возникают.

Если в ССС использовать наиболее низкие рабочие частоты  $f_0 \approx 30$  МГц, то  $\Delta\varphi_i \ll \Delta N_i / f_0 \gg 2\pi$ , и трансионосферный канал связи (КС) описывается моделью с рэлеевскими замираниями. В этом случае при использовании в ПРМ ССС оптимальной некогерентной (НК) схемы обработки для достижения допустимого значения вероятности ошибки  $P_{\text{ош}} = P_{\text{ош доп}} = 10^{-5}$  потребуется  $h^2_{\text{доп1}}$  допустимое отношение С/Ш на входе ПРМ при одиночной антенне ( $n = 1$ ) и  $h^2_{\text{доп4}} = (C_{2n-1}^n P_{\text{ош}}^{-1})^{1/n} \approx 16$  дБ при использовании разнесенного приема сигналов на четыре ( $n = 4$ ) антенны [1]. Тогда можно уменьшить фактическое отношение С/Ш на входе ПРМ ССС с использованием четырех антенн до допустимой величины  $h^2 = h^2_{\text{доп4}} \approx 16$  дБ и при этом выполнить условие обеспечения требуемой помехоустойчивости ССС ( $h^2 \geq h^2_{\text{доп4}}$ ).

При близком размещении приемников разведки и ССС (не более 10 км) фактическое отношение С/Ш на входе ПРМ обнаружения будет практически таким же, как на входе ПРМ ССС, т. е.  $h^2_p \approx h^2 = h^2_{\text{доп4}} = 16$  дБ. Можно предположить, что на самой низкой рабочей частоте  $f_0 \approx 30$  МГц (когда выполняется условие  $\Delta\varphi_i \ll \Delta N_i / f_0 \gg 2\pi$  возникновения рэлеевских замираний) допустимое отношение С/Ш на входе ПРМ обнаружения, использующего НК прием и одну ( $n = 1$ ) антенну, будет превышать фактическое отношение С/Ш:  $h^2_{\text{доп1}} = h^2_{\text{доп1}} > h^2_p \approx 16$  дБ. Поэтому выполняется условие обеспечения энергетической скрытности ССС ( $h^2_p < h^2_{\text{доп1}}$ ), при котором коэффициент энергетической скрытности ССС превышает единицу:  $\gamma_{\text{ЭС}} = h^2_{\text{доп1}} / h^2_p \approx h^2_{\text{доп1}} / h^2_{\text{доп4}} > 1$ .

Будем считать, что в ПРМ обнаружения используется схема не автокорреляционного (энергетического) приема, а оптимальной НК обработки сигналов. Для нее известна [5, 6] аналитическая зависимость  $P_{\text{по}} = \psi(h^2, \gamma^2, P_{\text{лт}})$  вероятности правильного обнаружения сигналов ( $P_{\text{по}}$ ) от энергетического отношения С/Ш на входе обнаружителя ( $h^2$ ), параметра Райса ( $\gamma^2$ ) и вероятности ложной тревоги ( $P_{\text{лт}}$ ):

$$P_{\text{по}} = Q(a, b), \tag{1}$$

где  $Q(a, b)$  – функция Маркума от аргументов  $a$  и  $b$ , которые должны быть неотрицательными вещественными числами ( $a, b \geq 0$ ).

Функция Маркума определяется следующей формулой [7]:

$$Q(a, b) = \int_b^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_0(ax) dx, \tag{2}$$

где  $I_0(ax)$  обозначает модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка.

Аргументы Функция Маркума зависят от параметров  $h^2, \gamma^2, P_{\text{лт}}$  следующим образом [5, 6]:

$$a = \sqrt{2h^2 \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2 + h^2}}; \quad b = \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{P_{\text{лт}}}\right) \frac{1 + \gamma^2}{1 + \gamma^2 + h^2}}, \tag{3}$$

где  $h^2 = E_r / N_0$  – отношение энергии ( $E_r$ ) сигнала на входе оптимальной схемы обнаружения к спектральной плотности мощности шума ( $N_0$ );  $\gamma^2 = P_p / P_{\text{фл}}$  параметр распределения амплитуды входного сигнала с райсовскими замираниями, характеризующий отношение мощностей регулярной ( $P_p$ ) и флуктуационной ( $P_{\text{фл}}$ ) составляющих принимаемого сигнала ( $0 \leq \gamma^2 \leq \infty$ ).

Зависимость между коэффициентом  $\gamma^2$  и среднеквадратическим отклонением (СКО) фазовых сдвигов ( $\Delta\varphi_i \ll \Delta N_i / f_0$ ) входящих лучей  $\sigma_\varphi = \langle \Delta\varphi_i^2 \rangle^{0,5}$  при трансионосферном распространении радиоволн (РРВ) описывается выражением вида [4]:

$$\gamma^2 = P_p / P_{\text{фл}} = 1 / [\exp(\sigma_\varphi^2) - 1]; \tag{4}$$

$$\sigma_\varphi \approx \sqrt[4]{\pi} \left( 80,8 \frac{\pi}{c} \right) \sqrt{l_s z_y \sec \alpha} \left( \frac{\sigma_{\Delta N}}{f_0} \right) \approx 1,6 \cdot 10^{-2} \left( \frac{\sigma_{\Delta N}}{f_0} \right) \sqrt{\sec \alpha}, \text{ [рад]}, \tag{5}$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света;  $l_s \approx 390$  м – характерный размер ионосферных неоднородностей;  $z_y \approx 5 \cdot 10^5$  м – эквивалентная толщина ионосферы;  $\alpha$  – угол РРВ относительно вертикали, радианы;  $\sigma_{\Delta N} = \langle \Delta N_i^2 \rangle^{0,5}$  – СКО флуктуаций ЭК в неоднородностях ионосферы ( $2 \cdot 10^9 \dots 4 \cdot 10^9$  эл/м<sup>3</sup>);  $f_0$  – рабочая частота, Гц.

Обращает на себя внимание тот факт, что при фиксированном значении рабочей частоты  $f_0$  искомые допустимые значения отношения сигнал/шум на входе приемника ССС можно определить на основе применения численных методов решения нелинейных уравнений [2, 3]. Действительно, вместо того, чтобы искать графическим методом корни нелинейного уравнения  $P_{\text{по}}(h^2, f_0) = 0,99$ , можно применить численные методы поиска корней нелинейного уравнения вида  $f(x) = 0$ , которое в рассматриваемом случае принимает вид:

$$f(h^2) = P_{\text{по}}(h^2, f_0) - 0,99 = 0. \tag{6}$$

Задачу поиска решения уравнения (6) конкретизируем следующим образом:

Дано:  $P_{\text{ПО}} = P_{\text{ПО ДОП}} = 0,99$ ,  $P_{\text{ЛТ}} = P_{\text{ЛТ ДОП}} = 10^{-4}$ ,  $l_s \approx 390$  м,  $z_s \approx 5 \cdot 10^5$  м,  $\sigma_{\Delta N} = 2 \cdot 10^9$  эл/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 65^\circ$ ,  $f_0 = 10^8$  Гц. Требуется, используя численные методы, найти все или некоторые корни уравнения (6).

К численным методам поиска корней указанного нелинейного уравнения, в частности, относятся метод бисекции, метод хорд, метод Ньютона, комбинированный метод, основанного на методах хорд и Ньютона, и др. [2, 3].

В рамках указанных методов задача поиска корней уравнения (6) распадается на несколько задач [2]. Во-первых, надо исследовать количество, характер и расположение корней (локализовать корни). Во-вторых, найти приближенные значения корней (получить начальное приближение). В-третьих, выбрать из них интересующие корни и вычислить их с требуемой точностью на основе численных методов.

Первая и вторая задачи решаются аналитическими и графическими методами. В рассматриваемом случае в рамках первой задачи на основе аналитических соотношений (1) – (5), (6) и оговоренных ранее исходных данных были рассчитан и построен в Mathcad график функции  $f(h^2)$  (рис. 1).

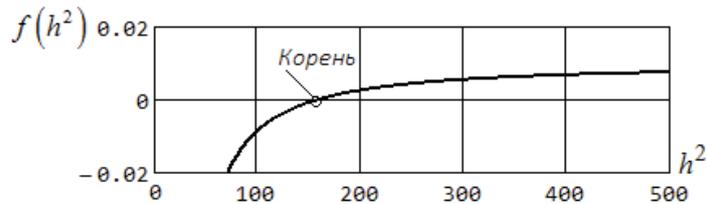


Рис. 1. График функции  $f(h^2)$  при  $P_{\text{ЛТ ДОП}} = 10^{-4}$ ,  $l_s \approx 390$  м,  $z_s \approx 5 \cdot 10^5$  м,  $\sigma_{\Delta N} = 2 \cdot 10^9$  эл/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 65^\circ$ ,  $f_0 = 10^8$  Гц

На рис. 2 видно, что график исследуемой функции  $f(h^2)$  пересекает ось абсцисс один раз в интервале значений отношения сигнал/шум на входе приемника ( $h^2$ ) от  $h^2_l = 100$  до  $h^2_u = 200$ . На концах этого интервала функция  $f(h^2)$  имеет разные знаки. Поэтому уравнение (6) имеет один действительный корень приблизительно равный  $h^2_{\text{ДОП}} \approx 150$ .

В рамках третьей задачи выбираем интересующий нас корень  $h^2_{\text{ДОП}} \approx 150$ , локализованный на отрезке  $[h^2_p, h^2_u] = [100, 200]$ , и уточним его с требуемой точностью на основе численных методов бисекции, хорд, Ньютона и комбинированного метода.

Итерационный процесс метода деления пополам (бисекций) заключается в следующем [2, 3]. До начала итерационного процесса предполагается, что искомый корень локализован на отрезке  $[h^2_p, h^2_u]$  на концах которого функции  $f(h^2)$  имеет разные знаки. Алгоритм вычисляет среднюю точку этого отрезка

$$h_r^2 = \frac{h_l^2 + h_u^2}{2} . \tag{7}$$

Если  $f(h_r^2) = 0$ , корень найден, и алгоритм завершает работу. В противном случае он продолжает поиск корня либо на отрезке  $[h^2_p, h_r^2]$ , либо на отрезке  $[h_r^2, h^2_u]$  в зависимости от того, на какой из двух половин отрезка функция  $f(h^2)$  имеет разные знаки на концах нового отрезка изменения аргумента. Если требуется найти корень с процентной погрешностью  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}}$  %, то деление отрезка поиска корня пополам продолжается до тех пор, пока на итерации N выполниться следующее неравенство:

$$|\varepsilon_a|_N = \left| \frac{h_{rN}^2 - h_{r(N-1)}^2}{h_{rN}^2} \right| 100\% \leq |\varepsilon_a|_{\text{треб}} , \tag{8}$$

где через  $h_{r(N-1)}^2$  обозначено середина  $h_{r(N-1)}^2$  отрезка  $[h_{l(N-1)}^2, h_{u(N-1)}^2]$  на предыдущей итерации с номером N-1. Тогда середина  $h_{rN}^2$  последнего отрезка  $[h_{lN}^2, h_{uN}^2]$  на итерации N даст значение корня уравнения (6) с требуемой точностью  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}}$ :

$$h_{rN}^2 = \frac{h_{lN}^2 + h_{uN}^2}{2} . \tag{9}$$

В результате вычислений в MATLAB по формулам (1) – (9) установлено, что при  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 0,0001$  % итерационный процесс поиска корня уравнения (6) методом половинного деления (бисекций) завершается на двадцатой итерации ( $N = 20$ ), когда искомый корень принимает значение  $h_{r20}^2 = h_{\text{ДОП}}^2 = 160,0041$  с процентной погрешностью вычисления корня  $|\varepsilon_a|_{20} = 5,9603 \times 10^{-0.5}$  %, удовлетворяющей неравенству (8).

Метод хорд, как и алгоритм метода половинного деления (бисекций), на каждой N итерации получает некоторый отрезок  $[h_{lN}^2, h_{uN}^2]$ , содержащий корень непрерывной функции  $f(h^2)$ , которая имеет значения противоположных знаков в точках  $h_{lN}^2$  и  $h_{uN}^2$ . В отличие от метода деления пополам очередное приближение на итерации N вычисляется не как середина отрезка  $[h_{lN}^2, h_{uN}^2]$ , а как точка пересечения оси абсцисс с прямой линией, проведенной через точки  $(h_{lN}^2, f(h_{lN}^2))$  и  $(h_{uN}^2, f(h_{uN}^2))$ . Формула для точки пересечения выглядит следующим образом [8]:

$$\bar{h}_{sN}^2 = \frac{h_{iN}^2 f(h_{uN}^2) - h_{uN}^2 f(h_{iN}^2)}{f(h_{uN}^2) - f(h_{iN}^2)}. \quad (10)$$

Из (10) следует три возможности: 1) если  $f(h_{iN}^2)$  и  $f(h_{sN}^2)$  имеют различные знаки, то нуль принадлежит интервалу  $[h_{iN}^2, h_{sN}^2]$ ; 2) если  $f(h_{sN}^2)$  и  $f(h_{uN}^2)$  имеют различные знаки, нуль лежит на интервале  $[h_{sN}^2, h_{uN}^2]$ ; 3) если  $f(h_{sN}^2) = 0$ , значит, нулем является  $h_{sN}^2$ .

Если требуется найти корень с процентной погрешностью  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}}$ , то итерационный процесс поиска корня методом хорд продолжается до тех пор, пока на итерации  $N$  не выполнится следующее неравенство:

$$|\varepsilon_a|_N = \left| \frac{h_N^2 - h_{uN}^2}{h_N^2} \right| 100\% \leq |\varepsilon_a|_{\text{треб}}. \quad (11)$$

В результате вычислений в MATLAB по формулам (1) – (6), (10) – (11) установлено, что при  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 0,0001\%$  итерационный процесс поиска корня уравнения (6) методом хорд завершается на девятой итерации ( $N = 9$ ), когда искомым корнем принимает значение  $h^2 = h_{\text{доп}}^2 = 160,0042$  с относительной ошибкой вычисления корня  $|\varepsilon_a|_9 = 8,8005 \times 10^{-0,5}$ , удовлетворяющей неравенству (11).

Известно [2, 3], что метод Ньютона один из наиболее распространенных методов поиска корней нелинейных уравнений. Его называют также методом касательных или методом Ньютона-Рафсона [2, 3]. Если  $h_0^2$  начальное приближение корня уравнения (6), то последовательные приближения методом Ньютона применительно к рассматриваемой задаче находят по формуле:

$$h_N^2 = h_{N-1}^2 - \frac{f(h_{N-1}^2)}{f'(h_{N-1}^2)}, \quad (12)$$

где  $N$  – номер итерации ( $N = 1, 2, \dots$ );  $f(h_{N-1}^2)$  – значение функции  $f(h^2)$  при  $h^2 = h_{N-1}^2$ ;  $f'(h_{N-1}^2)$  – значение первой производной функции  $f(h^2)$  по энергетическому отношению сигнал/шум (С/Ш) на входе обнаружителя ( $h^2$ ) при  $h^2 = h_{N-1}^2$ .

Из (12) следует, что для реализации метода Ньютона требуется существование первой непрерывной производной функции  $f(h^2)$ , т. е. должно выполняться условие:  $f'(h_{N-1}^2) \neq 0$ . Геометрически итерационный процесс (12) означает замену на каждой итерации графика функции  $f(h^2)$  касательной к нему [2, 3].

В методе Ньютона начальное приближение корня  $h_0^2$  уравнения (6) выбирают на интервале  $[h_p^2, h_u^2]$ , руководствуясь следующим правилом: в качестве исходной точки выбирается тот конец интервала  $[h_p^2, h_u^2]$ , которому отвечает ордината того же знака, что и знак второй производной  $f(h^2)$  [3]:

$$h_0^2 = \begin{cases} h_i^2, & \text{если } f(h_i^2) f''(h^2) > 0; \\ h_u^2, & \text{если } f(h_u^2) f''(h^2) > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Если требуется уточнить корень методом Ньютона с процентной погрешностью  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}}\%$ , то итерации метода Ньютона продолжаются до тех пор, пока на  $N$  итерации не выполнится следующее неравенство:

$$|\varepsilon_a|_N = \left| \frac{h_N^2 - h_{N-1}^2}{h_N^2} \right| 100\% \leq |\varepsilon_a|_{\text{треб}}. \quad (14)$$

Применительно к рассматриваемой задаче для определения первой производной  $f'(h^2)$  дифференцированию подлежит функция (1), которую учетом соотношений (2) – (5), задана интегралом, содержащим параметр  $h^2$ . Причем не только подынтегральное выражение в формуле (1), с учетом (2), содержит это параметр, но и нижний предел интеграла зависит от него. Таким образом, вычисление первой частной производной предполагает  $\partial R_{\text{ПО}} / \partial (h^2)$  дифференцирование под знаком интеграла.

Известно, что дифференцирование под знаком интеграла, содержащим параметр, упрощается, если интеграл содержит параметр только в подынтегральном выражении [9–10]. В связи с этим представляется целесообразным использовать альтернативное представление функции Маркума, рассмотренное в [11]:

$$Q(\alpha, \beta) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha \beta \cos \tau + \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha \beta \cos \tau + \beta^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 + 2\alpha \beta \cos \tau + \beta^2}{2}\right) \right] d\tau. \quad (15)$$

Введем обозначение:

$$\varphi(\alpha, \beta, \tau) = \frac{\alpha \beta \cos \tau + \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha \beta \cos \tau + \beta^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha^2 + 2\alpha \beta \cos \tau + \beta^2}{2}\right) \right] \quad (16)$$

Для вычисления  $\frac{\partial P_{\text{ГО}}}{\partial (h^2)}$  производной воспользуемся формулой для дифференцирования под знаком интеграла [9, 10] и правилом вычисления производной от сложной функции [9]. Тогда, взяв частную производную от функции (1) по параметру  $h^2$  получим:

$$\frac{\partial P_{\text{ГО}}}{\partial (h^2)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{\partial [\varphi(\alpha, \beta, \tau)]}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right\} d\tau. \quad (17)$$

В соответствии с определением второй производной [9], на основании соотношения (17), вторую производную  $f''(h^2) = d^2 f(h) / d(h^2)^2$  найдем по формуле:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(h)}{d(h^2)^2} &= \frac{d}{d(h^2)} \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} + \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] d\tau \right\} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{d}{d(h^2)} \left[ \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d(h^2)} \right] + \frac{d}{d(h^2)} \left[ \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \tau)}{\partial \beta} \frac{d\beta}{d(h^2)} \right] \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

На рис. 2 приведен график изменения второй производной  $f''(h^2)$ , вычисленный в Mathcad, при изменении аргумента  $h^2$  в промежутке  $[h_p^2, h_u^2] = [100, 200]$  уточнения корня уравнения (6).

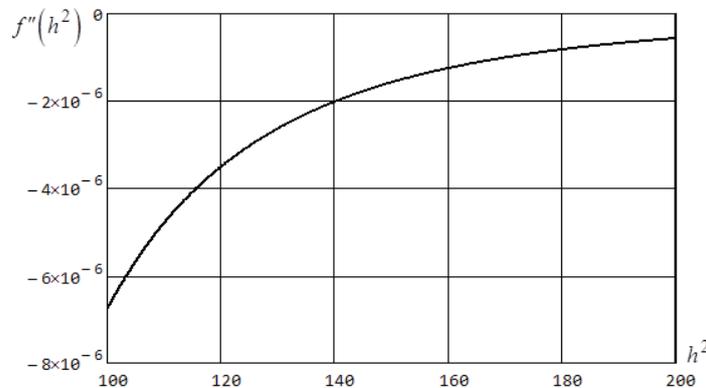


Рис. 2. График изменения второй производной

Как видно на рис. 2в промежутке  $[h_p^2, h_u^2] = [100, 200]$  вторая производная  $f''(h^2)$  принимает отрицательные значения. Следовательно, на основании критерия (13) принимаем начальное приближение корня  $h_0^2 = h_1^2 = 100$ , т. к.  $f(h^2) f''(h^2) > 0$ .

В результате вычислений в MATLAB по формулам (1) – (6), (12) – (18) установлено, что при  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 0,0001$  % итерационный процесс поиска корня уравнения (6) методом Ньютона завершается за семь итераций ( $N = 7$ ). При этом искомым уточненным корнем принимает значение  $h_7^2 = h_{\text{доп}}^2 = 160,004112$  с процентной погрешностью вычисления корня  $|\varepsilon_a|_7 = 6,102517 \times 10^{-10}$ , удовлетворяющей неравенству (14).

Известно [3], что метод хорд формирует последовательные приближения к искомому значению корня нелинейного уравнения с избытком  $\bar{h}_N^2$ , а метод Ньютона с недостатком  $h_N^2$  ( $N = 1, 2, \dots$ ). Соединяя способ хорд и метод Ньютона, получаем комбинированный метод [3], на каждом этапе которого находим значения по недостатку и значения по избытку уточненного корня  $h_{\text{true}}^2$  уравнения (6).

Итерационный процесс комбинированного метода реализуется на основе выражений:

$$\bar{h}_N^2 = \frac{h_{iN}^2 f(h_{uN}^2) - h_{uN}^2 f(h_{iN}^2)}{f(h_{uN}^2) - f(h_{iN}^2)}, \quad h_N^2 = h_{N-1}^2 - \frac{f(h_{N-1}^2)}{f'(h_{N-1}^2)}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

полагая, в соответствии с (13), начальное приближение корня для метода Ньютона  $h_0^2 = h_1^2 = 100$ . Как показано в [3], особенностью комбинированного метода является то, что на каждом шаге метод хорд применяется к новому отрезку  $[h_N^2, \bar{h}_N^2]$ . Из сказанного выше следует, что  $h_N^2 < h_{\text{true}}^2 < \bar{h}_N^2$  и  $0 < h_{\text{true}}^2 - h_N^2 < \bar{h}_N^2 - h_N^2$ .

Так, как допустимое значение процентной погрешности приближенного корня  $h_{\text{true}}^2$  задано заранее  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}}$ , то процесс сближения заканчивается на той итерации, когда будет обнаружено, что

$$|\varepsilon_a|_N = \left| \frac{\bar{h}_N^2 - h_N^2}{\bar{h}_N^2} \right| 100\% \leq |\varepsilon_a|_{\text{треб}} \quad (20)$$

По окончании итерационного процесса комбинированного метода, в соответствии с рекомендациями [3], за значение корня  $h_{true}^2$  примем среднее арифметическое полученных последних значений:

$$h_{true}^2 = \frac{h_N^2 + \bar{h}_N^2}{2} \quad (21)$$

В результате вычислений в MATLAB по формулам (1) – (6), (19) – (21) установлено, что при  $|\varepsilon_a|_{\text{треб}} = 0,0001\%$  итерационный процесс поиска корня уравнения (6) комбинированным методом завершается за пять итераций ( $N = 5$ ). При этом искомым уточненным корнем принимает значение  $h_{true}^2 = 160,004112$  с процентной погрешностью вычисления корня  $|\varepsilon_a|_5 = 1,0344322 \times 10^9\%$ , удовлетворяющей неравенству (20).

В таблице 1 приведены допустимые значения отношения сигнал/шум на входе приемника ССС, найденные графическим методом и перечисленными ранее численными методами, при  $P_{\text{ПО}} = 0,99$  для пяти различных значений рабочей частоты  $f_0$  ССС.

Таблица 1

Значения коэффициента энергетической скрытности ССС

$f_0, \text{Гц}$		$3 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^8$	$10^9$
$\gamma_{\text{эс}}, \text{дБ}$	(графический метод)	12	10	5	-1	-4
	(численные методы)	13,6053	12,2218	7,7334	0,6491	-3,3643

По данным таблицы 1 на рис. 3 построены в MATLAB графики зависимости коэффициента энергетической скрытности ССС ( $\gamma_{\text{эс}}$ ) от выбора рабочей частоты с использованием графического и численных методов определения отношения сигнал/шум на входе приемника ССС.

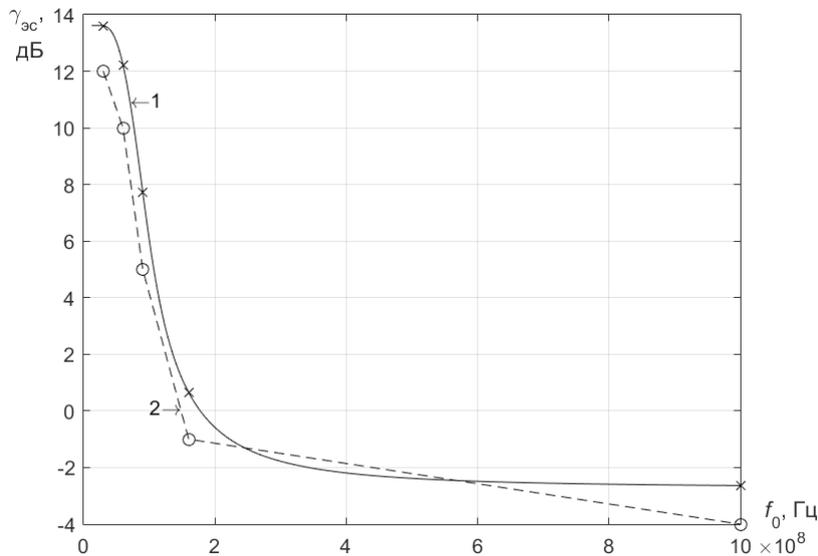


Рис. 3. Зависимости коэффициента энергетической скрытности ССС при обнаружении сигналов от выбора рабочей частоты: 1 – при применении численных методов; 2 – при использовании графического метода

Анализ данных таблицы 1 и рис. 3 показывает, что автоматизация известной методики [1] определения энергетической скрытности в системах спутниковой связи в зависимости от выбора рабочей частоты на основе применения численных методов метод бисекции, метода хорд, метода Ньютона и комбинированного метода решения нелинейных уравнений, приводит к повышению точности определения коэффициента энергетической скрытности ССС и сокращению временных затрат, т. к. появляется возможность применить современные средства вычислительной техники для определения коэффициента энергетической скрытности ССС.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Пашинцев В. П., Ляхов А. В., Ахмадеев Р. Р. Зависимость характеристик обнаружения сигналов систем спутниковой связи от выбора рабочей частоты // Проблемы эффективности и безопасности функционирования сложных технических и информационных систем, XXXIII Всероссийская НТК. г. Серпухов: Военная академия РВСН им. Петра Великого – 2014. С. 234-238.
2. Калиткин Н. Н., Альшина Е. А. Численные методы, Кн. 1. Численный анализ. М.: Издательский центр «Академия», 2013. 304 с.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики: учеб. пособие для вузов. 3-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 664 с.

4. Цимбал В. А., Пашинцев В. П., Чипига А. Ф. Аналитическая зависимость энергетической скрытности спутниковой связи от выбора рабочей частоты // Труды 18 Международной научно-технической конференции «Радиолокация навигация связь», Воронеж, 17-19 апреля 2012 г. Воронеж: 2012. С. 2013-2120.
5. Пашинцев В. П., Чипига А. Ф., Слюсарев Г. В., Сенокосова А. В. Обнаружение сигнала с райсовскими замирениями // Научные технологии. 2012. Т.13. №7. С. 35-48.
6. Пашинцев В. П., Ляхов А. В., Белов А. Д., Бессмертный М. Ю. Методика оценки вероятности правильного обнаружения сигналов с райсовскими замирениями // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2012. №3. С.16-22.
7. Marcum J. I. A Statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar: Mathematical Appendix. RAND Corporation, Santa Monica, CA, Research Memorandum RM-753, 1 July 1948. Reprinted in IRE Transactions on Information Theory, vol. IT-6, pp. 59-267, April 1960.
8. Dukkupati R. V., Numerical Methods. New Age International Publishers (P) Ltd. NewDelhi. India. 2010. 370 p.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. I, II / Пред. и прим. А. А. Флоринского. 8-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 680 с.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Т.2. : Изд-во «Наука». 1974. 479 с.
11. Чучин Е. В. Свойства специальных функций в моделях качества информационных систем // Auditorium: электронный научный журнал Курского гос. университета. 2014. № 1. URL: <http://auditorium.kursksu.ru/pdf/001-013.pdf>.

#### REFERENCES

1. Pashintsev V. P., Lyakhov A. V., Akhmadeev R. R. Zavisimost' kharakteristik obnaruzheniya signalov sistem sputnikovoy svyazi ot vybora rabochey chastoty // Problemy effektivnosti i bezopasnosti funkcionirovaniya slozhnykh tekhnicheskikh i informatsionnykh sistem, XXKhIII Vserossiyskaya NTK. g. Serpukhov: Voennaya akademiya RVSN im. Petra Velikogo – 2014. S. 234-238.
2. Kalitkin N. N., Al'shina E. A. Chislennyye metody, Kn. 1. Chislennyy analiz. M.: Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», 2013. 304 s.
3. Demidovich B. P., Maron I. A. Osnovy vychislitel'noy matematiki: Ucheb. posobie dlya vuzov. – 3-e izd., ispr. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1966. 664 s.
4. Tsimbal V. A., Pashintsev V. P., Chipiga A. F. Analiticheskaya zavisimost' energeticheskoy skrytnosti sputnikovoy svyazi ot vybora rabochey chastoty // Trudy 18 Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Radiolokatsiya navigatsiya svyaz'», Voronezh, 17-19 aprelya 2012 g. Voronezh: 2012. S. 2013-2120.
5. Pashintsev V. P., Chipiga A. F., Slyusarev G. V., Senokosova A. V. Obnaruzhenie signala s raysovskimi zamiraniyami // Naukoemkie tekhnologii. 2012. T.13. №7. S. 35-48.
6. Pashintsev V. P., Lyakhov A. V., Belov A. D., Bessmertnyy M. Yu. Metodika otsenki veroyatnosti pravil'nogo obnaruzheniya signalov s raysovskimi zamiraniyami // Radiotekhnicheskie i telekommunikatsionnye sistemy. – 2012. №3. S.16-22.
7. Marcum J. I. A Statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar: Mathematical Appendix. RAND Corporation, Santa Monica, CA, Research Memorandum RM-753, 1 July 1948. Reprinted in IRE Transactions on Information Theory, vol. IT-6, pp. 59-267, April 1960.
8. Dukkupati R. V., Numerical Methods. New Age International Publishers (P) Ltd. NewDelhi. India. 2010. 370 s.
9. Fikhtengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. V 3 t. T. I, II / Pred. i prim. A.A. Florinskogo. 8-e izd. M.: FIZMATLIT, 2003. 680 s.
10. Smirnov V. I. Kurs vysshey matematiki, T.2. : Izd-vo «Наука». 1974. 479 s.
11. Chuchin E.V. Svoystva spetsial'nykh funktsiy v modelyakh kachestva informatsionnykh sistem // Auditorium: elektronnyy nauchnyy zhurnal Kurskogo gos. universiteta. 2014. № 1. URL: <http://auditorium.kursksu.ru/pdf/001-013.pdf>.

#### ОБ АВТОРЕ

**Ляхов Алексей Владимирович**, старший преподаватель, Кафедра информационной безопасности автоматизированных систем, институт информационных технологий и телекоммуникаций, Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь, проспект Кулакова 2, ауд. 303, тел.: (8652) 95-65-46, тел. +79624003387, E-mail: [lyachov\\_st@mail.ru](mailto:lyachov_st@mail.ru)

**Lyakhov Alexey Vladimirovich**, lecturer of department of information security of automated systems, Institute of Information Technology and Telecommunications, North-Caucasus Federal University, Stavropol, prosp. Kulakova 2, aud. 303, phone: (8652) 95-65-46, Phone (mobile): +79624003387, E-mail: [lyachov\\_st@mail.ru](mailto:lyachov_st@mail.ru)

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СКРЫТНОСТИ СИСТЕМ СПУТНИКОВОЙ СВЯЗИ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛОВ ОТ ВЫБОРА РАБОЧЕЙ ЧАСТОТЫ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**А. В. Ляхов**

Автоматизация известной графоаналитической методики оценки энергетической скрытности низкочастотных систем спутниковой связи при приеме на четыре антенны в зависимости от значения рабочей частоты возможна на основе применения численных методов решения нелинейных уравнений.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они позволяют повысить точности определения коэффициента энергетической скрытности низкочастотных систем спутниковой

связи и сократить временные затраты, т. к. появляется возможность применить современные средства вычислительной техники для решения указанной задачи.

**DETERMINATION OF DEPENDENCE OF ENERGY STEALTH COEFFICIENT OF SATELLITE COMMUNICATION SYSTEMS AT SIGNAL DETECTION FROM CHOICE OF OPERATING FREQUENCY ON THE BASIS OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS**

**A. V. Lyakhov**

Automation of well-known grapho-analytical methodology of estimation of energy stealth of low-frequency satellite communications systems at a four-antennas signal receiving in depending on the value of operating frequency is possible on the basis of application of numerical methods for solving nonlinear equations.

The practical significance of obtained results is that they allow to increase the accuracy of determining the energy stealth coefficient of low-frequency satellite communications systems, and reduce the time spent through the use of modern computer technology to solve specified problem.