

УДК 519.63; 533.95

Б. Б. Михалеев [B. B. Mikhalyaev]
 Л. Н. Джимбеева [L. N. Dzhimbeeva]
 Г. А. Манкаева [G. A. Mankaeva]
 А. Э. Дорджиев [A. E. Dordzhiev]

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БЫСТРЫХ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В МАГНИТНОЙ ТРУБКЕ

NUMERICAL MODELING OF MODULATING INSTABILITY OF FAST MAGNETOACOUSTIC WAVES IN MAGNETIC FLUX

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
 «Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова», г. Элиста, Россия

Аннотация. Мы изучаем модуляционную неустойчивость осесимметричных быстрых магнитозвуковых волн в цилиндрической магнитной трубке. Движение плазмы описывается уравнениями идеальной магнитной гидродинамики в приближении так называемой холодной плазмы, когда в уравнениях не учитывается газовое давление. Для описания поведения огибающей несущей волны используется нелинейное уравнение Шрёдингера. Оно решается численно для различных значений волновых параметров с помощью конечно-разностной схемы Кранка-Николсона. При этом учитываются дисперсионные свойства несущей волны. Получены значения параметров, для которых имеет место модуляционная неустойчивость. Рассматривается поведение решений в таких случаях.

Методы, результаты и обсуждения. В данной работе численно решается методом прогонки задача Коши для нелинейного уравнения Шрёдингера, записанного в системе отчета, движущейся с групповой скоростью. Динамику корональной плазмы описываем уравнениями идеальной магнитной гидродинамики в приближении сильного поля или холодной плазмы. Получены дисперсионные кривые и кривые зависимости групповой скорости от волнового числа для фундаментальной моды. Коэффициенты нелинейного уравнения Шрёдингера определяются параметрами и структурой магнитозвуковой моды трубки. Модуляция обусловлена аксиально-симметричными колебаниями трубки вследствие колебаний плотности плазмы, которые имеют квазипериодический характер.

Заключение. Проведено численное исследование модуляционной неустойчивости аксиально-симметричной быстрой магнитозвуковой моды цилиндрической магнитной трубки. Данная мода широко используется в физике плазмы для объяснения наблюдаемых пульсаций микроволнового излучения плазмы. Показано, что неустойчивость регулярной волны модуляции в виде цуга одинаковых волн более эффективна в случае волн большой амплитуды. Такой же вывод следует из теоретических оценок. Поведение волны модуляции в виде локализованного волнового пакета существенно различно для длинноволновой и коротковолновой области.

Ключевые слова: односолитонное решение, монохроматическая волна, нелинейное уравнение Шрёдингера, модуляционная неустойчивость, метод прогонки, точки отсечки, дисперсионные кривые, осесимметричная быстрая магнитозвуковая мода.

Abstract. We study a modulation instability of axi-symmetric fast magnetosonic waves trapped by a cylindrical magnetic flux tube. The plasma motion is described by the ideal magnetohydrodynamic equations in so-called cold plasma approximation where the gas pressure is neglected. Nonlinear Schrödinger equation is used for describing the nonlinear evolution of an envelope of a carrier wave. It is calculated numerically by the Crank-Nicolson finite difference scheme for various values of wave parameters. Dispersion properties of the carrier wave are taken into account. Values of wave parameters are derived for which the modulation instability takes place. Solutions of Nonlinear Schrödinger equation for that values are discussed.

Methods and results. In this paper, the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation written in a report system moving at a group speed is solved numerically by the sweep method. We describe the dynamics of coronal plasma by the equations of ideal magnetic hydrodynamics in the approximation of a strong field or a cold plasma. The dispersion curves and the curves of the dependence of the group velocity on the wave number for the fundamental mode are obtained. The coefficients of the nonlinear Schrödinger equation are determined by the parameters and structure of the magnetosonic mode of the tube. Modulation is due to axially symmetric tube oscillations due to fluctuations in plasma density, which are quasiperiodic.

Conclusion. A numerical study of the modulation instability of the axially symmetric fast magnetosonic mode of a cylindrical magnetic tube is carried out. This mode is widely used in plasma physics to explain the observed pulsations of plasma microwave radiation. It is shown that the instability of a regular modulation wave in the form of a Zug of identical waves is more effective in the case of waves

of large amplitude. The same conclusion follows from theoretical estimates. The behavior of the modulation wave in the form of a localized wave packet is significantly different for the long-wave and short-wave region.

Key words: single-solution solution, monochromatic wave, nonlinear Schrödinger equation, modulation instability, sweep method, cut-off points, dispersion curves, axisymmetric fast magnetosonic mode.

Введение. Модуляционная неустойчивость есть один из важнейших физических эффектов нелинейной теории волн [1, 2]. Она проявляет себя, в частности, как изменение амплитуды монохроматической волны, имеющее периодический или квазипериодический характер. По мере развития модуляционной неустойчивости первоначально регулярно распределенный цуг волн усложняется и приобретает вид волнового пакета – чередования отдельных волн различной амплитуды. В результате появляются колебания с дополнительными частотами, то есть происходит усложнение спектра.

Рассмотрим линейную монохроматическую волну

$$v(z, t) = Ae^{ikz-i\omega t} \quad (1)$$

с амплитудой A , волновым числом k и частотой ω . Последние два параметра являются вещественными и связаны между собой дисперсионным уравнением

$$\omega = \omega(k), \quad (2)$$

вид которого определяется физическими свойствами конкретной волны. Амплитуда, вообще говоря, является комплекснозначной. Для волнового пакета амплитуда будет некоторой функцией $A(z, t)$ – огибающей или волной модуляции, удовлетворяющей уравнению [3-5]

$$i(A_t + V_g A_z) + \alpha A_{zz} = 0, \quad (3)$$

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}, \alpha = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}. \quad (4)$$

В слабонелинейном приближении, если принимать во внимание нелинейные члены до третьего порядка, это уравнение дополняется кубической нелинейностью:

$$i(A_t + V_g A_z) + \alpha A_{zz} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (5)$$

где параметр β является вещественнозначной функцией $\beta(k)$, определяемой конкретным характером нелинейности. Величина V_g есть групповая скорость волнового пакета. В слабонелинейном приближении волна модуляции $A(z, t)$ есть медленно меняющаяся функция в сравнении с экспонентой в формуле (1), которая по отношению к волне модуляции имеет название несущей волны.

В системе отсчета, движущейся с групповой скоростью, уравнение сводится к виду уравнения Шредингера

$$iA_t = -\alpha A_{zz} - \beta |A|^2 A, \quad (6)$$

с «потенциалом» $-\beta |A|^2$. Этот потенциал обусловлен самой волной, и здесь мы имеем дело с явлением «самовоздействия» волны. Уравнение (5) носит название нелинейного уравнения Шредингера. Самовоздействие волны, заложенное в этом уравнении, приводит к нелинейным эффектам, в том числе – модуляционной неустойчивости, которая в данном ключе может рассматриваться как самомодуляция [5].

Подобное явление имеет место в самых различных физических процессах, от гидродинамики до оптики и физики плазмы. Явление самомодуляции наблюдается в поведении внутренних гравитационных волн в океане [6]. Возможно, и появление так называемого «девятого вала» или отдельной большой волны на воде во время шторма обусловлено именно модуляционной неустойчивостью ветровых волн [5]. Модуляционная неустойчивость рассматривается также при изучении процессов распространения электромагнитных волн в световодах [7, 8] и многих других физических задачах.

В настоящей работе исследуется поведение нелинейных быстрых магнитозвуковых волн в цилиндрической магнитной трубке. Рассматриваются осесимметричные быстрые магнитозвуковые колебания, заключенные в трубке, то есть захваченные волны. Ранее в слабонелинейном приближении получено нелинейное уравнение Шредингера, описывающее волну модуляции для этих волн [9, 10]. Здесь мы проводим анализ модуляционной неустойчивости посредством построения волны модуляции, для чего нелинейное уравнение Шредингера решается численно. Учитываются дисперсионные свойства несущей волны.

Нелинейное уравнение Шредингера

Переходя в уравнении (5) к движущейся системе отсчета, о которой уже говорилось, и произведя масштабное преобразование, можно получить каноническое выражение для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$iu_t + u_{zz} + p|u|^2u = 0, \quad u = u(z, t). \quad (7)$$

НУШ относится к классу вполне интегрируемых нелинейных уравнений математической физики, в частности, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния [2, 3]. Характерным свойством таких уравнений является существование особых решений, имеющих вид одной или нескольких уединенных волн и называемых солитонами.

Односолитонное решение уравнения (7) существует для значений параметра $p > 0$ и записывается в виде [11]

$$u(z, t) = \pm C_1 \sqrt{\frac{2 \exp[iC_2z + i(C_1^2 - C_2^2)t]}{p \cosh(C_1z - 2C_1C_2t)}}, \quad (8)$$

где C_1 и C_2 есть произвольные вещественные постоянные. Очевидно, оно представляет собой модулированную монохроматическую волну, амплитуда которой описывается быстроубывающей функцией. Волна оказывается локализованной в окрестности точки $z - 2C_2t = 0$ на оси z , которая со временем перемещается со скоростью $2C_2$. При этом огибающая не меняет своей формы.

С формальной точки зрения условие $p > 0$ приводит к появлению в уравнении «потенциала» в виде ямы $-p|u|^2$, которая способствует образованию локализованной волны. Для монохроматической волны такой ямы нет, но любое малое возмущение амплитуды ведет к ее образованию, что, в свою очередь, будет способствовать к локализации возмущения и еще большему его увеличению. Таково объяснение причин рождения модуляционной неустойчивости. Для уравнения (5) условие модуляционной неустойчивости приобретает вид

$$\alpha\beta > 0, \quad (9)$$

известный в теории волн как условие Лайтхилла [5]. Оно означает, что уравнение имеет эллиптический тип и поэтому решение задачи Коши для него является неустойчивым. Таковы формально – математические причины модуляционной неустойчивости, которая имеет другое название неустойчивости Бенджамина – Фейра.

С волновой точки зрения здесь происходит нелинейное взаимодействие несущей волны заданной частоты ω с двумя волнами-сателлитами с близкими частотами, расположенными симметрично относительно основной: $\omega_{\pm} = \omega \pm \Delta\omega, \Delta\omega \ll \omega$. При этом энергия несущей волны передается двум дополнительным, и происходит их рост [5]. Взаимодействие здесь имеет вид четырех волнового взаимодействия с условиями синхронизма

$$2\omega = \omega_+ + \omega_-, \quad 2k(\omega) = k(\omega_+) + k(\omega_-). \quad (10)$$

Близость частот проявляется в том, что результирующее волновое распределение имеет форму модулированной волны.

Для оценки эффективности модуляционной неустойчивости рассмотрим неустойчивость пространственно-однородного решения [5]. В уравнении (11) перейдем к движущейся системе отсчета

$$iA_t + \alpha A_{zz} + \beta |A|^2 A = 0, \quad (11)$$

Запишем решение в виде $A = ae^{i\phi}$ с вещественными функциями $a = a(z, t)$ и $\phi = \phi(z, t)$. Подставляя его в уравнение (11), получим

$$-a\phi_t + \alpha(a_{zz} - a(\phi_z)^2) + \beta a^3 = 0. \quad (12)$$

$$a_t + \alpha(2a_z\phi_z + a\phi_{zz}) = 0. \quad (13)$$

Полученные уравнения (12) и (13) тождественны уравнению (11) и представляют его вещественную форму. Рассмотрим пространственно-однородное решение: $a_z = 0, \phi_z = 0$. Из уравнений следует

$$a_t = 0, \quad \phi_t = \beta a^2, \quad (14)$$

то есть решение имеет вид

$$A = a_0 e^{i\beta a_0^2 t}, \quad a_0 = \text{const}. \quad (15)$$

Оно описывает монохроматическую волну с частотой

$$\Omega = \beta a_0^2. \quad (16)$$

Проверим его на устойчивость. Для этого рассмотрим малые возмущения величин, которые мы положили быть постоянными: $a = a_0 + \tilde{a}(z, t), \phi_z = \tilde{K}(z, t)$. Перепишем уравнения (12) и (13) в терминах функций a и $K = \phi_z$

$$K_t + 2\alpha K K_z = \alpha \left(\frac{a_{zz}}{a} \right) + 2\beta a a_z, \tag{17}$$

$$(a^2)_t + 2\alpha(a^2 K)_z = 0. \tag{18}$$

Линеаризуя полученные уравнения, находим уравнения для малых возмущений

$$\tilde{K}_t = \alpha \frac{\tilde{a}_{zzz}}{a_0} + 2\beta a_0 \tilde{a}_z, \tag{19}$$

$$\tilde{a}_t + \alpha a_0 \tilde{K}_z = 0. \tag{20}$$

Записав отсюда условие совместности для функции \tilde{K} , получим уравнение для \tilde{a} :

$$\tilde{a}_{tt} + 2\alpha\beta a_0^2 \tilde{a}_{zz} + (\alpha)^2 \tilde{a}_{zzzz} = 0. \tag{21}$$

Уравнение имеет волновые решения. Для решения вида $\tilde{a} \sim e^{\gamma t + ilz}$ получим соотношение

$$\gamma^2 = 2\alpha\beta a_0^2 l^2 - \alpha^2 l^4. \tag{22}$$

Если выполнен критерий Лайтхилла, полученное соотношение допускает положительные вещественные значения параметра γ , что ведет к росту возмущения. Неустойчивыми являются возмущения с волновыми числами из интервала $-l_0 < l < l_0, l_0^2 = 2\beta a_0^2 / \alpha$. Инкремент неустойчивости принимает наибольшее значение γ_m при $l = l_m$.

$$\gamma_m = \beta a_0^2, \quad l_m^2 = \frac{\beta a_0^2}{\alpha}. \tag{23}$$

Таким образом, инкремент модуляционной неустойчивости определяется нелинейным членом в НУШ и амплитудой волны модуляции.

Конечно-разностная схема

Мы решаем численно задачу Коши для уравнения (5), записанного в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью,

$$iA_t + \alpha A_{zz} + \beta |A|^2 A = 0, \quad A = A(z, t). \tag{24}$$

для различных значений параметров α и β . Используем взвешенную конечно-разностную схему Кранка-Николсона [12, 13].

Пространственный интервал $(0, L)$ делим на N равных частей $\Delta x = L/N$. Узлы сетки есть точки $x_n = n\Delta x, n = 0, 1, \dots, N$. Первый и последний узлы соответствуют границам интервала: $x_0 = 0, x_N = L$. Конечно-разностное уравнение имеет вид

$$i \frac{v_n^{k+1} - v_n^k}{\Delta t} + \delta_1 \alpha \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{\Delta x^2} + (1 - \delta_1) \alpha \frac{v_{n+1}^{k+1} - 2v_n^{k+1} + v_{n-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + \beta |v_n^k|^2 (\delta_2 v_n^k + (1 - \delta_2) v_n^{k+1}) = 0, \quad n = 1, \dots, N - 1. \tag{25}$$

Используются веса δ_1 и $1 - \delta_1$ для аппроксимации второй производной и веса δ_2 и $1 - \delta_2$ для аппроксимации нелинейного члена. Уравнение (25) имеет смысл системы линейных алгебраических уравнений, которую мы запишем в виде

$$v_{n-1}^{k+1} - b v_n^{k+1} + v_{n+1}^{k+1} = d_n, \quad n = 1 \dots N - 1, \tag{26}$$

$$b = 2 - \frac{i(\Delta x)^2}{(1 - \delta_1)\alpha\Delta t} - \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1} \frac{(\Delta x)^2}{\alpha} \beta |v_n^k|^2, \tag{27}$$

$$d_n = \frac{2\delta_1}{1 - \delta_1} v_n^k + \frac{i(\Delta x)^2}{(1 - \delta_1)\alpha\Delta t} v_n^k - \frac{\delta_2(\Delta x)^2}{(1 - \delta_1)\alpha} \beta |v_n^k|^2 v_n^k - \frac{\delta_1}{1 - \delta_1} (v_{n+1}^k + v_{n-1}^k) \tag{28}$$

Система (26) – (28) решается методом прогонки.

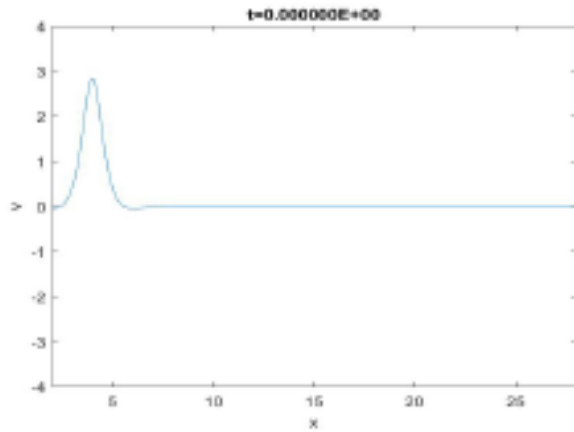


Рис. 1: Одиночный солитон (2.2) в начальном положении. Параметры солитона: $p = 1$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

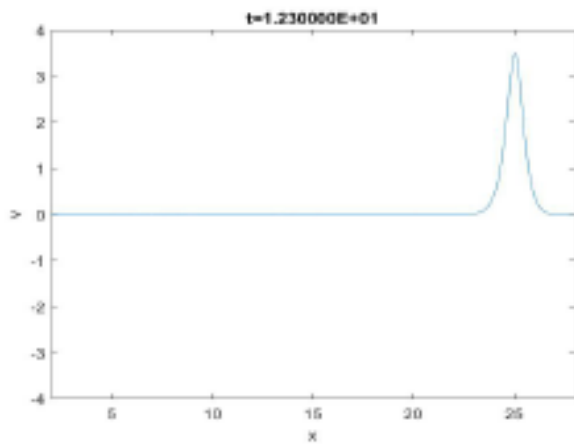


Рис. 2: Динамика солитона. Параметры конечно-разностной схемы: $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Наблюдается увеличение высоты волны, при этом увеличивается и норма решения.

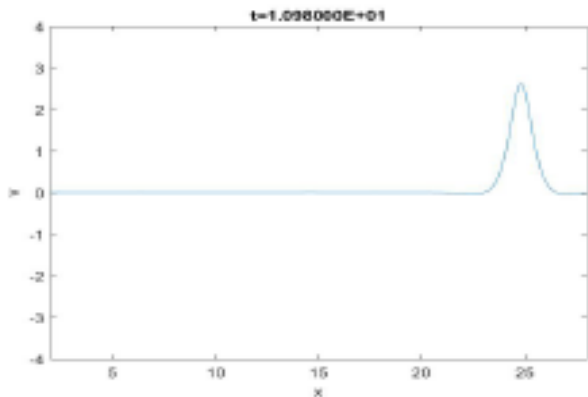


Рис. 3: Динамика солитона. Параметры конечно-разностной схемы: $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Наблюдается уменьшение высоты волны, при этом уменьшается и норма решения.

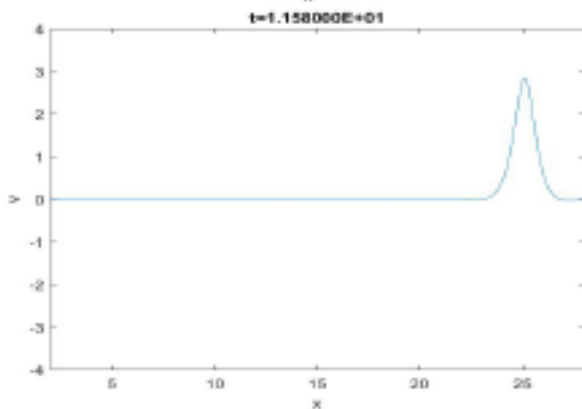


Рис. 4: Динамика солитона. Параметры конечно-разностной схемы: $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$. Высота волны и норма решения не меняются.

Быстрые магнитозвуковые моды магнитной трубки

При описании динамики корональной плазмы мы придерживаемся приближения идеальной МГД:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (31)$$

В уравнениях отсутствует газовое давление. Им мы пренебрегаем, считая его малым в сравнении с магнитным давлением. Подобное приближение в магнитной гидродинамике имеет название приближения сильного поля или холодной плазмы.

Рассмотрим круглую цилиндрическую трубку радиуса a , ось которой разместим по оси Z . Равновесное магнитное поле является однородным и продольным: $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Равновесные значения плотности в трубке ρ_i и во внешней среде ρ_e . Будем считать, что в трубке находится более плотная плазма: $\rho_i > \rho_e$. Трубка характеризуется альвеновской скоростью $V_i = B_0 / \sqrt{4\pi\rho_i}$, а окружающая среда – скоростью $V_e = B_0 / \sqrt{4\pi\rho_e}$, причем $V_i < V_e$. Последнее означает, что трубка служит волноводом для быстрых магнитозвуковых волн, то есть существуют соответствующие моды в виде захваченных волн.

МГД-моды магнитной трубки хорошо изучены в линейном приближении [14, 15]. Нас будет интересовать осесимметричная быстрая магнитозвуковая мода, имеющая приложение к модуляции микроволнового излучения плазмы. При $V_i < \omega/k < V_e$ она допускает описание в терминах радиальной компоненты скорости в цилиндрических координатах в следующем виде

$$v_r = AV_i V(r) e^{ikz - i\omega t}, \quad (32)$$

$$V(r) = \begin{cases} J_0(\lambda r), & \lambda = \sqrt{\omega^2/k^2 - V_i^2}, \\ \frac{J_0(\lambda a) K_0(\chi r)}{K_0(\chi a)}, & \chi = \sqrt{V_e^2 - \omega^2/k^2}. \end{cases} \quad (33)$$

Здесь J_0 и K_0 есть функции Бесселя и Макдональда. В линейном приближении безразмерная амплитуда A является постоянной. Частота и волновое число связаны дисперсионным уравнением

$$\frac{\rho_i(\omega^2 - V_i^2 k^2) J_0(\lambda a)}{\lambda J_0'(\lambda a)} = \frac{\rho_e(\omega^2 - V_e^2 k^2) K_0(\chi a)}{\chi K_0'(\chi a)}. \quad (34)$$

На рис. 5 и 6 показаны дисперсионные кривые и кривые зависимости групповой скорости от волнового числа для фундаментальной моды, для которой радиальная компонента не имеет нулей, отличных от точки нулевой точки $r = 0$. В данном случае колебания плазмы во всей трубке происходят синхронно, с одной фазой. Колебания имеют отсечку в области малых частот, и дисперсионные кривые обрываются при некотором значении волнового числа k_{cut} .

Точки отсечки для рассмотренных случаев: $k_{cut}a \approx 0.85$ для $V_e = 3V_i$, $k_{cut}a \approx 0.41$ для $V_e = 6V_i$ и $k_{cut}a \approx 0.27$ для $V_e = 9V_i$. Захват волны имеет место до некоторого критического значения длины волны $\lambda_{cut} = 2\pi/k_{cut}$, причем это значение увеличивается с относительным возрастанием плотности плазмы в трубке. Иными словами, увеличивается эффективность захвата.

Кривые также показывают, что волны имеют большую дисперсию в длинноволновой области, то есть для малых волновых чисел. В этой области групповая скорость V_g быстро уменьшается с ростом волнового числа до минимума в некоторой точке k_1 . Значения групповой скорости в окрестности минимума $k \approx k_1$ значительно меньше соответствующих значений фазовой скорости ω/k . Очевидно, минимуму групповой скорости соответствует нуль коэффициента α , значения которого приведены далее. С возрастанием волнового числа групповая скорость стремится к альвеновской скорости в трубке. Дисперсионные свойства волны играют важную роль в ее нелинейном поведении.

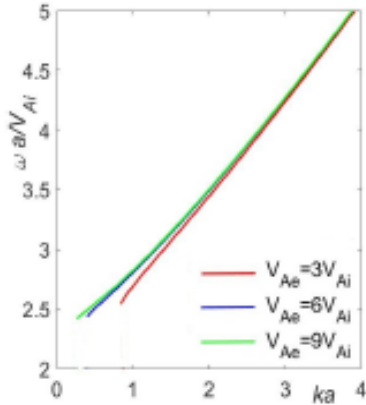


Рис. 5: Дисперсионные кривые фундаментальной аксиально-симметричной быстрой магнитозвуковой моды.

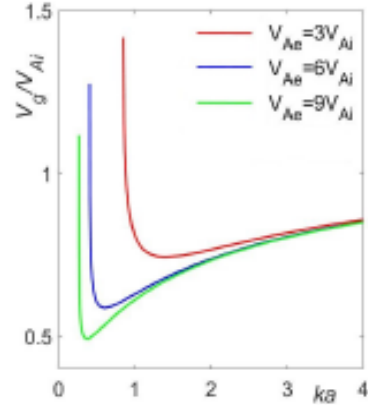


Рис. 6: Кривые групповой скорости аксиально-симметричной быстрой магнитозвуковой моды.

В нелинейном приближении амплитуда волны в выражении (4.4) есть функция $A = A(z, t)$, удовлетворяющая уравнению (1.5). Коэффициенты уравнения есть функции параметров несущей волны $\alpha = \alpha(\omega, k), \beta = \beta(\omega, k)$. Они определяются не только ее дисперсионными свойствами, но и ее структурой [9, 10]. На рисунках 7 и 8 показаны их зависимости от волнового числа с учетом зависимости $\omega = \omega(k)$.

При исследовании модуляционной неустойчивости необходимо знать области знакоопределенности этих коэффициентов. Область положительных значений α : $k > k_1$; $k_1 \approx 1.40$ для $V_e = 3V_i$; $k_1 \approx 0.60$ для $V_e = 6V_i$; $k_1 \approx 0.38$ для $V_e = 9V_i$. Область положительных значений β : $k_2 < k < k_3$; $k_2 \approx 1.57$ и $k_3 \approx 3.75$ для $V_e = 3V_i$; $k_2 \approx 1.43$ и $k_3 \approx 3.48$ для $V_e = 6V_i$; $k_2 \approx 1.39$ и $k_3 \approx 3.50$ для $V_e = 9V_i$.

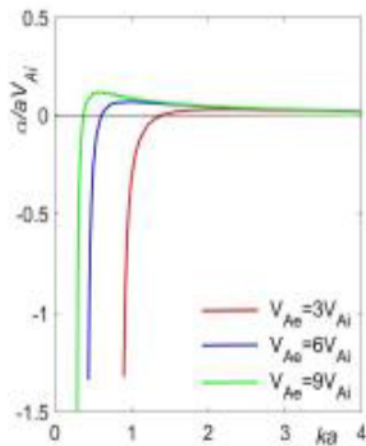


Рис. 7: Кривые зависимости $\alpha(k)$.

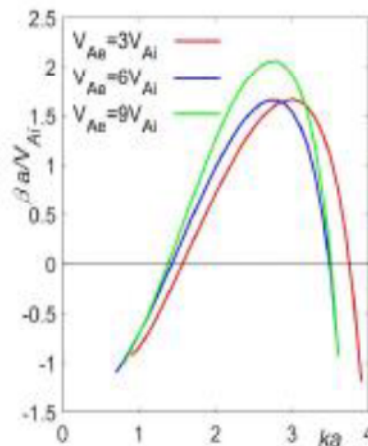


Рис. 8: Кривые зависимости $\beta(k)$.

Модуляционная неустойчивость быстрых магнитозвуковых мод

Условие Лайтхилла (2.3) выполняется для быстрых магнитозвуковых мод магнитной трубки в двух интервалах значений волнового числа (k_{cut}, k_1) и (k_2, k_3) . Будем называть их интервалами длинных и коротких волн. Первый из них характеризуется высокой дисперсией, второй – низкой дисперсией. Проверим эффективность модуляционной неустойчивости на примере монохроматической волны.

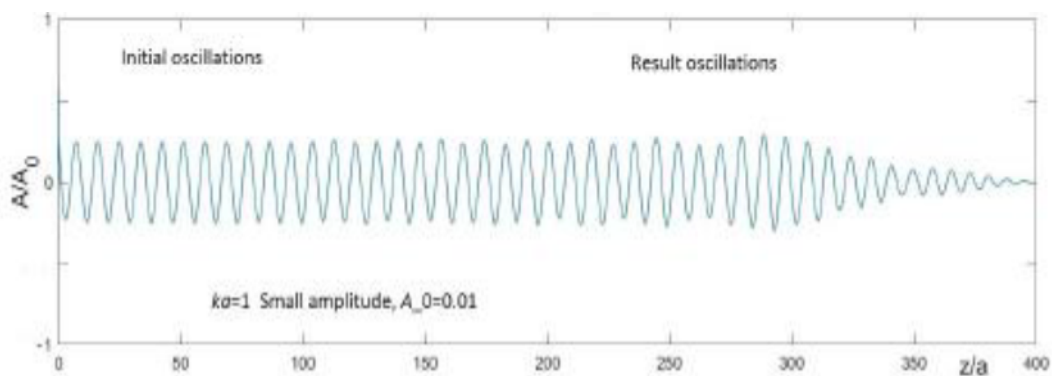


Рис. 9: Модуляция монохроматической волны малой амплитуды. Параметры магнитной трубки: $V_e = 3V_i$.

Зададим на левой границе области колебания вида

$$A = A_0 e^{-i\omega t}, \tag{37}$$

и рассмотрим их распространение в направлении оси OZ. Результаты моделирования представлены на рисунках 9 и 10 для случаев волн разных амплитуд. Они показывают, что для волны малой амплитуды глубина модуляции незначительна, в то время как для волны большой амплитуды она достигает значений порядка единицы. Во втором случае первоначально монохроматическая волна распадается в цуг солитонов (рис. 10). Тем самым подтверждается зависимость эффективности модуляционной неустойчивости от амплитуды волны, полученная ранее с помощью аналитических оценок.

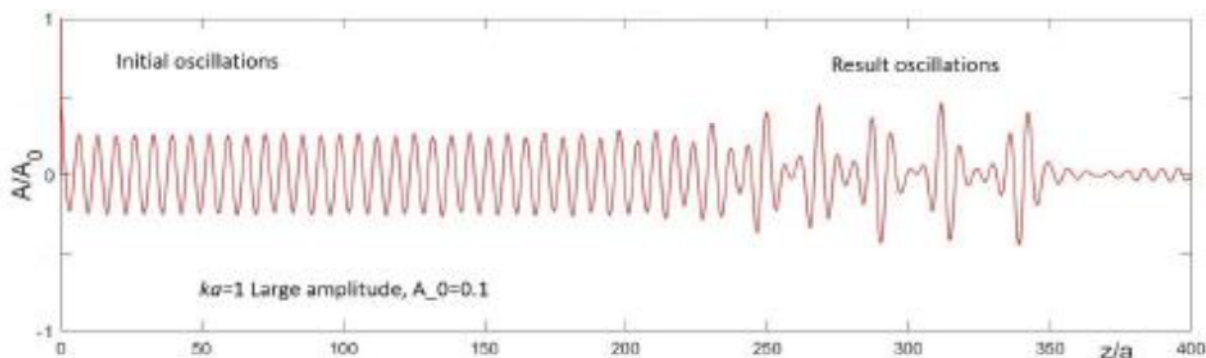


Рис. 10: Модуляция монохроматической волны большой амплитуды. Параметры магнитной трубки: $V_e = 3V_i$.

Характерным свойством осесимметричной быстрой магнитозвуковой моды магнитной трубки является наличие минимума групповой скорости при $k = k_1$, ведущего к нулевому значению коэффициента α . В этом случае уравнения (2.6) и (2.7) дают простое решение

$$A = a(z) e^{i\beta a^2(z)t}, \tag{38}$$

где $a(z)$ есть произвольная дифференцируемая функция. Мы получаем стационарную волну модуляции с неоднородным сдвигом фазы. В лабораторной системе отсчета она распространяется с групповой скоростью $V_g = V_g(k_1)$.

Условие Лайтхилла для рассматриваемых нами мод выполняется для волновых чисел несущей из интервалов (k_{cut}, k_1) и (k_2, k_3) . Рассмотрим их по отдельности. В первом, длинноволновом, интервале оба коэффициента НУШ имеют отрицательные значения, тогда выражение (2.16) можно записать в виде

$$\gamma^2 = 2|\alpha||\beta|a_0^2 t^2 - \alpha^2 t^4. \tag{39}$$

Это означает, что максимальное значение инкремента неустойчивости и соответствующее ему волновое число возмущения определяются модулем коэффициента β :

$$\gamma_m = |\beta|a_0^2, l_m = a_0 \sqrt{\frac{|\beta|}{|\alpha|}} \quad (40)$$

Во втором, коротковолновом, интервале сохраняют свое значение формулы (2.17).

Обратим внимание на абсолютные значения коэффициентов. В коротковолновом интервале коэффициент α имеет относительно небольшие значения, поэтому возмущения огибающей также имеют большие значения волнового числа l_m . Например, при $V_e = 3V_i$ получаем: $l_m/a_0 \approx 0.83$ для $ka = 0.9$ и $l_m/a_0 \approx 8.6$ для $ka = 3.2$. Значения вычисляются в единицах величины a^{-1} . При $a_0 = 0.1$ получаем соответственно $l_m a \approx 0.083$ и $l_m a \approx 0.86$. Это означает, что длина волны модуляции значительно превосходит длину волны несущей, и модуляция представляет собой медленное изменение амплитуды несущей. В данном примере мы имеем дело с модуляцией в ее классическом понимании, введенном Л. И. Мандельштамом [1].

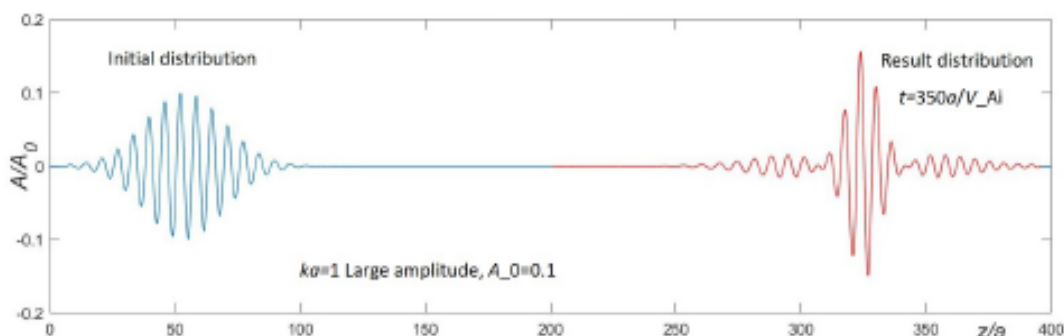


Рис. 11: Распространение пакета волн модуляции больших амплитуд в длинноволновом интервале. Параметры магнитной трубки: $V_e = 3V_i$.

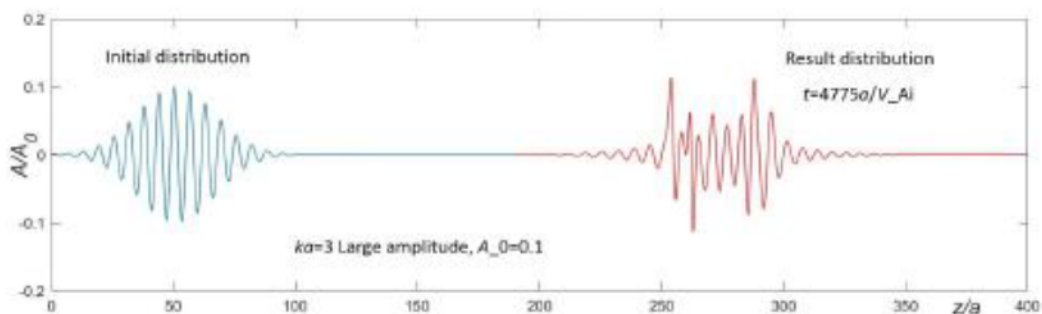


Рис. 12: Распространение пакета волн модуляции больших амплитуд в коротковолновом интервале. Параметры магнитной трубки: $V_e = 3V_i$.

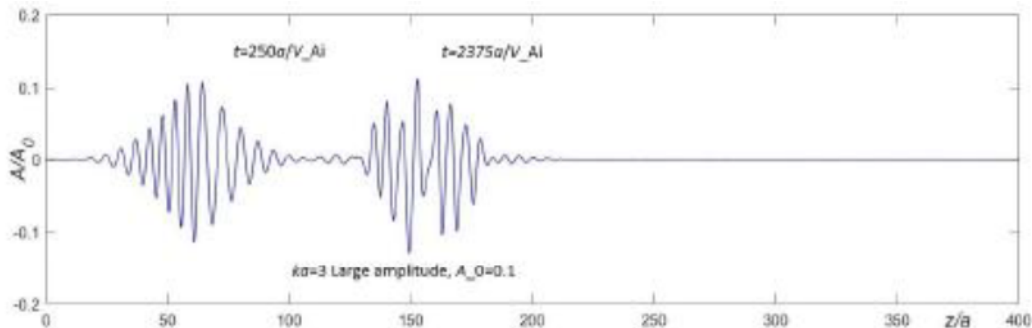


Рис. 13: Распространение пакета волн модуляции больших амплитуд в коротковолновом интервале с начальным распределением, показанным на рисунке 12. Параметры магнитной трубки: $V_e = 3V_i$.

Рассмотрим более реалистичный пример поведение волнового пакета, локализованного цуга волн модуляции больших амплитуд. Исследование проведем в длинноволновом и коротковолновом интервалах (рис. 11, 12). Моделирование волн малых амплитуд показывает, изменения формы волны очень малы.

В примере длинноволнового интервала имеем: $ka = 1.0, \alpha \approx -0.315, \beta \approx -0.852$. В примере коротковолнового интервала $ka = 3.0, \alpha \approx 0.023, \beta \approx 1.664$. В первом примере в распределении волны модуляции наблюдается появление осцилляций к моменту времени $t_2 = 350a/V_i$. Осцилляции нарастают постепенно. Во втором случае выраженные осцилляции достигаются к моменту времени $t_4 = 4775a/V_i$, на порядок больше, чем t_1 . Связано это с малым значением параметра α . К моментам времени $t_1 = 250a/V_i$ и $t_3 = 2375a/V_i$ наблюдаются картины, показанные на рис. 13. Сначала заметных изменений в распределении амплитуды $a(z, t)$ не наблюдается, зато видны изменения в распределении фазы $\phi(z, t)$. Мало продвижение пакета вдоль оси Z , что также объясняется малостью α . Напомним, что здесь рассматривается движение в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью.

Заключение. Проведено численное исследование модуляционной неустойчивости аксиально-симметричной быстрой магнитозвуковой моды цилиндрической магнитной трубки. Данная мода широко используется в физике плазмы для объяснения наблюдаемых пульсаций микроволнового излучения плазмы. Считается, что модуляция обусловлена аксиально-симметричными колебаниями трубки вследствие колебаний плотности плазмы и направления магнитного поля [14, 15]. Наблюдаемые пульсации часто имеют квазипериодический характер, возможным объяснением которого может быть генерация нескольких периодов из-за модуляционной неустойчивости рассматриваемых колебаний.

Исследование проведено с использованием полученного ранее в рамках идеальной магнитной гидродинамики нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), описывающего поведение амплитуды волны [9, 10]. Решение уравнения проводится численно на основе конечно-разностной схемы Кранка-Николсона, для проверки которой были использованы солитонные решения НУШ. В рассматриваемой задаче коэффициенты уравнения определяются параметрами и структурой магнитозвуковой моды трубки. Дисперсионные свойства моды существенно влияют на поведение решения НУШ. В спектре колебаний можно выделить две области с большими и малыми длинами волн. Длинноволновая область характеризуется высокой дисперсией, и групповая скорость в этой области имеет минимум.

Показано, что неустойчивость регулярной волны модуляции в виде цуга одинаковых волн более эффективна в случае волн большой амплитуды. Такой же вывод следует из теоретических оценок. Поведение волны модуляции в виде локализованного волнового пакета существенно различно для длинноволновой и коротковолновой области. В первом случае первоначальный волновой пакет испытывает сжатие в продольном направлении, затем развиваются квазипериодические колебания. Это процесс происходит относительно быстро, поскольку коэффициент α при второй производной в НУШ принимает большие по модулю значения. Во втором случае значения α малы, поэтому волна модуляции распространяется со скоростью, близкой к групповой. В поведении волны сначала наблюдается изменения в фазе без заметных изменений амплитуды. Квазипериодические колебания тоже имеют место, но возникают они через продолжительное время, то есть можно констатировать, что более эффективно генерируют квазипериодические колебания моды с относительно большими длинами волн, лежащие с области высокой дисперсии.

Михаляев Б. Б. выражает благодарность Российскому научному фонду за поддержку работы в рамках проекта № 15-12-20001П.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Манделъштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // Успехи физических наук. 1979. Т. 128, вып. 4. С. 579-624.
2. Sulem C., Sulem P.-L. The Nonlinear Schrödinger Equation. Self-Focusing and Wave Collapse. New York: Springer, 1999. 362 p.
3. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
5. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Физматлит, 2000. 272 с.
6. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1981. 302 с.

7. Дегтярев А. А., Деркач А. Е. Численное решение нелинейного уравнения Шредингера в декартовой системе координат // Компьютерная оптика. 2001. Вып. 21. С. 9-13.
8. Витковский В. Э., Федорук М. П. Численное исследование свойств решений нелинейного уравнения Шредингера при распространении лазерных импульсов в ветоводах // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, No 6. С. 40-49.
9. Mikhalyaev B. B., Ruderman M. S. Nonlinear fast sausage waves in homogeneous magnetic ux tubes // Journal of Plasma Physics. 2015. V. 81. 90581061 1 .doi: 10. 101 7/S002237781 500135X
10. Mikhalyaev B. B., Ruderman M. S., and Naga Varun E. Nonlinear radial oscillations of coronal loops // Geomagnetism and Aeronomy. 2016. V. 56, No 8. P. 1040-1044.
11. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
12. Калиткин Н. Н. Численные методы. Учеб. пособие. 2-е изд., исправленное. СПб: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
13. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 6-е изд. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
14. Зайцев В. В., Степанов А. В. О природе пульсаций солнечного радиоизлучения IV типа. Колебания плазменного цилиндра // Исследования по геомагнетизму, аэронамии и физике Солнца. 1975. Вы. 37. С. 3-10.
15. Edwin P. M., Roberts B. Wave propagation in a magnetic cylinder // Solar Physics. 1983 . V. 88 . P. 179-191.

REFERENCES

1. Gaponov-Grekhov A. V., Rabinovich M. I. L. I. Mandel'shtam i sovremennaya teoriya nelineynykh kolebaniy i voln // Uspekhi fizicheskikh nauk. 1979. T. 128, vyp. 4. S. 579-624.
2. Sulem C., Sulem P.-L. The Nonlinear Schrodinger Equation. Self-Focusing and Wave Collapse. New York: Springer, 1999. 362 p.
3. Karpman V. I. Nelineynye volny v dispergiruyushchikh sredakh. M.: Nauka, 1973. 176 s.
4. Uizem Dzh. Lineynye i nelineynye volny. M.: Mir, 1977. 622 s.
5. Ryskin N. M., Trubetskov D. I. Nelineynye volny. M.: Fizmatlit, 2000. 272 s.
6. Miropol'skiy Yu. Z. Dinamika vnutrennikh gravitatsionnykh voln v okeane. L.: Gidrometeoizdat, 1981. 302 s.
7. Degtyarev A. A., Derkach A. E. Chislennoe reshenie nelineynogo uravneniya Shredingera v dekartovoy sisteme koordinat // Komp'yuternaya optika. 2001. Vyp. 21. S. 9-13.
8. Vitkovskiy V. Eh., Fedoruk M. P. Chislennoe issledovanie svoystv resheniy nelineynogo uravneniya Shredingera pri rasprostranenii lazernykh impul'sov v vetovodakh // Vychislitel'nye tekhnologii. 2008. T. 13, No 6. S. 40-49.
9. Mikhalyaev B. B., Ruderman M. S. Nonlinear fast sausage waves in homogeneous magnetic ux tubes // Journal of Plasma Physics. 2015. V. 81. 90581061 1 .doi: 10. 101 7/S002237781 500135X
10. Mikhalyaev B. B., Ruderman M. S., and Naga Varun E. Nonlinear radial oscillations of coronal loops // Geomagnetism and Aeronomy. 2016. V. 56, No 8. P. 1040-1044.
11. Polyaniin A. D., Zaytsev V. F. Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: Tochnye resheniya. M.: Fizmatlit, 2002. 432 s.
12. Kalitkin N. N. Chislennye metody. Ucheb. posobie. 2-e izd. , ispravlennoe. SPb: BKHV-Peterburg, 201 1 . 592 s.
13. Bakhvalov N. S. , Zhidkov N. P. , Kobel'kov G. M. Chislennye metody. 6-e izd. M.: BINOM, Laboratoriya znaniy, 2008. 636 s.
14. Zaytsev V. V., Stepanov A. V. O prirode pul'satsiy solnechnogo radioizlucheniya IV tipa. Kolebaniya plazmennogo tsilindra // Issledovaniya po geomagnetizmu, aehronomii i fizike Solntsa. 1975. Vy. 37. S. 3-10.
15. Edwin P. M., Roberts B. Wave propagation in a magnetic cylinder // Solar Physics. 1983. V. 88. P. 179-191.

ОБ АВТОРАХ

Михаляев Бадма Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, Калмыцкий государственный университет имени Б.Б. Городовикова, г. Элиста, улица Пушкина, 11, e-mail: bbmikh@mail.ru, phone number: +79613967444

Mikhalyaev Badma Borisovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theoretical Physics, Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov, Elista, Pushkin Street, 11, e-mail: bbmikh@mail.ru, phone number: + 79613967444

Джимбеева Людмила Нарановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, г. Элиста, улица Пушкина, 11, e-mail: dzjimbeeva_ln@mail.ru, phone number: +79054843794

Dzhimbeeva Lyudmila Naranovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical Physics, Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov, Elista, Pushkin Street, 11, e-mail: dzjimbeeva_ln@mail.ru, phone number: +79054843794

Манкаева Галина Алексеевна, старший преподаватель кафедры математики, информатики и методики преподавания, Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, г. Элиста, улица Пушкина, 11, e-mail: mankaeva.galina@yandex.ru, phone number: +79061764200

Mankaeva Galina Alekseevna, Senior Lecturer, Department of Mathematics, Computer Science and Teaching Methods, Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov, Elista, Pushkin Street, 11, e-mail: mankaeva.galina@yandex.ru, phone number: +79061764200

Дорджиев Арлтан Эрдниевич, студент 2 курса направления «Физика и астрономия», магистерская программа «Астрофизика. Физика космических излучений и космоса», Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, г. Элиста, улица Пушкина, 11, e-mail: arltan.dordzhiev.97@mail.ru, phone number: +79615443536

Dordzhiev Arltan Erdnievich, 2nd year student of the direction "Physics and Astronomy", master's program "Astrophysics. Physics of cosmic radiation and space", Kalmyk State University named after B. B. Gorodovikov, Elista, Pushkin street, 11, e-mail: arltan.dordzhiev.97@mail.ru, phone number: +79615443536

Дата поступления в редакцию: 02.03.2019 г.

После доработки: 01.04.2019 г.

Дата принятия к публикации: 04.05.2019 г.