А. Б. Чебоксаров [A. B. Cheboksarov]
В. А. Чебоксаров[V. A. Cheboksarov]
Н. П. Хариш, [N. P. Kharish]

УДК 519.711.3

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ МЕТОДОМ ЭТАЛОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER REFERENCE METHOD SIMULATION

В работе рассматривается решение одномерных нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков методом эталонного моделирования с помощью метода эталонного моделирования, предложен критерий существования модельных решений, разработан алгоритм исследования асимптотики решений, рассмотрены важные с физической точки зрения положительные продолжаемые решения, а также условия, при которых модельные решения данного уравнения существуют.

The paper deals with the solution of one-dimensional nonlinear differential equations of higher orders by the reference modeling using the method of the reference simulation, the criterion of the existence of model solutions developed by the asymptotic behavior of the study algorithm solutions are considered important from a physical point of view, positive continue to address, as well as the conditions under which the model solution to this equations exist.

Ключевые слова: теория нелинейных процессов, нелинейные дифференциальные уравнения, метод эталонного моделирования, фазовая функция, уравнение нулевого приближения метода эталонного моделирования, критерий существования модельных решений.

Key words: theory of the nonlinear processes, nonlinear differential equations, method of master modeling, phase function, equation of the zero approach the method of master modeling, ideal solutions existence criterion.

Практически любая задача по моделированию природных и технологических процессов приводит к созданию, решению и исследованию дифференциальных уравнений. В ряде предыдущих работ [4, 5, 6] нами был рассмотрен метод эталонного моделирования, предназначенный для решения дифференциальных уравнений в частных производных, разработан алгоритм его использования, определены условия применимости. Основываясь на этом методе, мы приведём математические обоснования для создания методики решения нелинейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядка. Введем сначала некоторые необходимые понятия.

Понятие 1. Функцию $U_1(x) = T(x)U[S(x)]$, где $U[S(x)]$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^{\ell}U}{dS^{\ell}} - U^n U^m = 0 \tag{1}$$

назовём dS^{ℓ} приближенным решением (см. [1]), а функцию

$$u_2(x,x_0) = \left[S'(x,x_0)\right]^{-\frac{\ell-1}{2}} \cdot U\left[S(x,x_0)\right], \tag{2}$$

где $S(x,x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{2}{g^{2(\ell-m)+(\ell-1)(n-1+m)}(t)}dt$, $2(\ell-m)+(\ell-1)(n-\ell+m) \neq 0,$

назовём приближенным решением дифференциального уравнения

$$u^{(\ell)} + p(x)u - g(x)u^n u'^m = 0. \tag{3}$$

Если m=0, то решение $u_2(x,x0)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению второго порядка

$$u'' + \frac{1}{2}\left\{S,x\right\}u - q(x)u^n = 0, \tag{4}$$

где
$$\{S,x\}=\frac{S'''}{S'}-\frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 \qquad (5)$$

Заметим, что функция $u_2(x,x0)$, если выполняется условие (5), будет решением нелинейных дифференциальных уравнений второго, третьего и четвёртого порядков, то есть тех, у которых $\ell = 2,3,4$.

Чтобы найти приближенные решения дифференциального уравнения типа (3) методом эталонного моделирования, воспользуемся методикой, разработанной нами в работах [7, 8, 9]: представить $u(x) = T(x)$ $U[S(x)]$ и подставить это выражение в уравнение (3):
$$(T')^{\ell}U^{\ell}+...+g(x)T^mU^nU'^m=0,$$
выбрать $T(x)$ из следующего условия
$(T')^{\ell}=g(x)T'^m$, значит $T(x,x_0)=c+\int\limits_{x_0}^{x} g^{\frac{1}{\ell-m}}(t)dt$

Следует иметь в виду, что функция $U[S(x)]$ должна удовлетворять уравнению (1).

Используя теорему Харди [10], можно также прийти к данному выводу.

Рассмотрим теперь способ нахождения приближенных решений частного случая уравнения (3):
$$u''+p(x)u-g(x)u^nu'^m=0, \qquad (6)$$
Для этого сначала введём некоторые понятия, с помощью которых мы сможем оценить свойства приближенных решений одномерных нелинейных дифференциальных уравнений, полученных методом эталонного моделирования.

Понятие 2. Решение уравнения (6) будем называть продолжаемым, когда оно определено на бесконечном промежутке (x_0, ∞), и непродолжаемым, когда оно определено на конечном промежутке (x_0, x_1) и его нельзя продолжить за точку x_1.

Понятие 3. Решение уравнения (6) будем называть неколеблющимся, когда в данной области оно будет иметь не больше одного «*0*», и колеблющимся, когда оно обращается в, по крайней мере, в двух точках рассматриваемой области.

Понятие 4. Решение уравнения (6) будем называть особым, если оно не равно «0» на конечном интервале (x_0, x_1) и тождественно равно «*0*» при $x \geq x_1$.

Покажем теперь, что построенные для (3) решения $u_1(x)$ и $u_2(x,x_0)$ будут качественно сходны с решениями уравнения модельного уравнения (6): продолжаемыми, непродолжаемыми и особыми. Важную роль при исследовании характера поведения решений уравнения (3) для исследуемой системы играет следующее преобразование, подобное (9), которое для данного, более общего случая будет иметь такой вид
$$u(x,\tau)=f(x)\omega(\tau)\cdot U[S(x)], \qquad (7)$$
Здесь $f(x)$, $\tau(\partial)$, $U[S(x)]$ должны быть известны, а при $x \to x_0$, $x_0 \to +\infty$, $x_0 < +\infty$, что позволяет, в частности, исследовать решения уравнения (3) при $\tau \to +\infty$. Тогда полученное для $\omega(\tau)$, после подбора по принципу качественного сходства (подробнее см. [4]) для функций $f(x)$, $U[S(x)]$, $\tau(\partial)$ становится при $\tau \to +\infty$ автономным.

Подставляя (7) в (6) и полагая, что m=0, получим для $\omega(\tau)$:
$$\frac{d^2\omega}{d\tau^2}+b_1(\tau)\frac{d\omega}{d\tau}+b_2(\tau)\omega-b_3(\tau)\omega^n=0. \qquad (8)$$
Анализируя (8), мы сможем формулировать и обосновать, такие утверждения (используем результаты, приведённые в [10]):

Утверждение 1. Пусть функция $b_1(\tau)$ является непрерывной, а $b_2(\tau)$ и $b_3(\tau)$ – интегрирутся на любом конечном отрезке полуоси $\tau \geq 0$, при условии, что $\tau \to +\infty$

$b_1(\tau) \sim b_1\tau^{\sigma}$, $b'(\tau)=b_1\sigma\tau^{\sigma-1}$,

$b_i(\tau) \sim b_i (i = 2,3)$, где $0\leq\sigma\leq 1, b_u \succ 0$

а у выражения
$$\frac{d^2u}{d\tau^2}+b_1(\tau)\frac{du}{d\tau}+b_2(\tau)u=0\ , \qquad (9)$$
не существует колеблющегося решения, тогда для любого нетривиального неколеблющегося продолжаемого решения уравнения (8) когда $\tau \to +\infty$, либо $\omega(\tau) \sim (b_2/b_3)^{1/(n-1)}$, либо $\omega(\tau) \sim u(\tau) \sim 0$, где $u(\tau)$ – нетривиальное решение для уравнения (9).

Утверждение 2. Если коэффициенты $b_k(\tau)$ (τ=1, 2, 3) уравнения (8) интегрируются в каждом конечном отрезке интервала $(0, +\infty)$, причём $b_3(\tau)\geq b_3>0,\ b_2(\tau)/b_3(\tau)\ \sim b>0$, то любое неколеблющееся решение этого уравнения при $\tau \to +\infty$ будет к стремится $b^{1/(n-1)}$.

Из Утверждения 2 следует: если в уравнении (6) $p(x)/g(x) \to c > 0$ при x → +∞, то решения этого уравнения в случае, когда m=0, будет в асимптотике иметь следующий вид в асимптототическом приближении:

$$\sim c^{1/(n-1)} \tag{10}$$

А так как, продолжаемые и непродолжаемые решения в асимптотике имеют вид

$$\left[S'(x,x_0)\right]^{-1/2} \cdot \left[a \pm \frac{n-1}{\sqrt{2(n+1)}} S(x,x_0)\right]^{-\frac{2}{n-1}},$$

где $S(x,x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} g^{\frac{2}{n+1}}(t)dt,$

То, когда a = 1; n → 1, мы получим следующий предел:

$$\lim_{n\to 1}\left[S'(x,x_0)\right]^{-1/2}\left[1 \pm \frac{n-1}{\sqrt{2(n+1)}} S(x,x_0)\right]^{-\frac{2}{n-1}} = g^{-1/4}(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} g^{1/2}(t)dt\right). \tag{11}$$

Зависимость (11) есть линейное решение уравнения (6) в асимптотике, полученное с помощью метода эталонного моделирования. Так как вид функций p(x), g(x) в уравнении (6) конкретно не определен, только налагались некоторые условия, то мы сможем утверждать, что решение (11), которое используется в (7), становится уже не приближенным частным решением для случая, когда m = 0, а решением, отхватывающим его общие свойства. Значит, для достаточно широкого класса функций g(x) при x → x_1 (x_1 ≤ +∞), решение изначального уравнения будет стремится к выражению u(x,τ) в виде (7) с пределом для $S'(x,x_0)$ в виде (11).

Допустим, что в уравнении (6) p(x) = 0, тогда придём к уравнению

$$u'' - \beta g(x)u^n u'^m = 0,\; x \in [a,h, h \le +\infty, \tag{12}$$

где $m,n \in R, m \ne 2, n \ne -1, m-n \ne 3, m+n \ne 1, \beta = \times 1, 0 < g(x) \in c^2(a,b)$

Для нахождения асимптотики решений (12), рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} q'_1 = f_1(\tau) + c_{11}(\tau)q_1 + c_{12}(\tau)q_2 + g_1(\tau)Q_1(\tau,q_1,q_2), \\ q'_2 = f_2(\tau) + c_{21}(\tau)q_1 + c_{22}(\tau)q_2 + g_2(\tau)Q_2(\tau,q_1,q_2) \end{cases} \tag{13}$$

Это уравнения, в которых функции f_i: $[\tau_0,+\infty) \to R, g_i:[\tau_0,+\infty) \to R(i=1,2)$, а коэффициенты $C_{ij}:[\tau_0,+\infty) \to R(i,j=1,2)$ непрерывны, функции Q_i(i=1,2) непрерывны и удовлетворяют условию:

$$\left|Q_i(\tau,q_1^0,q_2^0) - Q_i(\tau,q_1^1,q_2^1)\right| \le \varepsilon\sum_{\ell=1}^{2}\left|q_\ell^0 - q_\ell^1\right|, \tag{14}$$

где $0 < \varepsilon \in R, \tau \ge \tau_0$ и $(q_1^0,q_2^0),(q_1^1,q_2^1)$ – точки из области задания системы (13) такие, что $Q_i(\tau,0,0) \equiv 0 (i=1,2)$

Используя результаты решения задачи горения нелинейной среды [11], мы придём к следующим выводам:

Вывод 1. Если функции Q_i(i = 1,2) удовлетворяют условию (14) при любом ε>0, а функции f_i, g_i, c_{ij} (i, j = 1,2) удовлетворяют требованиям:

- $\lim\limits_{\tau\to+\infty} f_i(\tau) = 0; \lim\limits_{\tau\to\infty} g_i(\tau) = const(i=1,2)$;
- $\lim\limits_{\tau\to+\infty} c_{ij}(\tau) = c_{ij}^0, \left|c_{ij}^0\right| < +\infty(i,j=1,2)$;
- корни ξ_1, ξ_2 характеристического уравнения $\det\left(c_{ij}^0 - \xi\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^2 = 0$ имеют ненулевые вещественные части,

тогда система (13) обладает, по крайней мере, одним вещественным решением $(q_1(\tau),q_2(\tau))$, стремящемся к нулю при τ → +∞. В случае, когда $re\xi_i < 0$ по крайней мере для одного I, то система (13) будет иметь бесчисленное множество решений, стремящихся к «*0*», когда τ → +∞.

Вывод 2. Считаем, что функции Q_i(i = 1,2) удовлетворяют условию (14) при любом ε>0, а функции f_i, g_i, c_{ij} (i,j = 1,2) ведут себя так:

$$\begin{cases} c_{ii}(\tau) \ne 0, \int\limits_{\tau_0}^{+\infty}\left|c_{ii}(\tau)\right|d\tau = +\infty, \\ \lim\limits_{\tau\to+\infty} f_i(\tau)/c_{ii}(\tau) = 0, \lim\limits_{\tau\to+\infty} g_i(\tau)/c_{ii}(\tau) = const, \\ \lim\limits_{\tau\to+\infty} c_{21}(\tau)/c_{22}(\tau) = b_{10}; \lim\limits_{\tau\to+\infty}\dfrac{c_{12}(\tau)\cdot c_{21}(\tau)}{c_{11}(\tau)\cdot c_{22}(\tau)} = b_{20}, \end{cases} \tag{15}$$

где $|b_{10}| < 1, |b_{20}| < 1$. Тогда система вспомогательных уравнений (13) имеет хотя бы одно вещественное решение $(q_1(\tau),q_2(\tau))$, которое при τ → +∞ стремится к нулю.

Используем вспомогательную функцию

$$S(x_0,x)=\int_{x_0}^{x} g^{2/(3+n-m)}(t)dt \tag{16}$$

Рассмотрим условие, когда $S(x_0,b)<+\infty$. Показатель степени m у первой производной в (12) выберем на основе следующих требований

$$\begin{cases} m=\dfrac{2m_1}{2m_2-1} \; при \; k>1; \; m=\dfrac{2m_1-1}{2m_2+2} \; при \; 0<k<1; \\ m=\dfrac{m_1}{2m_2+1} \; при \; k<0; где \; m_1,m_2 - целые; \; k=\dfrac{m-2}{m+n-1}. \end{cases} \tag{17}$$

Используем следующую вспомогательную функцию

$$B[\tau(x)]=-\frac{d}{dx}\,S\left(\frac{dS}{dx}\right)\cdot|c-\gamma S|, c=const>0, \tag{18}$$

которая удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau\to+\infty} B(\tau)=a_0, |a_0|<+\infty, a_0\neq k, \tag{19}$$

здесь $\gamma_1=\left[(-k)^m k(k-1)\right]^{\frac{1}{m-2}}>0,$

$\tau=-\ln\left[c-\gamma_1 S(x_0,x)\right]$

полагая, что одного из следующих соотношений справедливо

$$\begin{gathered} k-a_0\neq(m-1)(k+a_0-1), \\ k-a_0=(m-1)(k+a_0-1)u(k-a_0)(k+a_0-1)(m+n-1)>0, \end{gathered} \tag{20}$$

можно показать, что существуют приближенные решения уравнения (12), получаемые методом эталонного моделирования, со следующей асимптотикой:

$$u(x)=U_0\left(\frac{dS}{dk}\right)^{-1/2}\left[c-\gamma_1 S(x_0,x)\right]^k(1+O(1)), \tag{21}$$

где $U_0=\gamma_1^{-k}\left[(1-k-a_0)(a_0-k)^{1-m}\right]^{\frac{1}{m+n-1}}$.

При этом необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\beta(a_0-k)^{1-m}(1-k-a_0)>0. \tag{22}$$

Докажем вначале необходимость условия (22). Используем для этой цели подстановку

$$\begin{gathered} u(x)=\left(\frac{dS}{dx}\right)^{-1/2}\left[c-\gamma_1 S(x_0,x)\right]^k \upsilon(\tau), \\ \tau(x)=-\ln\left[c-\gamma_1 S(x_0,x)\right]. \end{gathered} \tag{23}$$

и выполним следующее преобразование уравнения (12):

$$\begin{gathered} \upsilon''+(1-2k)\upsilon'+[k(k-1)+B_1(\tau)]\upsilon= \\ =\alpha\gamma_1^{m-2}\upsilon^n[\upsilon'-(k-B(\tau))\upsilon]^m. \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь $B_1(\tau)=B'(\tau)+B(\tau)-B^2(\tau)$, $k\neq 0$, $k\neq\frac{1}{2}$, $k\neq 1$. Сочтем, что $S(x_0,b)=c/\gamma_1$. Так как $\tau'(x)>0$, $\lim_{x\to b}\tau(x)=+\infty$, то исследование решений уравнения (12) это то же самое, что исследование решений $\upsilon(\tau)$ уравнения (24), в случае, когда для каждого из последних на промежутке $[\tau_0, +\infty]$ выполнены условия:

$$\upsilon(\tau)>0, \quad \upsilon'(\tau)-(k-B(\tau))\upsilon(\tau)\neq 0. \tag{25}$$

Учитывая (19), можно показать, что решения уравнения (24) имеют не равный нулю и конечный $\lim_{\tau\to+\infty}\upsilon_0$, только в случае выполнения условия (22). Действительно, если подставить любое из этих решений в (24) и ввести обозначение

$$V(\tau)=\upsilon'(\tau)-(k\,B(\tau))\upsilon(\tau)\,, \tag{26}$$

то получим соотношение

$$V'\equiv\beta\gamma_1^{m-2}\upsilon^n V^m-[1-k-B(\tau)]V. \tag{27}$$

Рассмотрим правую часть этого тождества как функцию

$$F(C_0,\tau)=\beta\gamma_1^{m-2}\upsilon^n(\tau)C_0^m-[1-k-B(\tau)]C_0, \tag{28}$$

где C_0 – вещественное число. Анализируя эту функцию, получим, что она будет знакопостоянной в интервале $[\tau_{C_0},+\infty)$ в случае, если значение C_0 отличается от решения уравнения

$$\beta\gamma_1^{m-2}\upsilon_0^n C_0^m+(k+a_0-1)C_0=0\,. \tag{29}$$

Отсюда следует, что для каждого V = C_0 либо V(τ) > 0, либо V'(τ) < 0 в интервале $[\tau_{C_0},+\infty)$. Поэтому для функции V(τ) существует предел при τ → +∞ на промежутке $[\tau_{C_0},+\infty)$. Тогда $V(\tau)\sim(a_0-k)\upsilon(\tau)\sim\upsilon_0(a_0-k)$ при τ → +∞. Из (26) получим, что производная (27) имеет предел:

$$\lim_{\tau\to+\infty}V'(\tau)=\lim_{\tau\to+\infty}\left\{\rho\gamma_1^{m-2}\upsilon^n V^m(\tau)-[1-k-B(\tau)]V(\tau)\right\}=0$$

То есть

$$\beta\gamma_1^{m-2}\upsilon_0^{m+n}(a_0-k)^m+\upsilon_0(a_0-k)(k+a_0-1)=0, \tag{30}$$

Значит

$$\upsilon_0^{m+n-1}=\beta\gamma_1^{2-ь}(a_0-k)^{1-m}(1-k-a_0). \tag{31}$$

Полагая, что υ_0 > 0, делаем вывод, что условие (22) необходимо для использования подстановки (23). А так как использование (23) и условия, связывающие модельную функцию V(τ) и функцию u(τ) описывающую исследуемую систему, считаем доказанным, то и необходимость выражения (23) для использования метода эталонного моделирования считаем доказанной.

Чтобы доказать достаточность условия (22) используем преобразования

$$\begin{cases}\upsilon(\tau)=\upsilon_0[1+V_1(\tau)];\\ \upsilon'(\tau)+(B(\tau)-k)\upsilon(\tau)=\upsilon_0(a_0-k)[1+V_2(\tau)].\end{cases} \tag{32}$$

Рассмотрим выражение

$$\det(c_{ij}^0-\xi\delta_{ij})_{i,j-1}^2=0, \tag{33}$$

В котором $c_{11}^0=k-a_0$; $c_{12}^0=-c_{11}^0$; $c_{21}^0=-n(k+a_0-1)$; $c_{22}^0=-(m-1)(k+a_0-1)$. Оно соответствует линейной части системы, полученной в результате подстановки (32) в (13). Уравнение (33) имеет следующее решение

$$\xi_{1,2}=0{,}5[k-a_0-(m-1)(k+a_0-1)]\pm$$
$$\pm\{0{,}25[k-a_0-(m-1)(k+a_0-1)]^2+(k-a_0)(k+a_0-1)(m+n-1)\}^{1/2}.$$

Учитывая (20), можно Исследуем возможные значения корней ζ_1 и ζ_2. Учитывая при этом соотношения (20), получим

1. $(k-a_0)(k+a_0-1)(m+n-1)>0$, тогда значения корней действительные и разнозначные. Как следует из (22), система (20) имеет бесчисленное множество вещественных решений, которые стремятся к «*0*», в случае, когда аргумент стремится к → +∞;

2. $(k-a_0)>(m-1)(k+a_0-1)$ и $(k-a_0)(k+a_0-1)(m+n-1)<0$. Тогда ζ_1 и ζ_2 больше «*0*» и, в соответствии с (22), система (20) имеет, по меньшей мере одно вещественное решение, которое стремится к «*0*», если аргумент стремится к → +∞;

3. $(k-a_0)<(m-1)(k+a_0-1)$ и $(k-a_0)(k+a_0-1)(m+n-1)<0$. В этом случае Re$\zeta_1$ и Reζ_2 отрицательны и существуют некоторые постоянные значения аргумента, при которых корни системы уравнений меньше некоторого бесконечно малого ε при аргументе → +∞.

То есть с учётом (32), считаем доказанной достаточность условия (22).

Отметим, что при выполнении (21) получим для производной такое выражение

$$u'(x)=U_0\gamma_1(a_0-k)\left(\frac{dS}{dx}\right)^{1/2}(c-\gamma_1 S)^{k-1}(1+0(1)). \tag{34}$$

Вывод 3. Если условия (18), (19) и (20) выполняются и вместе с (22) имеет место условие

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^2(a_0-B(\tau)=0, \tag{35}$$

то уравнение (12), которое описывает поведение исследуемой системы, имеет решения, совпадающие в асимптотике с (21) и (22). Эти решения могут быть получены с помощью метода эталонного моделирования.

Действительно, из выражений (20) вытекает, что корни ζ_1 и ζ_2 уравнения $\det(c_{ij}^0-\xi\delta_{ij})_{i,j=1}^2=0$ будут чисто мнимыми, то есть Reζ_1 = Reζ_2 = 0. Используя следующую подстановку:

$$\begin{pmatrix}q_1(\tau)\\ q_2(\tau)\end{pmatrix}=\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix}\sin\lambda\tau & \cos\lambda\tau\\ \sin\lambda\tau-\frac{1}{c_{11}^0}\cos\lambda\tau & \cos\lambda\tau+\frac{\lambda}{c_{11}^0}\sin\lambda\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1(\tau)\\ \omega_2(\tau)\end{pmatrix} \tag{36}$$

где $\lambda=\sqrt{(k-a_0)(k+a_0-1)(m+n-1)},$ приведём систему уравнений для q_1, q_2 к следующему виду:

$$\omega'_1=\tilde f_1(\tau)+\tilde c_{11}(\tau)\omega_1+\tilde c_{12}(\tau)\omega_2-c_{11}^0(1-k-a_0)\frac{\cos\lambda\tau}{\lambda\tau}\Phi(\tau,\omega_1,\omega_2),$$
$$\omega'_2=\tilde f_2(\tau)+\tilde c_{21}(\tau)\omega_1+c_{22}(\tau)\omega_2+c_{11}^0(1-k-a_0)\frac{\sin\lambda\tau}{\lambda\tau}\Phi(\tau,\omega_1,\omega_2). \tag{37}$$

Здесь используем обозначения:

$\tilde{f}_1(\tau)=\tau(a_0-B(\tau))(\sin\lambda\tau+2c_{11}^0\lambda^{-1}\cos\lambda\tau);$

$\tilde{c}_{11}(\tau)=\frac{1}{\tau}+\mu(\tau);$

$\mu(\tau)=c_{11}^0\lambda^{-1}(a_0-B(\tau))(\sin 2\lambda\tau-\lambda(c_{11}^0)^{-1}\cos 2\lambda\tau;$

$\tilde{c}_{12}(\tau)=(a_0-B(\tau))(\sin 2\lambda\tau+2c_{11}^0\lambda^{-1}\cos^2\lambda\tau);$

$\tilde{f}_2(\tau)=\tau(a_0-B(\tau))(\cos\lambda\tau-2c_{11}^0\lambda^{-1}\sin\lambda\tau);$

$\tilde{c}_{21}(\tau)=(a_0-B(\tau)(\sin 2\lambda\tau-2c_{11}^0\lambda^{-1}\sin^2\lambda\tau);$

$c_{22}(\tau)=\frac{1}{\tau}-\mu(\tau);$

$$\Phi(\tau,\omega_1,\omega_2)=\tau^2\left\{\left[1+\frac{\sin\lambda\tau}{\tau}\omega_1+\frac{\cos\lambda\tau}{\tau}\omega_2\right]^n\right.$$

$$\left[1+\frac{1}{\tau}(\sin\lambda\tau-\frac{\lambda}{c_{11}^0}\cos\lambda\tau)\omega_1+\frac{1}{\tau}(\cos\lambda\tau+\frac{\lambda}{c_{11}^0}\sin\lambda\tau)\omega_2\right]^m-$$

$$\left.-\left[1+\frac{1}{\tau}\left((m+n)\sin\lambda\tau-\frac{\lambda m}{c_{11}^0}\cos\lambda\tau\right)\omega_1+\frac{1}{\tau}\left((m+n)\cos\lambda\tau+\frac{\lambda m}{c_{11}^0}\sin\lambda\tau\right)\omega_2\right]\right\}$$

При выполнении условия (35) для системы (37) выполняются условия (19) и (20) в интервале $D=\left\{(\tau,\omega_1,\omega_2):|\omega_1|\le\frac{1}{2},|\omega_2|\le\frac{1}{2},\tau\ge 1\right\}$, поэтому с учётом вышеприведённых преобразований, связывающие функции модели q_1, q_2 а так же вспомогательные функции ω_1, ω_2, u с исходной функцией u(x) в уравнении (12), можно утверждать, что и в этом случае существуют приближённые решения для моделирующей функции, совпадающие в асимптотике с (21) и (34), которые можно найти с помощью метода эталонного моделирования.

Вывод 4. Любое решение уравнения (12) для моделиующей функции вида (21) при a → h в пределе ведет себя как

$$u(x)=v_0\left(\frac{dS}{dx}\right)^{-1/2}\left[c-\gamma_1 s(x_0,x)\right]^k\cdot\left[(m+n-1)(k+a_0-1)\frac{J(\nu,\tau)}{J'(\nu,\tau)}\right]^{\frac{1}{1-m-n}}(1+0(1)),\qquad(38)$$

где $J(\nu,\tau)=\int\limits_{\nu}^{\tau}\exp\left[(1-m-n)\int\limits_{\tau_0}^{t}(1-k-B(s)ds\right]dt,$

$\nu=\begin{cases}\tau_0, J(\tau_0,+\infty)=+\infty,\\ +\infty, J(\tau_0,+\infty)<+\infty.\end{cases}$

Докажем это. Из соотношений

$q(\tau)=\nu'(\tau)-(k-B(\tau))\nu(\tau)$ и

$q(\tau)\sim(a_0-k)\nu(\tau)\sim\nu_0(a_0-k)$

при τ → +∞, получим

$$\nu(\tau)=\frac{q(\tau)}{a_0-k}(1+0(1)).\qquad(39)$$

Подставляя (39) в правую часть выражения

$$q'(\tau)=\beta\gamma_1^{m-2}\nu^n(\tau)q^m-\left[1-k-B(\tau)\right]q,\qquad(40)$$

получим

$$q'(\tau)+(1-k-B(\tau))q(\tau)=\beta\gamma_1^{m-2}(a_0-k)^{-(n+2)}q^{m+n}(1+0(1)).\qquad(41)$$

Интегрируя это уравнение, учитывая (39), получим выражение, совпадающее с (38) для нахождения искомой функции u(x) из уравнения (12).

Вывод 5. Исследуем возможности существования решений уравнения (12), их аналитику и асимптотику в случае, когда фазовая функция $S(x_0,x)\Big|\xrightarrow[x\to h]{}+\infty, m=p/\ell$, где p – четное, ℓ – нечетное, k < 0, или k – любое или k > 1. Если выполняются условия

$$G(t)\ne -k,\ \lim_{t\to+\infty}G(t)=h_0,|h_0|<+\infty,h_0\ne k=0,\qquad(42)$$

где $G(t)=G(t(x))=-\frac{1}{2\gamma^2}\left(\frac{dS}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2S}{dx^2}\left[c_1+\gamma_2 S(x_0,x)\right],$

$c_1=const>0;\gamma_2=\left[k^{1-m}(k-1)\right]^{\frac{1}{m-2}},$

$t(x)=\ln(c_1+\gamma_2 S(x_0,x))$

и одно из условий $(k+h_0) \neq (m-1)(k-h_0-1); k+h_0 = (m-1)(k+h_0-1);$

$$(k+h_0)(k-h_0-1)(m+n-1) > 0,$$

то для существования модельных решений уравнения (12) вида

$$u(x) = \omega_0 \left(\frac{ds}{dx}\right)^{-1/2} \left[c_1 + \gamma_2 S(x_0, x)\right]^k (1+0(1)), \quad (43)$$

где $\omega_0 = \gamma_2^{-k} \left[(k-h_0-1)(k+h_0)^{1-m}\right]^{\frac{1}{m+n-1}}$, (44)

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\beta(k-h_0-1)(k+h_0)^{1-m} > 0. \quad (45)$$

Учитываем, что для первой производной каждого решения (43), следующее асимптотическое приближение имеет вид

$$u'(x) = \omega_0 \gamma_2 (k+h_0) \left(\frac{dS}{dx}\right)^{-1/2} \left[c_1 + \gamma_2 S(x_0, x)\right]^{k-1} (1+0(1)). \quad (46)$$

Допустим, что кроме условия (42), имеют место соотношения $k+h_0 = (m-1)(k-h_0-1)$ и $(k+h_0)(k-h_0-1)(m+n-1) < 0.$ Чтобы решения (43) модельной функции для уравнения (12) существовали, необходимо чтобы неравенство (45) выполнялось. В случае, когда кроме (45), выполняется условие $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2(h_0 - G(t)) = 0,$ то модельное решение уравнения (12) также имеет вид (43). Из полученных выше результатов следует, что любое модельное решение вида (43) в случае, когда предполагает асимптотику вида:

$$u(x) = \omega_0 \left(\frac{dS}{dx}\right)^{-1/2} \left[c_1 + \gamma_2 S(x_0, x)\right] + \left[(k-h_0-1)(1-m-n)\frac{J(\nu,t)}{J'(\nu,t)}\right]^{\frac{1}{1-m-n}} (1+0(1)), \quad (47)$$

где $J(\nu,t) = \int\limits_{\nu}^{t} \exp\left[(1-m-n)\int\limits_{t_0}^{\sigma}(k-1-G(\theta))d\theta\right] d\sigma,$ (48)

$$\nu = \begin{cases} t_0, J(t_0, +\infty) = +\infty, \\ +\infty, J(t_0, +\infty) < +\infty. \end{cases}$$

Используем замену

$$u(x) = \left(\frac{dS}{dx}\right)^{-1/2} \left[c_1 + \gamma_2 S(x_0, x)\right]^k \omega(t),$$
$$t = t(x) = \ln\left[c_1 + \gamma_2 S(x_0, x)\right] \quad (49)$$

и считая, что $t'(x) > 0, \lim\limits_{x\to h} t(x) = +\infty,$ получим, что изучение решений уравнения (12) сходится к изучению решений уравнения

$$\omega'' - (1-2k)\omega' + \left[k(k-1) + G'(t) - G(t) - G^2(t)\right]\omega = \alpha\gamma_2^{m-2}\omega^n\left[\omega' + (k+G(t)\omega\right]^m, \quad (50)$$

для которых в промежутке $(t_0, +\infty)$ функция $\omega(t)$ обладает следующими свойствами

$$\omega(t) > 0, \omega'(t) + (k+G(t))\omega(t) \neq 0. \quad (51)$$

Затем рассматриваем условие существования решений данного уравнения, имеющих конечный, не равный нулю предел ω_0 при t → +∞.

Результаты, полученные при исследовании нелинейных уравнений (3), (4), (12) можно использовать при рассмотрении разного рода волновых нелинейных процессов, например, связанных с переносом энергии и вещества, квантовыми явлениями, ударными волнами и пр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ohme P. A. Annali di Matematica // Pure ed Appl.Italia. 1975, L. 297 p.

2. Каюмов Т. К. К асимптотике нелинейного обыкновенного уравнения третьего порядка Краевые задачи для уравнений математической физики // Фан. Ташкент, 1980. С. 102-133.

3. Захаров С. В. Асимптотика решения начальной задачи для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром: автореф. дис. канд. физ-мат. наук. Екатеринбург, 2006. 11 с.

4. Чебоксаров А. Б., Хариш Н. П. Методика решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // Физико-математические методы и информационные технологии в естествознании, технике и гуманитарных науках: сборник материалов международного научного е – симпозиума. Россия, г. Москва, 27–28 декабря 2014 г. С. 48-60.

5. Игропуло В. С., Чебоксаров А. Б. Уравнение Бюргерса как базовый эталон группы нелинейных моделей // Обозрение прикладной и промышленной математики. М.: ОПиПМ, 2006. Т.13. Вып. 2. С. 321.

6. Чебоксаров А. Б., Чебоксаров В. А., Хариш Н. П. Исследование решений нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка // Современная наука и инновация. Ставрополь-Пятигорск: Изд-во ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет» Института сервиса, туризма и дизайна (филиала) СКФУ в г. Пятигорске, 2016. №1 (13). С. 49-57.

7. Чебоксаров А. Б., Лопухов Ю. А. Аналитическое решение нелинейных физических задач // Материалы международной молодёжной научной конференции «Математическая физика и её приложения». Пятигорск: СКФУ, 2012. Т.2. С. 62-67.

8. Чебоксаров А. Б., Кефалиди С. Г. Расчет поля скоростей, созданного колебаниями сфероида в вязкой жидкости // Материалы международной молодёжной научной конференции «Математическая физика и её приложения». Пятигорск: СКФУ, 2012. Т.2. С. 67-69.

9. Чебоксаров А. Б., Игропуло В. С. Метод обобщенного моделирования для нелинейного параболического уравнения // Вестник Ставропольского государственного университета. Ставрополь: СГУ, 2006. Вып. 47. Часть 2. С. 84-87.

10. Чантурия Т. А. Об асимптотическом представлении решений нелинейного уравнения второго порядка // ДУ. 1979. Т. 4. №6. С. 968-975.

11. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко // Физматлит. М., 1978. 688 с.

REFERENCES

1. Ohme P. A. Annali di Matematica // Pure ed Appl.Italia. 1975, L. 297 p.

2. Kayumov T. K. K asimptotike nelineynogo obyknovennogo uravneniya tret'ego poryadka Kraevye zadachi dlya uravneniy matematicheskoy fiziki // Fan. Tashkent, 1980. S. 102-133.

3. Zakharov S. V. Asimptotika resheniya nachal'noy zadachi dlya kvazilineynogo parabolicheskogo uravneniya s malym parametrom: avtoref. dis. kand. fiz-mat. nauk. Ekaterinburg, 2006. 11 s.

4. Cheboksarov A. B., Kharish N. P. Metodika resheniya nekotorykh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy.// Fiziko-matematicheskie metody i informatsionnye tekhnologii v estestvoznanii, tekhnike i gumanitarnykh naukakh: sbornik materialov mezhdunarodnogo nauchnogo e – simpoziuma. Rossiya, g. Moskva, 27–28 dekabrya 2014 g. S. 48-60.

5. Igropulo V. S., Cheboksarov A. B. Uravnenie Byurgersa kak bazovyy etalon gruppy nelineynykh modeley.// Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki. M.: OPiPM, 2006. t. 13.Vyp. 2. S. 321.

6. Cheboksarov A. B., Cheboksarov V. A., Kharish N. P. Issledovanie resheniy nelineynogo differentsial'nogo uravneniya tret'ego poryadka // Sovremennaya nauka i innovatsiya. Stavropol'-Pyatigorsk: Izd-vo FGAOU VPO «Severo-Kavkazskiy federal'nyy universitet» Instituta servisa, turizma i dizayna (filiala) SKFU v g. Pyatigorske, 2016. №1 (13). S. 49-57.

7. Cheboksarov A. B., Lopukhov Yu. A. Analiticheskoe reshenie nelineynykh fizicheskikh zadach // Materialy mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchnoy konferentsii «Matematicheskaya fizika i ee prilozheniya». Pyatigorsk: SKFU, 2012. t.2. S. 62-67.

8. Cheboksarov A. B., Kefalidi S. G. Raschet polya skorostey, sozdannogo kolebaniyami sferoida v vyazkoy zhidkosti // Materialy mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchnoy konferentsii «Matematicheskaya fizika i ee prilozheniya». Pyatigorsk: SKFU, 2012. t.2. S. 67-69.

9. Cheboksarov A. B., Igropulo B. C. Metod obobshchennogo modelirovaniya dlya nelineynogo parabolicheskogo uravneniya // Vestnik Stavropol'skogo gosudarstvennogo universiteta. Stavropol': SGU, 2006. Vyp.47. Chast' 2. S. 84-87.

10. Chanturiya T. A. Ob asimptoticheskom predstavlenii resheniy nelineynogo uravneniya vtorogo poryadka // DU. 1979. T. 4. №6. S. 968-975.

11. Rozhdestvenskiy B. L. Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike / B. L. Rozhdestvenskiy, N. N. Yanenko // Fizmatlit. M., 1978. 688 s.

ОБ АВТОРАХ

Чебоксаров Александр Борисович, СКФУ, ИСТиД (филиал) в г. Пятигорске, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Физики, электротехники и электроэнергетики», cheboksarov1956@mail.ru

Cheboksarov Alexander Borisovich, NCFU (branch) in Pyatigorsk, candidate of physic-mathematical sciences, associate professor, department of physics, electrical engineering and electric power industry, cheboksarov1956@mail.ru

Чебоксаров Виктор Александрович, СКФУ, ИСТиД (филиал) в г. Пятигорске, аспирант, кафедра «Информационной безопасности, систем и технологий», Naweron@yandex.ru

Cheboksarov Victor Aleksandrovich, NCFU (branch) in Pyatigorsk, postgraduate, department «Information Security, Systems and Technologies», Naweron@yandex.ru

Хариш Нелля Петровна, СКФУ, ИСТиД (филиал) в г. Пятигорске, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Физики, электротехники и электроэнергетики», vitalj-vx@mail.ru

Kharish Nelly Petrovna, NCFU (branch) in Pyatigorsk, Ph.D., assistant professor, department of physics, electrical engineering and electric power industry, vitalj-vx@mail.ru

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ МЕТОДОМ ЭТАЛОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

А. Б. Чебоксаров, В. А. Чебоксаров, Н. П. Хариш

В работе рассматривается решение методом эталонного моделирования одномерных нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков, предлагается критерий существования модельных решений, разработан алгоритм исследования асимптотики решений. Особое внимание в статье уделено изучению свойств и поведения решений нелинейного уравнения третьего порядка со степенной нелинейностью функции. В частности, рассматриваются физически важные положительные продолжаемые решения. Рассмотрение возможных вариантов асимптотики искомой функции, её первой и второй производных, позволяет предложить критерии существования модельных решений этого уравнения. В отличие от классических подходов, предлагается новая методика, основанная на методе эталонного моделирования. Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы при рассмотрении разного рода волновых нелинейных процессов, например, связанных с переносом энергии и вещества, квантовыми явлениями, ударными волнами.

SOLUTION OF ONE - DIMENSIONAL NONLINEAR DIFFERENTIAL EGUATIONS OF HIGHER ORDER REFERENCE METHOD SIMULATION.

A. B. CHeboksarov, V. A. CHeboksarov, N. P. CHarish

This paper considers the solution of the reference simulation of one-dimensional nonlinear differential equations of higher orders, we offer a criterion for the existence of model solutions, an algorithm for the study of the asymptotic behavior of solutions. Special attention is paid to studying the properties and behavior of solutions of nonlinear third-order equation with exponential nonlinearity function. In particular, we consider the physically important we continue the positive solutions. Consideration of possible variants of the asymptotic behavior of the unknown function, its first and second derivatives, allows us to offer criteria for the existence of model solutions of this equation. In contrast to classical approaches, we propose a new technique based on the method of reference modeling. The results obtained in this work can be applied to different kinds of nonlinear wave processes, for example, associated with the transfer of energy and matter, quantum phenomena, shock waves.