А. Б. Чебоксаров [A. B. Cheboksarov]
В. А.Чебоксаров [V. A. Cheboksarov]
Б. А. Казаров [B. A. Kazarov]
Н. П. Хариш [N. P. Kharish]

УДК 519.711.3

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ НАХОЖДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ON APPLICATION OF THE METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES TO FIND SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Кавказский федеральный университет», г. Ставрополь, Россия

Аннотация. *Настоящая работа посвящена весьма актуальному для занимающихся математической физикой вопросу, – некоторых аспектах методики решения нелинейных дифференциальных уравнений. Практически всегда при изучении природных и создании технологических процессов приходится создавать их технологические модели, а они, в свою очередь, почти всегда приводят к созданию дифференциальных уравнений и, безусловно, к необходимости отыскать их решение, по возможности, точное. Мы рассмотрим методику применения наиболее часто используемого способа решения дифференциальных уравнений, – метода разделения переменных. Новизна настоящей работы в том, что анализом применения метода, по существу, занимались мало. Проблема же заключается в том, что для нелинейных дифференциальных уравнений, а они, как правило, и являются конечным результатом моделирования процесса, решение методом разделения переменных выглядит совсем иначе, чем для линейных уравнений, гораздо сложнее. Например, при разделении переменных в дифференциальных уравнениях со степенной нелинейностью, возникает необходимость при имеющихся двух аргументах, вводить три дополнительные переменные, в результате чего появляется возможность существования нескольких вариантов решения этого уравнения, что сильно осложняет анализ процесса.*

Материалы и метод, результаты и обсуждения. *В настоящей работе обобщаются случаи применения разделения переменных. Мы рассматриваем задачи с различными видами нелинейностей и для каждого случая предлагаем оптимальный метод разделения переменных. Начинаем с рассмотрения стандартных методов, например, метода Фурье при решении задачи о теплопереносе от точечного источника тепла, когда описывающее процесс дифференциальное уравнение имеет степенную нелинейность. Затем рассматриваем менее тривиальный случай, волновое уравнение с нелинейностью в экспоненте. При рассмотрении этого уравнения нашим методом удаётся получить точные решения. Далее, рассматриваем случай с логарифмической нелинейностью, в котором, после некоторых нестандартных преобразований, удаётся получить вид, доступный для применения стандартных, описанных в литературе, методик. Далее переходим к случаю со степенной нелинейностью, когда при решении применяются специальные методики. Случай рассматривается подробно, с анализом производимых преобразований. Обобщая применение метода разделения переменных в классическом проявлении, делаем вывод, что оно становится возможным только при выполнении некоторых дополнительных условий. Для подтверждения этого, рассматриваем модель вязкой жидкости, описываемую дифференциальным уравнением четвёртого порядка относительно тока жидкости и параболическое уравнение второго порядка, описывающее процесс массопереноса.*

Можно сделать вывод, что метод разделения переменных для решения нелинейных дифференциальных уравнений обладает безусловными преимуществами, такими как широкая область применения, чётко прослеживаемый алгоритм использования и надёжность результатов.

Заключение. *В работе исследована методика применения способа разделения переменных для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Рассмотрены все случаи возможного использования метода. Считаем, что данная работа может быть полезна для специалистов, занимающихся математическим моделированием и для молодых учёных.*

Ключевые слова: математическое моделирование, теория нелинейных процессов, нелинейные дифференциальные уравнения, метод разделения переменных, функционально - дифференциальные уравнения.

Abstract. *This work is devoted to a very topical issue for those engaged in mathematical physics-some aspects of the method of solving nonlinear differential equations. Almost always, when studying natural and creating technological processes, it is necessary to create their technological models, and they, in turn, almost always lead to the creation of differential equations and, of course, to the need to find their solution, if possible, accurate. We consider the method of application of the most commonly used method of solving differential* *equations - the method of separation of variables. The novelty of this work is that the analysis of the application of the method, in fact, engaged in a little. The problem is that for nonlinear differential equations, which are usually the final result of modeling the process, the solution by the method of separating variables looks quite different than for linear equations, much more difficult. For example, when separating variables in differential equations with power nonlinearity, there is a need for the existing two arguments, to introduce three additional variables, resulting in the possibility of several options for solving this equation, which greatly complicates the analysis of the process.*

Materials and method, results and discussions. *In this paper, we generalize the cases of using variable separation. We consider problems with different types of nonlinearities and for each case we propose an optimal method of separating variables. We begin by considering standard methods, for example, the Fourier method in solving the problem of heat transfer from a point heat source, when the differential equation describing the process has a power nonlinearity. Then we consider the less trivial case, the wave equation with non-linearity in the exponent. When considering this equation, our method is able to obtain accurate solutions. Next, we consider the case of logarithmic nonlinearity, in which, after some non-standard transformations, it is possible to obtain a form available for the application of standard methods described in the literature. Next, we turn to the case with power nonlinearity, when special methods are used in the solution. The case is considered in detail, with the analysis of the transformations. Generalizing the application of the method of separation of variables in the classical manifestation, we conclude that it becomes possible only under certain additional conditions. To confirm this, we consider a viscous fluid model described by a fourth-order differential equation with respect to the fluid current and a second-order parabolic equation describing the mass transfer process.*

It can be concluded that the method of variable separation for solving nonlinear differential equations has unconditional advantages, such as a wide range of applications, a clearly traceable algorithm of use and the reliability of the results.

Conclusion. *The method of application of the method of separation of variables for the solution of nonlinear differential equations is investigated. All cases of possible use of the method are considered. We believe that this work can be useful for specialists involved in mathematical modeling and for young scientists.*

Key words: mathematical modeling, theory of nonlinear processes, nonlinear differential equations, method of variable separation, functional differential equations.

Математическое моделирование природных и технологических процессов почти всегда приводит к созданию дифференциальных уравнений и, естественно, к необходимости найти их решение. В случае, когда дифференциальное уравнение линейно, наиболее часто пользуютсяметодом решения, известным как метод разделения переменных. Он подробно описан в великом множестве учебников по математическому анализу. Для нелинейных дифференциальныхуравнений эта процедура выполняется несколько иначе, сложнее.

Известно довольно много случаев применения метода разделения переменных для нахождения аналитического решения дифференциальных уравнений в частных производных, когда алгоритм решения совершенно другой, чем для решения линейного дифференциального уравнения. В частности, при разделении переменных в дифференциальном уравнении со степенной нелинейностью, возникает необходимость вводить три функции при имеющихся двух аргументах. Вследствие этого, возникает возможность существования нескольких вариантов решения функционально-дифференциального уравнения.

В работах [1: 259; 6: 12 - 19; 8: 143; 10: 39 и др.] рассматриваются различные виды нелинейных дифференциальных уравнений (в частности, с квадратичной нелинейностью),когда аналитическое решение находится путём перестановки независимых переменных, если число слагаемых в соотношениях разделения больше двух. Хорошо известны методы функционального разделения переменных, используемые при решении уравнений вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \pm \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(w) \cdot$$

Иногда решение для нелинейного дифференциального уравнения ищут в виде произведения независимых аргументов

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{1}$$

или суммы независимых аргументов

$$u(x,t) = X(x) + T(t) \tag{2}$$

По стандартной схеме решения, (1) или (2) подставляют в рассматриваемое нелинейное дифференциальное уравнение и получают равенство двух соотношений для разных аргументов, значение которого равнонеопределённой постоянной. В результате получают обыкновенные дифференциальные уравнения для искомых величин.

В настоящей работе мы постараемся обобщить случаи применения метода разделения переменных.

Случай 1. При рассмотрении задачи о точечном источнике тепла возникает дифференциальное уравнение теплопроводности со степенной нелинейностью

$$u_t = a(u^k u_x)_x. \tag{3}$$

Разделяя переменные, приходим к следующим выражениям:

$$\frac{T_t}{T^{k+1}} = C; \qquad \frac{a\left(X^k \cdot X_x\right)_x}{X} = C \tag{4}$$

Для решения этих уравнений и последующего нахождения искомой функции $u(x, t)$ применяем стандартный метод Фурье [1:257; 6:308 - 312].

Для нелинейных дифференциальных уравнений, которые можно представить в виде

$$f_1(x)\partial_1(t)\Pi_1(u) + f_2(x)\partial_2(t)\Pi_2(u) + \ldots + f_m(x)\partial_m(t)\Pi_m(u) = 0, \tag{5}$$

где выражения $\Pi_i(u)$ есть функции, рассматриваемые как произведения как произведения целых неотрицательных степеней переменной u и ее частных производных $u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{xxx}$, можно найти точные аналитические решения, имеющие следующий вид

$$u(x,t) = X_1(x)\cdot T_1(t) + X_2(x)\cdot T_2(t) + \ldots + X_n(x)\cdot T_n(t), \tag{6}$$

Для нахождения их, выражение (5) подставляют в (6). Чтобы найти $X_i(x)$ и $T_i(t)$, используют уравнение

$$\Phi_1(X)\Psi_1(T) + \Phi_2(X)\Psi_2(T) + \ldots + \Phi_k(X)\Psi_k(T) = 0, \tag{7}$$

где $\Phi_i(X)$ и $\Phi_j(T)$ зависят от x и t:

$$\Phi_j(X) \equiv \Phi_j(x, X_1, X_{1x}, X_{1xx}, \ldots, X_n, X_{nx}, X_{nxx}), \tag{8}$$

$$\Psi_j(T) \equiv \Psi_j(t, T_1, T_{1x}, T_{1xx}, \ldots, T_n, T_{nt}, T_{ntt}) \tag{9}$$

Случай 2. Рассмотрим волновое уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$u_{tt} = a(e^{\lambda U} u_x)_x. \tag{10}$$

Используя (7), можно получить точное решение этого уравнения. Для этого подставляем (7) в (10) и делим обе части уравнения на экспоненту $exp(\lambda T)$, в результате получаем два уравнения

$$e^{-\lambda T} T_{tt} = C; \qquad a(e^{\lambda X} X_x)_x = C. \tag{11}$$

Дальше – по стандартнойметодике.

Случай 3. Предположим, что необходимо исследовать математическую модельтеплопереноса в анизотропной среде, когда температурная зависимость мощности источника тепла логарифмическая. Уравнение такого процесса может быть записано так

$$\left[f(x)u_x\right]_x + \left[\partial(y)u_y\right]_y = au\ln u. \tag{12}$$

Решение этого уравнения – функция $u(x,y)$ можно представитьследующим выражением

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y). \tag{13}$$

Подставив (13) в (12), разделим обе части на (X ·Y) и перераспределив слагаемые $aXY\ln(XY) = aXY\left(\ln X + \ln Y\right)$, мы получим два таких уравнения

$$\frac{1}{X}\left[f(x)X_x\right]_x - a\ln X = C, \tag{14}$$

$$\frac{1}{Y}\left[\ddot{a}(y)Y_y\right]_y - a\ln Y = -C. \tag{15}$$

От вида функций f(x) и f(y) зависит возможность нахождения точных аналитических решений этих уравнений. Дальше – по стандартной методике [1: 254;4: 63 - 65; 6: 179 - 180].

Случай 4. Здесь будем рассматривать гораздо более сложное дифференциальное уравнение со степенной

$$u_t = f(t)u_{xx} + uu_x^2 - au^3. \tag{16}$$

Для разделения переменных в этом случае, применим уравнение (7). Вычислим производныеи, подставляя их в выражение (15),почленно разделим полученное уравнение на произведение $f(x)X(x)T(t)$:

$$\frac{T_t}{fT} = \frac{X_{xx}}{X} + \frac{X^2}{f}\left(X_x^2 - aX^2\right)\cdot \tag{17}$$

В общем виде данное соотношение представить в виде равенства функций от*различных* независимых переменных x и tнельзя. Но это не значит, что решения$X(x)$ и $T(t)$ найти нельзя. Просто для этого необходимо применять некоторые специальные методики.Тогда становиться возможным нахождение несколько видов решений для различных значений параметра a.

1. Выражение(17)для *положительных* значений, a имеет следующие решения

$$X(x) = C\exp(\pm x\sqrt{a})\,; \qquad T(t) = \exp\left[a\int f(t)dt\right], \tag{18}$$

Здесь C – неопределённая постоянная. Решения (18) для $X(x)$ превращают выражение, стоящее в правой части уравнения (17) в скобках, в нуль.Благодаря этому становится возможным разделить переменные и закончитьнахождение решения уравнения (16), используя стандартный алгоритм.

2. Для случая, когда значение параметраa *неотрицательно*, уравнение (17) имеет решения вида:

$$X(x) = C_1\exp(x\sqrt{a}) + C_2\exp(-x\sqrt{a}), \tag{19}$$

$$T(t) = e^F(C_3 + 8aC_1C_2\int e^{2F}dt)^{-\frac{1}{2}},\ F = a\int f(t)dt, \tag{20}$$

здесь параметры C_1, C_2, C_3есть неопределённые постоянные, а функция *X(x)* имеет такое свойство, что различные комбинации величин, входящих в (17) и зависящие от переменной x, равны одновременно некоторым постоянным величинам:

$$\frac{X_{xx}}{X} = const, \qquad X_x^2 - aX^2 = const \tag{21}$$

Данные условия и позволяют намосуществить разделение переменных.

Обратим внимание и на тот факт, что функция T(t) из уравнения (20) удовлетворяет уравнению T_t, известному как уравнениеБернулли: $T_t = af(t)T - 4aC_1C_2T^3$.

3. Рассмотрим теперь решения уравнения (18) (и, конечно, (19) при *отрицательных* значениях параметра a:

$$X(x) = C_1\exp(x\sqrt{-a}) + C_2\cos(x\sqrt{-a}), \tag{22}$$

$$T(t) = e^F\left[C_3 + 2a(C_1^2 + C_2^2)\int e^{2F}dt\right]^{-\frac{1}{2}},\ F = a\int f(t)dt, \tag{22A}$$

здесь C_1, C_2, C_3 – неопределённые постоянные. Функция *X(x)* в (22) обладает следующим свойством: что обе комбинации величин в (17), зависящие от аргумента x, есть постоянные величины. Выражение (22А) тоже удовлетворяет уравнению Бернулли $T_t = af(t)T - a(C_1^2 + C_2^2)T^3$, как и уравнение (20).

Можно отыскать и другие случаи использования метода разделения переменных, хотя и вышеизложенного хватает, чтобы привести ряд обобщений.

Из рассмотренного обзора литературных источников [2: 84; 3: 237 - 240; 4: 63 - 67; 5: 179 - 180; 7: 47 - 49; 9: 39] можно сделать вывод, что для решения дифференциальных уравнений в частных производных, вполне успешно используется метод разделения переменных в классическом проявлении, или некоторых его усовершенствованиях. Однако, выбор способа разделения переменных можно произвести, только если имеетсяконкретное уравнение, причём, в рамках конкретной задачи. Более того, разделение переменных зачастую возможна только при выполнении некоторых определённых, дополнительных условий (см. Случай 4).

Случай 5. Рассмотрим математическую двухмерную модель вязкой несжимаемой жидкости. Для упрощения предположим, что она стационарна.Модель сводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции токажидкости [1: 260,6: 338; 7: 52; 10: 712].

$$u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y = \nu\Delta\Delta u, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} \tag{23}$$

Решение (23) будем искать в виде суммы двух переменных

$$u(x, y) = X(x) + Y(y). \tag{24}$$

Подставив(24) в (23), получим

$$T_y \cdot X_{xxx} - X_x Y_{yyy} = \nu X_{xxxx} + \nu Y_{yyyy}. \tag{25}$$

Продифференцировав обе части (25) по переменным x и y, получим уравнение с разделяющимися переменными [4: 66;5: 181; 9: 42]:

$$Y_{yy} \cdot X_{xxxx} - X_{xx} Y_{yyyy} = 0. \tag{26}$$

Разберём сначала *невырожденный случай*. Допустим, что вторые производные $X_{xx} \not\equiv 0$ и $Y_{yy} \not\equiv 0$. Тогда, после разделения переменных получаем два уравнения

$$X_{xxxx} = CX_{xx}, \tag{27}$$

$$Y_{yyyy} = CY_{yy}. \tag{28}$$

Вид решений этих уравнений, очевидно, зависит от величины неопределённой постояннойC.

1) Предположим, что$C = 0$, тогда решения (27) и (28)будут иметь вид полиномов

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3, \\ Y(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 y^2 + B_4 y^3 \end{aligned} \tag{29}$$

здесь A_k, B_k ($k = 1, 2, 3, 4$) – неопределённые постоянные.

Подставляя (29) в (25), получаемтакие варианты возможных значений неопределённых постоянных

$A_4 = B_4 = 0, \quad A_n, B_n$ $(n = 1,2,3)$ – *любые,*

$A_k = 0, \qquad B_k$ $(k = 1,2,3,4)$ – *любые,*

$B_k = 0, \qquad A_k$ $(k = 1,2,3,4)$ – *любые.*

Первые два комплекта констант определяют два решения уравнения (23) второй и третьей степени по x и y [1: 254; 3: 239; 4: 64; 5: 181].

$$u(x, y) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 y^2 + C_4 y + C_5,$$

$$u(x, y) = C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4.$$

здесь $C_1, \dots, C_5$ – неопределённые постоянные.

2) Предположим теперь, что $C = \lambda^2 > 0$. В этом случае решение (27), (28) будут такими

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x}, \\ Y(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 e^{\lambda y} + B_4 e^{-\lambda y}. \end{aligned} \tag{30}$$

Подставив (30) в (25), сократив на λ^3 и приводя подобные слагаемые, получим следующее выражение

$$A_3\left(\nu\lambda - B_2\right)e^{\lambda x} + A_4\left(\nu\lambda + B_2\right)e^{-\lambda x} + B_3\left(\nu\lambda + A_2\right)e^{\lambda y} + B_4\left(\nu\lambda - A_2\right)e^{-\lambda x} = 0$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах к нулю, получим такие варианты значений констант (остальные постоянные могут пока остаться неопределёнными):

вариант 1 $A_3 = A_4 = B_3 = 0, \quad A_2 = \nu\lambda,$

вариант 2 $A_3 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda,$

вариант 3 $A_3 = B_4 = 0,\ A_2 = -\nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda.$

Эти комплектыконстант определяют следующие три решения (23) в форме (24):

$$u(x, y) = C_1 e^{-\nu\lambda} + C_2 y + C_3 + \nu\lambda x,$$

$$u(x, y) = C_1 e^{-\nu\lambda} + \nu\lambda x + C_2 e^{-\lambda y} - \nu\lambda y + C_3,$$

$$u(x, y) = C_1 e^{-\nu\lambda} - \nu\lambda x + C_2 e^{\lambda y} - \nu\lambda y + C_3,$$

здесь λ, C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

3) Предположим теперь, что C= λ^2< 0.В этом случае решения (27), (28) будут такими

$$X(x) = A_1 + A_2x + A_3\cos(\lambda x) + A_4\sin(\lambda x),$$
$$Y(y) = B_1 + B_2y + B_3\cos(\lambda y) + B_4\sin(\lambda y). \quad (31)$$

Подставляя(31) в (26), мы не получаем новых действительных решений.

Рассмотримтеперь *вырожденные случаи*. Если $X_{xx} \equiv 0$ и $Y_{yy} \equiv 0$, то уравнение (26) превращается в тождество для любых $Y(y)$ и $X(x)$, то есть каждый случай необходимо рассматривать самостоятельно. Например, при $X_{xx} \equiv 0$мы получаем $X(x) = Ax + B$, где A и B – произвольные константы. Подставляя $X(x) = Ax + B$ в (26), мы получаем уравнение $-AY_{yyy} = \nu Y_{yyyy}$. Общее решение для этого уравнения будет иметь вид

$$Y(y) = C_1\exp\left(\frac{-Ay}{\nu}\right) + C_2y^2 + C_3y + C_4.$$

В результате мынаходим еще одно решение [7: 49] уравнения (23) в форме (24):

$$u(x,y) = C_1e^{-\lambda y} + C_2y^2 + C_3y + C_4 + \nu\lambda x; \ (A = \nu\lambda, B = 0).$$

Случай 6. Рассмотрим математические моделидля процессов переноса и исследуем, как используется метод дифференцирования при нахождении решения нелинейного параболического уравнения второго порядка [2: 86;5: 181; 6: 19;9: 40]

$$u_t = auu_{xx} + bu_x^2 + C. \quad (32)$$

Чтобы решить это уравнение, используем способ разделения переменных с применением:

$$U(x,t) = T(t) + \psi(t)\cdot X(x) \quad (33)$$

Подставив (33) в (32), получим

$$T_t - c + \psi_t X = a\psi TX_{xx} + \psi^2\left[aXX_{xx} + b\left(X_x\right)^2\right] \quad (34)$$

Разделим обе части (34) на ψ^2, а потомбудем дифференцировать поx иt. Получится выражение

$$\left(\frac{\psi_t}{\psi^2}\right)_t X_x = a\left(\frac{T}{\psi}\right)_t \cdot X_{xxx}.$$

Разделив в этом уравнении переменные, получим к два дифференциальных уравнения с произвольной константой K:

$$X_{xxx} = KX_x, \quad (35)$$

$$\left(\frac{\psi_t}{\psi^2}\right)_t = aK\left(\frac{T}{\psi}\right)_t \quad (36)$$

Общее решение (35) имеет вид:

$$X(x) = \begin{cases} A_1x^2 + A_2x + A_3 & \text{при } K = 0, \\ A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x} + A_3 & \text{при } K = \lambda^2 > 0, \\ A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x) + A_3 & \text{при } K = -\lambda^2 < 0, \end{cases} \quad (37)$$

здесь A_1, A_2, A_3 – неопределённые постоянные. Интегрируя (36), получим

$$T(t) - \text{любая функция}, \ \psi(t) = \frac{B}{t + C_1}, \ B = const, \text{при } K = 0,$$
$$\psi(t) - \text{любая функция}, T(t) = B\psi + \frac{1}{aK}\cdot\frac{\psi_t}{\psi}, \ \text{при } K = 0. \quad (38)$$

Подставив (37) и (38) в (34) и избавляясь от некоторых постоянных, определимвид функций $T(t)$ и $\psi(t)$. В результатенаходим $u(x, t)$ для различных соотношений между a и b и различных K.

1) $a \neq -b, a \neq -2b, (K = 0); C_1, C_2, C_3 - const$:

$$u(x,t) = \frac{c(a+2b)}{2(a+b)}\left(t + C_1\right) + C_2\left(t + C_1\right)^{-\frac{a}{a+2b}} - \frac{(x + C_3)^2}{2(a+2b)\cdot(t + C_1)}.$$

2) $b = -a, (K = \lambda^2 > 0)$:

$$u(x,t)=\frac{1}{a\lambda^2}\cdot\frac{\psi_t}{\psi}+\psi\left(A_1e^{\lambda x}+A_2e^{-\lambda x}\right),$$

где ψ(t) находим как решение дифференциального уравнения

$$Z_{tt}=ac\lambda^2+4a^2\lambda^4A_1A_2e^{2Z},\quad \psi=e^{Z},$$

решение которого представляется в неявной форме. В случае, если $A_1 = 0$ или $A_2 = 0$, найдём, что $\psi=C_1\exp\left(\frac{1}{2}ac\lambda^2t^2+C_2t\right)\cdot$

3) $b=-a,(K=-\lambda^2<0)$:

$$u(x,t)=-\frac{1}{a\lambda^2}\cdot\frac{\psi_t}{\psi}+\psi\left[A_1\sin(\lambda x)+A_2\cos(\lambda x)\right],$$

где ψ(t) найдём из выражения

$$Z_{tt}=-ac\lambda^2+a^2\lambda^4(A_1^2+A_2^2)e^{2Z},\quad \psi=e^{Z}.$$

Его решение также можно получить в неявной форме.

Методы решения (32) другими способамиизложен в [1: 257; 8: 142 - 144].

Таким образом, можно сделать вывод, что метод разделения переменных для решения нелинейных дифференциальных уравнений обладает безусловными преимуществами, такими как широкая область применения, чётко прослеживаемый алгоритм использования и надёжность результатов.

В настоящей работе мы исследовали методику применения способа разделения переменных для решения нелинейных дифференциальных уравнений. Рассмотрены все случаи возможного использования этого способа. Считаем, что данная работа может быть полезна для специалистов, занимающихся математическим моделированием и для молодых учёных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галактионов В. А. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями / С. А Посашков, С. Р Свирщевский // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. №2. С. 253-261.

2. Чебоксаров А. Б., Игропуло В. С. Метод обобщенного моделирования для нелинейного параболического уравнения // Вестник Ставропольского государственного университета. 2006. № 47. С. 84-87.

3. Чебоксаров А. Б. Теплоперенос в нелинейных средах и наноматериалах // Труды форума молодых ученых и выездного заседания экспертного совета по проблемам интеграции образования, науки и промышленности комитета ГД РФ «Перспективные материалы и технологии микро-, наноэлектроники» (ПМиТМН-1) ПГТУ. Пятигорск, 2009. С. 236-243.

4. Чебоксаров А. Б. Аналитическое решение нелинейных физических задач / А. Б. Чебоксаров, Ю. А. Лопухов // Материалы международной молодёжной научной конференции «Математическая физика и её приложения». Том 4. Пятигорск, 2012. С. 62-67.

5. Чебоксаров А. Б., Хариш Н. П. Математическое моделирование некоторых природных и технологических процессов // Материалы 2-й ежегодной научно-практической конференции преподавателей, студентов и молодых учёных СКФУ «Университетская наука – региону». Пятигорск: ФГАОУ ВПО «СКФУ» (филиал) в г. Пятигорске, 2014. Т.1. С. 178-183.

6. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка // Наука. М., 2005. 376 с.

7. Чебоксаров А. Б., Чебоксаров В. А., Хариш Н. П. Решение одномерных нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков методом эталонного моделирования // «Современная наука и инновации». – Ставрополь – Пятигорск: ФГАОУ ВО «СКФУ» (филиал) в г. Пятигорске, 2016. № 1 (17). С. 46-54.

8. Чебоксаров А. Б., Чебоксаров В. А., Казаров Б. А. Исследование процессов массопереноса методом эталонного моделирования // «Современная наука и инновации». Ставрополь – Пятигорск: ФГАОУ ВО «СКФУ» (филиал) в г. Пятигорске, 2018. № 1 (18). С. 53-58.

9. Drovosekova T. I. Development of a computerized model of hydrolithospheric processes // In the World of Scientific Discoveries, Series B. 2013. Т. 1. № 1. С. 36-43;

10. Segur H., Ablowitz M.J. Asymptotic solutions and conservation laws for the nonlinear Schrodinger equation, part I // J.Math.Phys., 2006,Vol. 17, pp. 710-713.

REFERENCES

1. Galaktionov V. A. Obobshchennoe razdelenie peremennykh dlya differentsial'nykh uravneniy s polinomial'nymi pravymi chastyami / S. A. Posashkov, S. R. Svirshchevskiy // Differentsial'nye uravneniya. 1995. t.31. №2. S. 253-261.

2. Cheboksarov A. B., Igropulo V. S. Metod obobshchennogo modelirovaniya dlya nelineynogo parabolicheskogo uravneniya // Vestnik Stavropol'skogo gosudarstvennogo universiteta. 2006. № 47. S. 84-87.

3. Cheboksarov A. B. Teploperenos v nelineynykh sredakh i nanomaterialakh // Trudy foruma molodykh uchenykh i vyezdnogo zasedaniya ehkspertnogo soveta po problemam integratsii obrazovaniya, nauki i promyshlennosti komiteta GD RF «Perspektivnye materialy i tekhnologii mikro-, nanoehlektroniki» (PMiTMN-1) PGTU. Pyatigorsk, 2009. S. 236-243.

4. Cheboksarov A. B. Analiticheskoe reshenie nelineynykh fizicheskikh zadach / A. B. Cheboksarov, Yu. A. Lopukhov // Materialy mezhdunarodnoy molodyozhnoy nauchnoy konferentsii «Matematicheskaya fizika i eyo prilozheniya» Tom 4. Pyatigorsk, 2012. S. 62-67.

5. Cheboksarov A. B., Kharish N. P. Matematicheskoe modelirovanie nekotorykh prirodnykh i tekhnologicheskikh protsessov // Materialy 2-y ezhegodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii prepodavateley, studentov i molodykh uchyonykh SKFU «Universitetskaya nauka – regionu». Pyatigorsk. FGAOU VPO «SKFU» (filial) v g. Pyatigorske, 2014. T.1. S. 178-183.

6. Krylov N. V. Nelineynye ehllipticheskie i parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka // Nauka. M., 2005. 376 s.

7. Cheboksarov A. B., Cheboksarov V. A., Kharish N. P. Reshenie odnomernykh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vysshikh poryadkov metodom ehtalonnogo modelirovaniya // «Sovremennaya nauka i innovatsii». Stavropol' – Pyatigorsk: FGAOU VO «SKFU» (filial) v g. Pyatigorske, 2016. № 1 (17). S. 46–54.

8. Cheboksarov A. B., Cheboksarov V. A., Kazarov B. A. Issledovanie protsessov massoperenosa metodom ehtalonnogo modelirovaniya // «Sovremennaya nauka i innovatsii». Stavropol' – Pyatigorsk: FGAOU VO «SKFU» (filial) v g. Pyatigorske, 2018. № 1 (18). S. 53-58.

9. Drovosekova T. I. Development of a computerized model of hydrolithospheric processes// In the World of Scientific Discoveries, Series B. 2013. T. 1. № 1. S. 36-43.

10. Segur H., Ablowitz M. J. Asymptotic solutions and conservation laws for the nonlinear Schrodinger equation, part I // J.Math.Phys., 2006,Vol.17, pp. 710-713.

ОБ АВТОРАХ

Чебоксаров Александр Борисович, СКФУ, ИСТиД (филиал) в г. Пятигорске, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Физики, электротехники и электроэнергетики», cheboksarov1956@mail.ru
Cheboksarov Alexander Borisovich, NCFU, (branch) in Pyatigorsk, Candidate of Physical Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Electrical Engineering and Electricity, E-mail: cheboksarov1956@mail.ru

Чебоксаров Виктор Александрович, СКФУ, ИСТиД (филиал) в г. Пятигорске, аспирант, кафедра «Информационной безопасности, систем и технологий», Naweron@yandex.ru
Cheboksarov Victor Aleksandrovich, NCFU, (branch) in Pyatigorsk, postgraduate, Department of Information Security, Systems and Technologies», E-mail: Naweron@yandex.ru

Казаров Бениамин Агопович, СКФУ, ИСТиД (филиал) в г. Пятигорске, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Физики, электротехники и электроэнергетики», kazarovbeniamin@mail.ru
Kazarian Benjamin Agopovich, NCFU, (branch) in Pyatigorsk, Candidate of Physical Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Electrical Engineering and Electricity, kazarovbeniamin@mail.ru

Хариш Нелля Петровна, СКФУ, ИСТиД (филиал) в г. Пятигорске, кандидат технических наук, доцент, кафедра «Физики, электротехники и электроэнергетики», vitalj-vx@mail.ru
Kharish Nelly Petrovna, NCFU, (branch) in Pyatigorsk, Candidate of Physical Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Electrical Engineering and Electricity, vitalj-vx@mail.ru.

Дата поступления в редакцию: 05.06.2018 г.
После доработки: 01.01.2019 г.
Дата принятия к публикации: 01.06.2019 г.