

Е. Ю. Соха [E. Yu. Sokha]  
 А. Б. Чернышев [A. B. Chernyshev]  
 М. Ю. Напалкин [M. Yu. Napalkin]

УДК 681.56.3,575.3

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ФУНКЦИИ НАПОРА  
 В ВОДОНОСНОМ ГОРИЗОНТЕ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ  
 КОЭФФИЦИЕНТЕ ФИЛЬТРАЦИИ**

**THE MODELLING OF THE DISTRIBUTED FUNCTION  
 OF THE PRESSURE IN THE WATER-BEARING HORIZON  
 AT NONLINEAR COEFFICIENT OF THE FILTRATION**

*Рассматривается моделирование распределенной функции напора на примере прямоугольного пласта водоносного горизонта при нелинейном коэффициенте фильтрации.*

*The article is considered to modeling of the distributed function of a pressure on the example of rectangular layer of the water-bearing horizon at nonlinear coefficient of a filtration.*

**Ключевые слова:** распределенная системы управления, функция напора, нелинейная системы управления, коэффициент фильтрации.

**Key words:** distributed control systems, function of a pressure, nonlinear control systems, filtration coefficient.

В настоящее время изучение систем автоматического управления является одной из приоритетных научных задач. Автоматизированные системы применяются в большинстве промышленных отраслей и различных сферах повседневной жизни. Законы и принципы теории автоматического управления находят применение в регулировании различных физических и социальных процессов. Существует разделение систем управления на сосредоточенные, в которых состояние системы изменяется только по времени и распределенные – в которых состояние системы изменяется не только по времени, но и по пространственным координатам. Наличие пространственной составляющей в распределенных системах значительно усложняет математический аппарат описания данного класса систем. Моделирование нелинейных сосредоточенных систем широко применяется и подробно описано в отличие от распределенных систем управления, имеющих нелинейное звено. Считается, что для распределенных систем управления нелинейной составляющей можно пренебречь и взять значение нелинейного звена, как постоянную величину. Предположим, что один из коэффициентов переходной функции распределенной системы управления изменяется по времени и является нелинейным звеном, следовательно, распределенная система управления становится нелинейной.

Для примера рассмотрим систему управления напором в гидролитосферном процессе. Изучение процессов, протекающих в гидролитосфере, на данный момент является актуальной задачей. За счет интенсивного развития промышленности, увеличения сброса сточных вод в поверхностные водоемы, значительно увеличившейся водоотбор подземных вод питьевого качества, законтурное заводнение нефтяных месторождений – крайне осложнилась обстановка в гидролитосфере. Подобного рода вмешательства ведут к развитию нестационарных процессов, которые приводят к истощению и ухудшению подземных водных ресурсов [1, 2]. Методы решения практических задач постоянно усложняются за счет возрастающей на гидролитосферу нагрузки и увеличения масштабов процессов. На сегодняшний день возможны изменения глобального круговорота вод, последствия которого не предсказуемы. В связи с этим внимание к проблемам гидролитосферных процессов с каждым днем возрастает [3, 4]. Управление и диагностика экологической безопасности использования, рационального использования природных ресурсов, прогнозирование развития техногенных процессов в гидролитосфере является одной из актуальных задач на сегодняшний день. В связи с этим гидролитосферные процессы должны рассматриваться как объекты управления. Гидролитосферу можно представить, как объект управления с векторными входными воздействиями и рассматривать протекающие процессы с помощью методов, разработанных для систем с распределенными параметрами [5,6]. Рассмотрим математическую модель водоотбора из водоносного пласта. Моделируемый объект в общем случае представляет собой один прямоугольный пласт, представленный на рис. 1, не являющийся коллектором, то есть горизонтальная скорость течения воды не учитывается, с определенной проницаемостью размерами  $L_x=1000$ ,  $L_y=1000$ ,  $L_z=500$ .

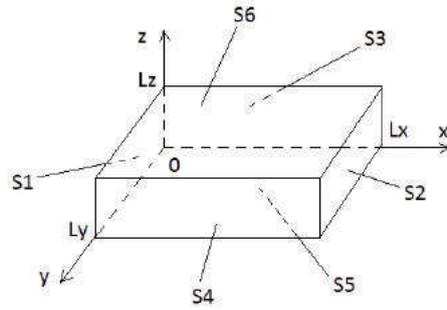


Рис. 1. Схема моделируемого объекта

Объект управления описывается дифференциальным уравнением в частных производных. Математическая модель рассматриваемого объекта управления записывается в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 1/\eta \cdot \left( \frac{\partial(k_x \partial H)}{\partial x^2} + \frac{\partial(k_y \partial H)}{\partial y^2} + \frac{\partial(k_z \partial H)}{\partial z^2} \right); \quad (1)$$

где:  $\eta$  – упругость пласта;

$k_x, k_y, k_z$  – коэффициенты фильтрации по соответствующим координатам, (i=1,2,3);

$H_i$  – функция напора (i=1,2,3);

Условия на границах водоносных и слабопроницаемых пропластков выражает закон неразрывности движения (закон Дарси), и записывается в виде:

$$S1: k_x \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial x} = 0, \quad x = 0, 0 \leq y \leq Ly, 0 \leq z \leq Lz, t \geq 0. \quad (2)$$

$$S2: k_x \frac{\partial H(L_x, y, z, t)}{\partial x} = k_{x-1} \frac{\partial H(L_{x-1}, y, z, t)}{\partial x}, \quad x = 0, 0 \leq y \leq Ly, 0 \leq z \leq Lz, t \geq 0. \quad (3)$$

$$S3: k_y \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial y} = k_y \frac{\partial H(x, L_y, z, t)}{\partial y}, \quad x = 0, 0 \leq y \leq Ly, 0 \leq z \leq Lz, t \geq 0. \quad (4)$$

$$S4: k_y \frac{\partial H(x, L_i, z, t)}{\partial y} = k_y \frac{\partial H_{i-1}(x, L_{i-1}, z, t)}{\partial y}, \quad x = 0, 0 \leq y \leq Ly, 0 \leq z \leq Lz, t \geq 0. \quad (5)$$

$$S5: k_z \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial z} = k_{z,i+1} \frac{\partial H_z(x, y, Z_i, t)}{\partial z}, \quad x = 0, 0 \leq y \leq Ly, 0 \leq z \leq Lz, t \geq 0. \quad (6)$$

$$S6: k_z \frac{\partial H(x, y, Z_i, t)}{\partial z} = k_z \frac{\partial H(x, y, Z_{i-1}, t)}{\partial z}, \quad x = 0, 0 \leq y \leq Ly, 0 \leq z \leq Lz, t \geq 0. \quad (7)$$

Решим уравнение методом конечных разностей. Для этого произведем замену переменных  $x, y, z, t$  их целочисленными аналогами  $i, j, k, \gamma$  соответственно. Тогда модель объекта управления в дискретном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)}{\partial t} = \Delta t \cdot \left( \frac{1}{\eta} \cdot k \frac{H(\alpha-1, \beta, \gamma, \lambda) - 2 \cdot H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) + H(\alpha+1, \beta, \gamma, \lambda)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + k \cdot \frac{H(\alpha, \beta-1, \gamma, \lambda) - 2 \cdot H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) + H(\alpha, \beta+1, \gamma, \lambda)}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + k \cdot \frac{H(\alpha, \beta, \gamma-1, \lambda) - 2 \cdot H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) + H(\alpha, \beta, \gamma+1, \lambda)}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

С помощью компьютерного моделирования получим график переходного процесса функции напора, представленный на рис. 2.

Получили график переходного процесса распределенного линейного процесса при значении коэффициента фильтрации  $K=0.2$ . Где значения по оси  $y$  – значения функции напора,  $x$  – время. Предположим, что коэффициент фильтрации может быть меньше или больше  $K=0.2$ , тогда при компьютерном моделировании получим различные значения функции напора. Уменьшим коэффициент упругости пласта и построим график переходного процесса при различных значениях коэффициента  $K$ .

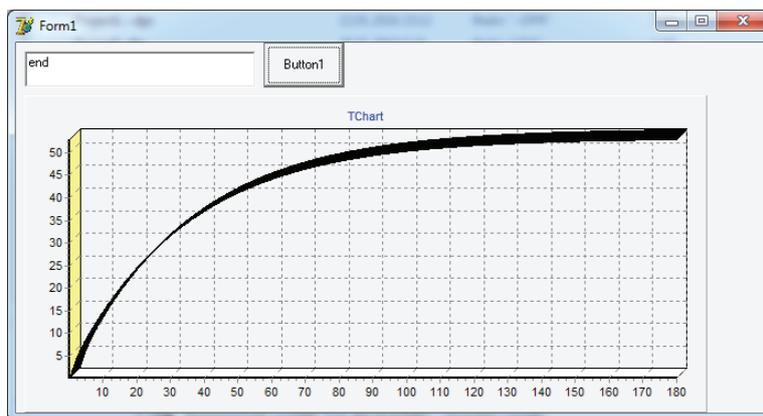


Рис. 2. График переходного процесса функции напора при значении коэффициента фильтрации  $K=0.2$

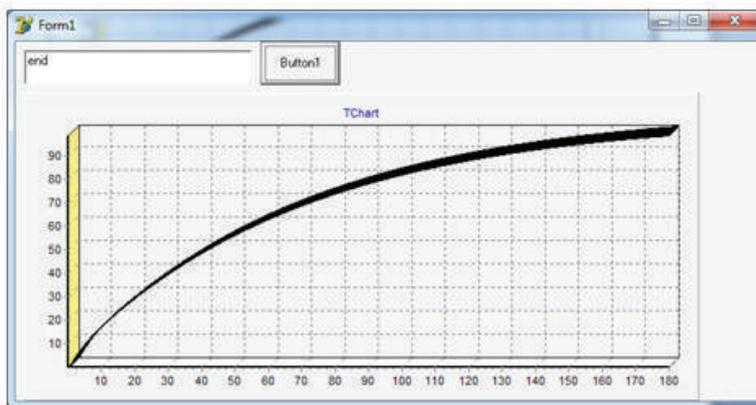


Рис. 3. График переходного процесса функции напора при значении коэффициента фильтрации  $K=0.1$

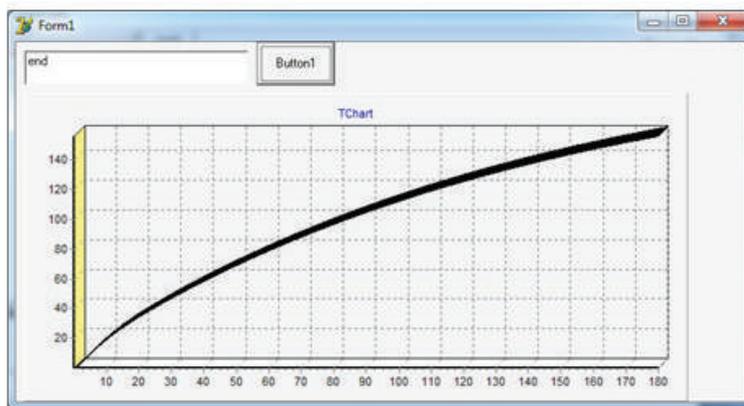


Рис. 4. График переходного процесса функции напора при значении коэффициента фильтрации  $K=0.05$

Попробуем увеличить значение коэффициента фильтрации пласта, построим переходные характеристики.

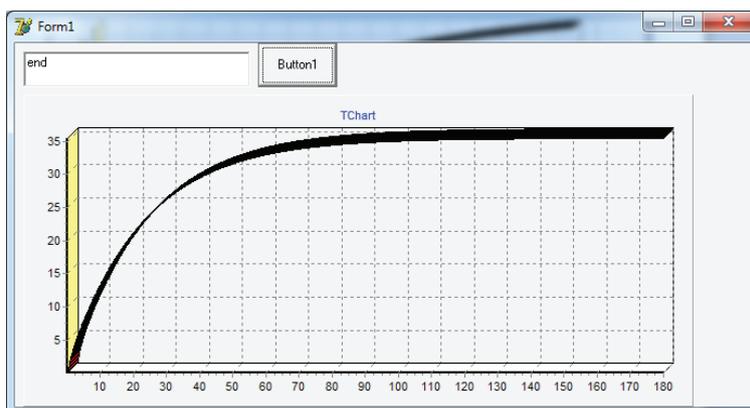


Рис. 5. График переходного процесса функции напора при значении коэффициента фильтрации  $K=0.3$

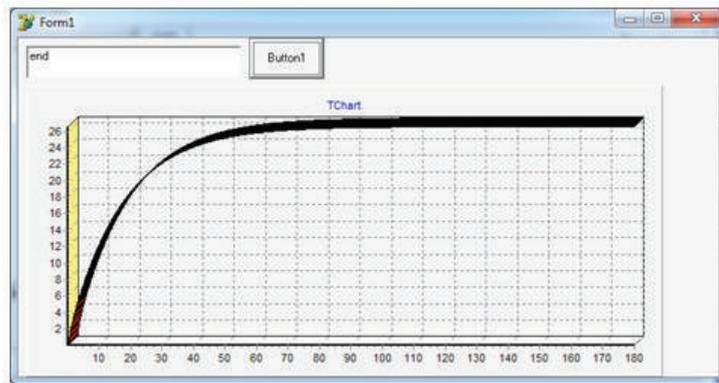


Рис. 6. График переходного процесса функции напора при значении коэффициента фильтрации  $K=0.4$

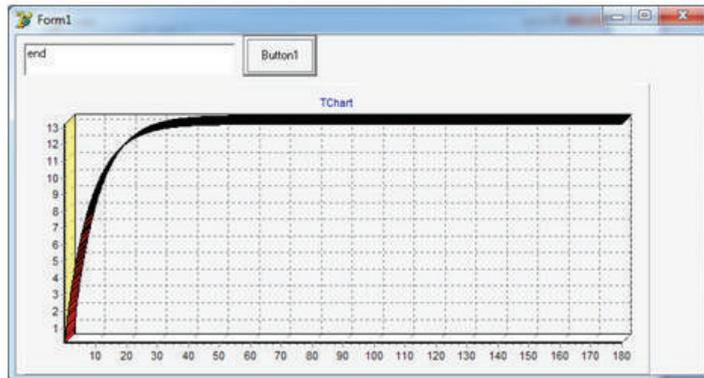


Рис. 7. График переходного процесса функции напора при значении коэффициента фильтрации  $K=0.8$

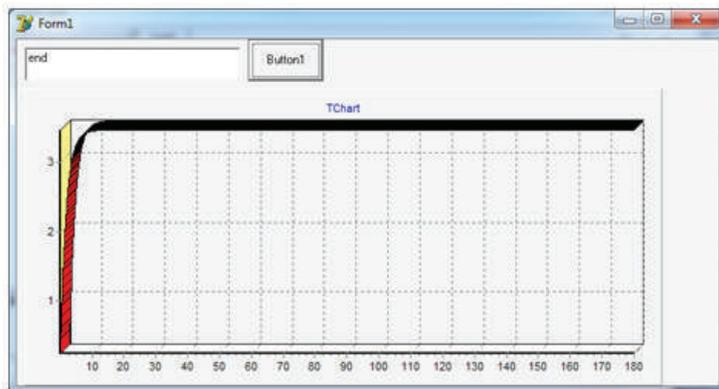


Рис. 8. График переход  $\eta$

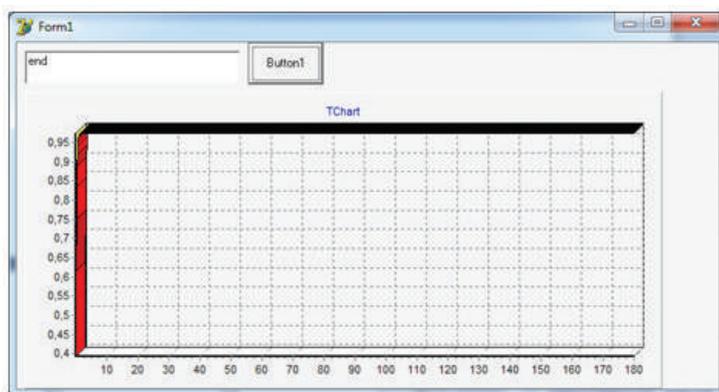


Рис. 9. График переходного процесса функции напора при значении коэффициента фильтрации  $K=10$

Как видим, при уменьшении коэффициента фильтрации пласта значение функции напора увеличивается и время для установления процесса увеличивается, а при увеличении коэффициента фильтрации пласта – функция напора и время для установления процесса уменьшаются. Предположим, что функция напора яв-

ляется нелинейной, т.е. в состав дифференциального уравнения входит нелинейное звено [7, 8]. Пусть коэффициент фильтрации по координатам представляет собой не константу, а функцию вида:

$$K = A + B \cdot \sin(C \cdot t), \quad (18)$$

где  $t$  – время, изменяется от 0 до 180 единиц;  $A=0.3$ ;  $B=0.25$  – амплитуда;  $C=0.1$  – частота.

Функция напора при нелинейном коэффициенте фильтрации по координатам будет иметь вид:

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = 1/\eta_1 * \left( \frac{\partial((A + B \cdot \sin(C \cdot t)) \cdot \partial H_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial(A + B \cdot \sin(C \cdot t)) \cdot \partial H_1}{\partial y^2} + \frac{\partial(A + B \cdot \sin(C \cdot t)) \cdot \partial H_1}{\partial z^2} \right), \quad (19)$$

Начальные и граничные условия остаются неизменными. С помощью компьютерного моделирования получим график переходного процесса функции напора:

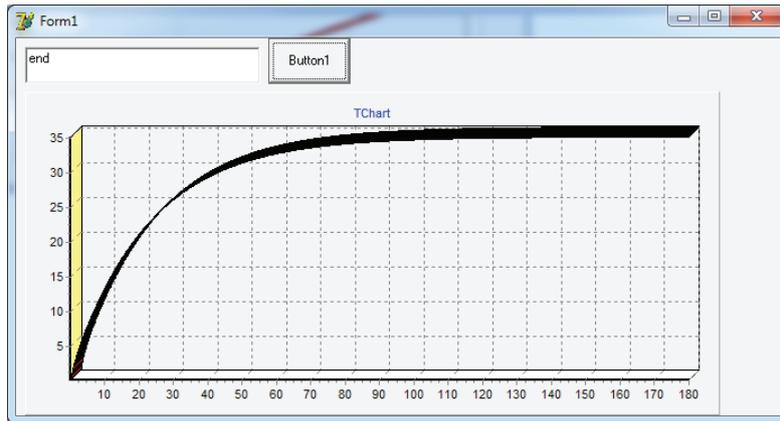


Рис. 10. График переходного процесса функции напора при нелинейном коэффициенте фильтрации вида  $K=A+B \cdot \sin(C \cdot t)$

Из полученных графиков можем сделать вывод, что изменение коэффициента фильтрации и введение нелинейного звена приводит к значительному изменению графика переходного процесса функции напора.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Малков А. В., Першин И. М. Синтез распределенных регуляторов для систем управления гидrolитосферными процессами. М.: Научный мир, 2007. 256 с.
2. Малков А. В., Першин И. М. Системы с распределенными параметрами. Анализ и синтез. М.: Научный мир, 2012. 476 с.
3. Першин И. М. Синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: Изд. РИА-КМВ, 2002. 212 с.
4. Чернышев А. Б., Могилевская Е. В., Гайворонская Н. А. Анализ распределенных объектов, заданных в структурном представлении. // Научное обозрение. 2014. № 5. С. 180-184.
5. Чернышев А. Б., Кравцова А. Л., Соха Е. Ю. Анализ устойчивости процесса стабилизации температурного поля нелинейной распределенной системы // Автоматизация. Современные технологии. 2014. № 9. С. 16-21.
6. Соха Е. Ю. Моделирование гидrolитосферных процессов водоносного пласта. Сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции: «Наука как движущая антикризисная сила: инновационные преобразования, приоритетные направления и тенденции развития фундаментальных и прикладных научных исследований», 15-16 января 2016 года, г. Санкт-Петербург. СПб.: Изд-во «КультИнформПресс», 2016. С. 105-109.
7. Chernyshev A. B., Martirosyan K. V., Martirosyan A. V. Analysis of the nonlinear distributed control system's sustainability // Journal of Mathematics and Statistics. 2014. T.10. № 3. С. 316-321.
8. Chernyshev A. B. Challenges of implementing distributed systems with discrete control actions // Eastern European Scientific Journal. 2013. № 2. С. 183-188.

#### REFERENCES

1. Malkov A. V., Pershin I. M. Sintez raspredelennykh regulyatorov dlya sistem upravleniya gidrolitosfernymi protsessami. M.: Nauchnyy mir, 2007. 256 s.
2. Malkov A. V., Pershin I. M. Sistemy s raspredelennymi parametrami. Analiz i sintez. M.: Nauchnyy mir, 2012. 476 s.
3. Pershin I. M. Sintez sistem s raspredelennymi parametrami. Pyatigorsk: Izd. RIA-KMV, 2002. 212 s.
4. Chernyshev A. B., Mogilevskaya E. V., Gayvoronskaya N. A. Analiz raspredelennykh ob'ektov, zadannykh v strukturnom predstavlenii. // Nauchnoe obozrenie. 2014. № 5. S. 180-184.
5. Chernyshev A. B., Kravtsova A. L., Sokha E. Yu. Analiz ustoychivosti protsessa stabilizatsii temperaturnogo polya nelineynoy raspredelennoy sistemy // Avtomatizatsiya. Sovremennye tekhnologii. 2014. № 9. S. 16-21.
6. Sokha E. Yu. Modelirovanie gidrolitosfernykh protsessov vodonosnogo plasta. Sbornik nauchnykh statey po itogam mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii: «Nauka kak dvizhushchaya antikrizisnaya sila: innovatsionnye preobrazovaniya, prioritetnye napravleniya i tendentsii razvitiya fundamental'nykh i prikladnykh nauchnykh issledovaniy», 15-16 yanvarya 2016 goda, g. Sankt-Peterburg. SPb.: Izd-vo «Kul'tInformPress», 2016. S. 105-109.

7. Chernyshev A. B., Martirosyan K. V., Martirosyan A.V. Analysis of the nonlinear distributed control system's sustainability // Journal of Mathematics and Statistics. 2014. T.10. № 3. S. 316-321.

8. Chernyshev A. B. Challenges of implementing distributed systems with discrete control actions. // Eastern European Scientific Journal. 2013. № 2. S. 183-188.

#### ОБ АВТОРАХ

**Соха Екатерина Юрьевна**, аспирант, Институт информационных технологий и телекоммуникаций СКФУ, +79197535095, Email: KaterinaSokha@gmail.com

**Sokha Ekaterina Yurevna**, postgraduate student, Institute of information technologies and telecommunications of NCFU, +79197535095, Email: KaterinaSokha@gmail.com

**Чернышев Александр Борисович**, профессор, кафедры информационной безопасности, систем и технологий, +79283612836, Email: chalbor@rambler.ru

**Chernyshev Aleksandr Borisovich**, Professor, Department of Information Security, Systems and Technologies, +79283612836, Email: chalbor@rambler.ru

**Напалкин Максим Юрьевич**, главный специалист по информационно-аналитической работе, отдел планирования и организации НИР, +79187572607, E-mail: maksnapalkin@mail.ru

**Napalkin Maksim Yurevich**, chief specialist on information-analytical work, +79187572607, E-mail: maksnapalkin@mail.ru

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ФУНКЦИИ НАПОРА В ВОДОНОСНОМ ГОРИЗОНТЕ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ФИЛЬТРАЦИИ

**Е. Ю. Соха, А. Б. Чернышев, М. Ю. Напалкин**

В данной статье приведены краткие теоретические сведения о системах автоматического управления, гидролитосферных процессах, как объектах управления. Рассмотрен пример моделирования распределенной разомкнутой системы управления водоносным горизонтом. Приведена математическая и дискретная модель объекта управления. Предоставлены результаты компьютерного моделирования в виде графиков переходного процесса при различных значениях коэффициента фильтрации. Составлена передаточная функция объекта управления при нелинейном коэффициенте фильтрации, приведен результат компьютерного моделирования в виде графика переходного процесса получившейся нелинейной распределенной системы управления.

#### MODELLING OF THE DISTRIBUTED FUNCTION OF THE PRESSURE IN THE WATER-BEARING HORIZON AT NONLINEAR COEFFICIENT OF THE FILTRATION

**E. Y. Sokha, A. B. Chernyshev, M. Y. Napalkin**

Short theoretical data on systems of automatic control, hydrolithospheric processes as objects of management are provided in this article. An example of modeling of the distributed opened control system of the water-bearing horizon is reviewed. The mathematical and discrete model of an object of management is given. Results of computer modeling in the form of schedules of transition process at various values of coefficient of a filtration are reported. Transfer function of an object of management at nonlinear coefficient of a filtration is made, the result of computer modeling in the form of the schedule of transition process of the turned-out nonlinear distributed control system is given.