

М. М. Мардоян [M. M. Mardoyan]

УДК 519.876.5

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭССЕНТУКСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ МИНЕРАЛЬНЫХ ВОД**

**THE MATHEMATICAL MODEL OF THE ESSENTUKI'S MINERAL WATERS DEPOSIT**

*В статье рассматриваются проблемы, возникающие при эксплуатации месторождений минеральных вод региона КМВ, указывается необходимость в математическом моделировании при определении рациональных режимов эксплуатации источников минеральной воды, приводится математическая модель участка месторождения.*

*The article deals with the problems arising from the exploitation of mineral waters deposits in the KMV region, the necessity for mathematical modeling in determining rational modes of mineral water resources exploitation is indicated, and a mathematical model of the deposit site is given.*

**Ключевые слова:** минеральные воды, гидролитосфера, эссентукское месторождение, математическая модель, многопластовая система, водоносный горизонт, закон Дарси, гидродинамический процесс.

**Key words:** mineral water, hydrolithosphere, Essentuki field, mathematical model, multilayer reservoirs system, aquifer, Darcy's law, hydrodynamic process.

Регион Кавказских минеральных вод (КМВ) имеет статус особо охраняемого эколого-курортного региона и занимает одно из ведущих мест среди курортных регионов РФ, благодаря разнообразным целебным источникам минеральных вод [8]. Добываемые минеральные воды используются как для лечебного применения в санаториях, пансионатах, так и для промышленного розлива. В последние два десятилетия почти вдвое увеличился объем добываемой минеральной воды без серьезного обоснования возможности повышения дебитов добывающих скважин и режимов их эксплуатации [7]. В текущем положении дел с увеличившимися объемами дебитов минеральной воды, на передний план остро стал вопрос опасности развития деградации месторождений, ухудшении качественного состава добываемой воды, а в отдельных случаях и полное исчезновение. В данном контексте важное значение приобретает математическое обоснование рациональных режимов эксплуатации месторождений минеральных вод. Одним из способов решения данной задачи, является математическое моделирование гидролитосферных процессов [3]. Целью математического моделирования является создание математической модели месторождения, которая позволит определить рациональные режимы эксплуатации месторождений посредством разработки распределенной системы управления дебитами минеральной воды [5].

Общая постановка задачи: проектирование распределенной системы управления Эссентукским месторождением минеральных вод. Первой декомпозиционной задачей при проектировании распределенной системы управления, является описание математической модели, определение ее граничных условий. Необходимо указать физические и геометрические данные, начальные условия. Рассмотрим построение математической модели Эссентукского месторождения минеральных вод на примере одного из участков входящих в его состав – участка 1-КМВ-бис.

На рис. 1 приведен гидрогеологический разрез Эссентукского месторождения с выделенным участком 1-КМВ-бис.

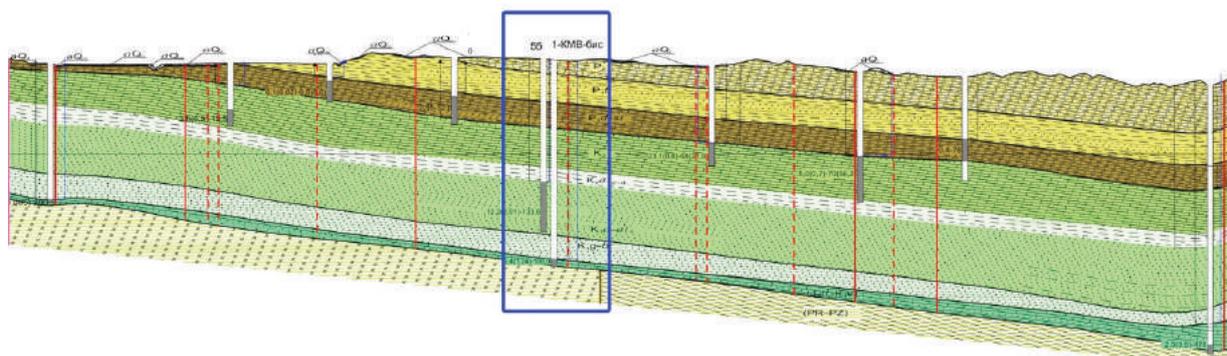


Рис. 1. Гидрогеологический разрез Эссентукского месторождения

На участке 1-КМВ-бис водозабор минеральной воды осуществляется из двух скважин, расположенных на расстоянии 40 м друг от друга: скв. 55, вскрывающая аптско-нижнеальбский водоносный горизонт, и скв. 1-КМВ-бис, вскрывающая титонско-валанжинский водоносный горизонт. Минеральные воды этого участка используются после их предварительного смешения в соотношении 1:2 (скв. 1-КМВ-бис: скв. 55) для питьевого лечения, бальнеолечения и для промышленного розлива.

Для описания математической модели, составим схему участка 1-КМВ-бис. Схема участка приведена на рис. 2.

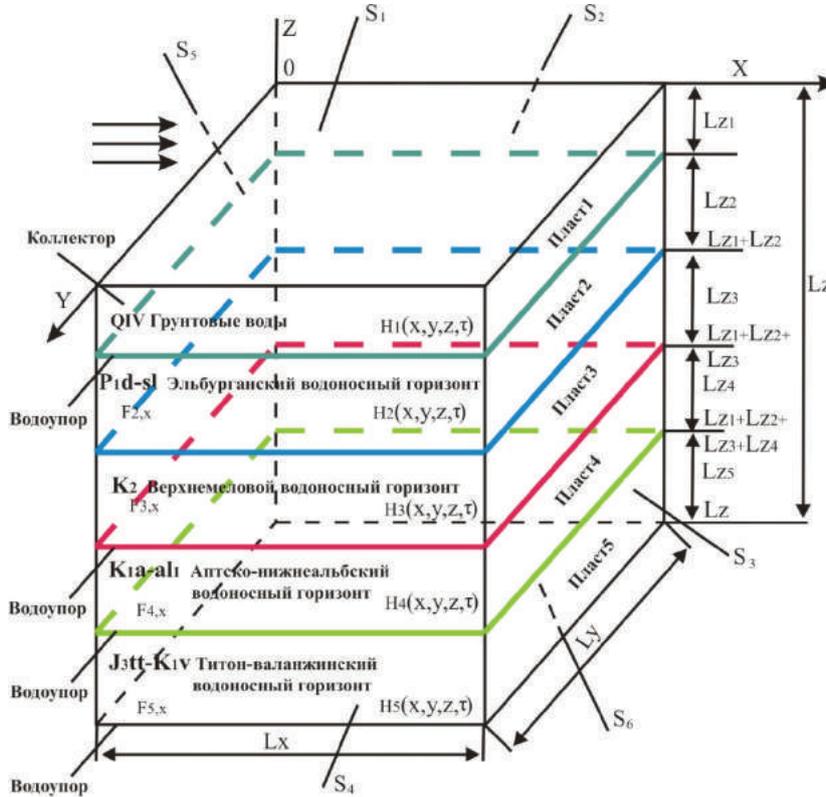


Рис. 2. Схема участка 1-КМВ-бис

При создании многопластовой системы математической модели, обычно применяется трехмерная фильтрация, соответствующая схеме Мятлева-Гиринского, согласно которой в хорошо проницаемых пластах учитывается только горизонтальная составляющая, а в слабопроницаемых – вертикальная и подчиняется закону Дарси [1].

Уравнение, описывающее гидродинамические процессы в I пласте (грунтовые воды), имеет следующий вид [4]:

$$\frac{\partial H_1(x, y, z_1, \tau)}{\partial \tau} = k_{1,x} \frac{\partial^2 H_1(x, y, z_1, \tau)}{\partial x^2} + k_{1,y} \frac{\partial^2 H_1(x, y, z_1, \tau)}{\partial y^2} + k_{1,z} \frac{\partial^2 H_1(x, y, z_1, \tau)}{\partial z_1^2}; \quad (1)$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; 0 < z_1 < L_{z_1}; \tau > 0$$

Уравнение, описывающее гидродинамические процессы в II пласте имеет следующий вид [2]:

$$\frac{\partial H_2(x, y, z_2, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta_2} \left( k_{2,x} \frac{\partial^2 H_2(x, y, z_2, \tau)}{\partial x^2} + k_{2,y} \frac{\partial^2 H_2(x, y, z_2, \tau)}{\partial y^2} + k_{2,z} \frac{\partial^2 H_2(x, y, z_2, \tau)}{\partial z_2^2} \right) - F_{2,x} \cdot \frac{\partial H_2(x, y, z_2, \tau)}{\partial x}; \quad (2)$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; L_{z_4} = (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}); \tau > 0$$

Уравнение, описывающее гидродинамические процессы в III пласте, имеет вид:

$$\frac{\partial H_3(x, y, z_3, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta_3} \left( k_{3,x} \frac{\partial^2 H_3(x, y, z_3, \tau)}{\partial x^2} + k_{3,y} \frac{\partial^2 H_3(x, y, z_3, \tau)}{\partial y^2} + k_{3,z} \frac{\partial^2 H_3(x, y, z_3, \tau)}{\partial z_3^2} \right) - F_{3,x} \cdot \frac{\partial H_3(x, y, z_3, \tau)}{\partial x};$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; (L_{z_1} + L_{z_2}) < z_3 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3}); \tau > 0$$

Уравнение, описывающее гидродинамические процессы в IV пласте, имеет вид:

$$\frac{\partial H_4(x, y, z_4, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta_4} \left( k_{4,x} \frac{\partial^2 H_4(x, y, z_4, \tau)}{\partial x^2} + k_{4,y} \frac{\partial^2 H_4(x, y, z_4, \tau)}{\partial y^2} + k_{4,z} \frac{\partial^2 H_4(x, y, z_4, \tau)}{\partial z_4^2} \right) - F_{4,x} \cdot \frac{\partial H_4(x, y, z_4, \tau)}{\partial x} + V_4(y_j, \tau) \cdot \delta(x_{0,j}, y_{0,j}, z_{0,j})$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y;$$

$$(L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3}) < z_4 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}); \tau > 0$$

Уравнение, описывающее гидродинамические процессы в V пласте, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial H_5(x, y, z_5, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta_5} \left( k_{5,x} \frac{\partial^2 H_5(x, y, z_5, \tau)}{\partial x^2} + k_{5,y} \frac{\partial^2 H_5(x, y, z_5, \tau)}{\partial y^2} + k_{5,z} \frac{\partial^2 H_5(x, y, z_5, \tau)}{\partial z_5^2} \right) - F_{5,x} \cdot \frac{\partial H_5(x, y, z_5, \tau)}{\partial x} + V_5(y_j, \tau) \cdot \delta(x_{0,j}, y_{0,j}, z_{0,j})$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) < z_5 < L_z; \tau > 0$$

где  $H_i$  – напор в горизонте грунтовых вод ( $i = 1$ ) и  $i$ -го горизонта ( $i = 2...5$ );  $k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}$  – коэффициенты фильтрации по пространственным координатам в горизонте грунтовых вод ( $i = 1$ ) и  $i$ -го горизонта ( $i = 2...5$ );  $F_{ix}$  – скорость течения в  $i$ -м водоносном горизонте ( $i = 2...5$ );  $\eta_i$  – упругость в  $i$ -го горизонта ( $i = 2...5$ );  $V_i(y_{ij}, \tau)$  – понижение напора  $i$ -го горизонта, вызванное воздействием  $j$ -й добывающей скважины (в данном случае  $i = 4,5, i = 1,2$ );  $\delta_i(x_{0j}, y_{0j}, z_{0j})$  – функция равная единице, если  $x = x_{0j}, y = y_{0j}, z = z_{0j}$  для  $i$ -го горизонта и равная нулю в других случаях;  $x, y, z$  – пространственные координаты;  $\tau$  – время.

Граничные условия между водоносными горизонтами (пластами), записываются согласно уравнению Дарси [1], [2].

Пласт 1 – Пласт 2:

$$H_1(x, y, L_{z1}, \tau) = H_1(x, y, L_{z1}, \tau) + b_1 \cdot (H_2(x, y, L_{z1}, \tau) - H_1(x, y, L_{z1}, \tau)),$$

$$H_2(x, y, L_{z1}, \tau) = H_2(x, y, L_{z1}, \tau) - b_1 \cdot (H_2(x, y, L_{z1}, \tau) - H_1(x, y, L_{z1}, \tau)).$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; L_{z1} = L_{z1}; \tau > 0$$

Пласт 2 – Пласт 3:

$$H_2(x, y, L_{z2}, \tau) = H_2(x, y, L_{z2}, \tau) + b_2 \cdot (H_3(x, y, L_{z2}, \tau) - H_2(x, y, L_{z2}, \tau)),$$

$$H_3(x, y, L_{z2}, \tau) = H_3(x, y, L_{z2}, \tau) - b_2 \cdot (H_3(x, y, L_{z2}, \tau) - H_2(x, y, L_{z2}, \tau)).$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; L_{z2} = (L_{z1} + L_{z2}); \tau > 0$$

Пласт 3 – Пласт 4:

$$\begin{aligned} H_3(x, y, L_{z_3}^*, \tau) &= H_3(x, y, L_{z_3}^*, \tau) + b_3 \cdot (H_4(x, y, L_{z_3}^*, \tau) - H_3(x, y, L_{z_3}^*, \tau)), \\ H_4(x, y, L_{z_3}^*, \tau) &= H_4(x, y, L_{z_3}^*, \tau) - b_3 \cdot (H_4(x, y, L_{z_3}^*, \tau) - H_3(x, y, L_{z_3}^*, \tau)). \end{aligned}$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; L_{z_3}^* = (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3}); \tau > 0 \quad (8)$$

Пласт 4 – Пласт 5:

$$\begin{aligned} H_4(x, y, L_{z_4}^*, \tau) &= H_4(x, y, L_{z_4}^*, \tau) + b_4 \cdot (H_5(x, y, L_{z_4}^*, \tau) - H_4(x, y, L_{z_4}^*, \tau)), \\ H_5(x, y, L_{z_4}^*, \tau) &= H_5(x, y, L_{z_4}^*, \tau) - b_5 \cdot (H_5(x, y, L_{z_4}^*, \tau) - H_4(x, y, L_{z_4}^*, \tau)). \end{aligned}$$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; L_{z_4}^* = (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}); \tau > 0 \quad (9)$$

где  $b_i$  – параметры перетекания  $i$ -го горизонта ( $i = 1...5$ ).

На боковых границах  $S_2, S_4, S_5$  приняты граничные условия I рода, на боковых границах  $S_3, S_6$  приняты граничные условия II рода, на боковой границе  $S_1$  принята линейная функция [6].

Граница  $S_1$ :  $H_1(x, y, z = 0, \tau) = H_{1,0}$

$$0 < x < L_x; 0 < y < L_y; \tau \geq 0$$

Граница  $S_2$ :

$$\begin{aligned} H_1(x, y = 0, z_1, \tau) &= H_{1,0}; H_2(x, y = 0, z_2, \tau) = H_{2,0}; H_3(x, y = 0, z_3, \tau) = H_{3,0}; \\ H_4(x, y = 0, z_4, \tau) &= H_{4,0}; H_5(x, y = 0, z_5, \tau) = H_{5,0}; H_6(x, y = 0, z_6, \tau) = H_{6,0}; \end{aligned}$$

$$0 < x < L_x; 0 < z_1 < L_{z_1}; L_{z_1} < z_2 < (L_{z_1} + L_{z_2}) \quad (L_{z_1} + L_{z_2}) < z_3 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3})$$

$$(L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3}) < z_4 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) \quad (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) < z_5 < L_z;$$

$$\tau \geq 0 \quad (10)$$

Граница  $S_3$ :

$$\frac{\partial H_1(x = L_x, y, z_1, \tau)}{\partial x} = 0; \frac{\partial H_2(x = L_x, y, z_2, \tau)}{\partial x} = 0; \frac{\partial H_3(x = L_x, y, z_3, \tau)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial H_4(x = L_x, y, z_4, \tau)}{\partial x} = 0; \frac{\partial H_5(x = L_x, y, z_5, \tau)}{\partial x} = 0;$$

$$0 < y < L_y; 0 < z_1 < L_{z_1}; L_{z_1} < z_2 < (L_{z_1} + L_{z_2}) \quad (L_{z_1} + L_{z_2}) < z_3 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3})$$

$$(L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3}) < z_4 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) \quad (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) < z_5 < L_z;$$

$$\tau \geq 0 \quad (11)$$

Граница  $S_4$ :

$$\begin{aligned} H_1(x, y = L_y, z_1, \tau) &= H_{1,0}; H_2(x, y = L_y, z_2, \tau) = H_{2,0}; H_3(x, y = L_y, z_3, \tau) = H_{3,0}; \\ H_4(x, y = L_y, z_4, \tau) &= H_{4,0}; H_5(x, y = L_y, z_5, \tau) = H_{5,0}; \end{aligned}$$

$$0 < x < L_x; 0 < z_1 < L_{z_1}; L_{z_1} < z_2 < (L_{z_1} + L_{z_2}) \quad (L_{z_1} + L_{z_2}) < z_3 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3})$$

$$(L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3}) < z_4 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) \quad (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) < z_5 < L_z;$$

$$\tau \geq 0 \quad (12)$$

Граница  $S_5$ :

$$\begin{aligned} H_1(x = 0, y, z_1, \tau) &= H_{1,0}; H_2(x = 0, y, z_2, \tau) = H_{2,0}; H_3(x = 0, y, z_3, \tau) = H_{3,0}; \\ H_4(x = 0, y, z_4, \tau) &= H_{4,0}; H_5(x = 0, y, z_5, \tau) = H_{5,0}; \end{aligned}$$

$$0 < y < L_y; 0 < z_1 < L_{z_1}; L_{z_1} < z_2 < (L_{z_1} + L_{z_2}) \quad (L_{z_1} + L_{z_2}) < z_3 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3})$$

$$(L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3}) < z_4 < (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) \quad (L_{z_1} + L_{z_2} + L_{z_3} + L_{z_4}) < z_5 < L_z;$$

$$\tau \geq 0 \quad (13)$$

Граница  $S_6$ :

$$\frac{\partial H_5(x, y, z = L_z, \tau)}{\partial z} = 0; 0 < x < L_x; 0 < y < L_y; \tau \geq 0 \quad (14)$$

где  $H_{1,0}, H_{2,0}, H_{3,0}, H_{4,0}, H_{5,0}$  – начальные состояния невозмущенных горизонтов.

Начальные условия задаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_1(x, y, z, \tau = 0) = 0, H_2(x, y, z, \tau = 0) = 0, H_3(x, y, z, \tau = 0) = 0 \\ H_4(x, y, z, \tau = 0) = 0, H_5(x, y, z, \tau = 0) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Основные физические характеристики водоносных горизонтов (пластов) приведены в таблице 1.

Таблица 1

Основные физические характеристики водоносных горизонтов (пластов)

Номер горизонта (пласта)	Мощность горизонта, м	Коэффициенты фильтрации $k_x, k_y$ , м/сут	Коэффициент фильтрации $k_z$ , м/сут	Напор, м	Упругость $\eta$ :
1	22	0,25	0,25		0,0010
2	140	0,25	0,25	625	0,0004
3	282	0,20	0,20	650	0,0006
4	416	0,20	0,20	800	0,0006
5	94	0,22	0,22	852	0,0007

Скорость течения в водоносных горизонтах  $F_{ix} - 0,7$  м/сут. Размер участка 4000 м в длину, 4000 м в ширину. В дальнейшем, на основании полученной математической модели, необходимо составить дискретную модель, позволяющую на практике решать задачи нахождения рациональных режимов эксплуатации месторождений в соответствии с поставленными условиями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гавич И. К. Теория и практика применения моделирования в гидрогеологии. М.: Недра, 1980. 358 с.
2. Гавич И. К. Гидрогеодинамика. М.: Недра, 1988. 349 с.
3. Малков А. В., Першин И. М. Кисловодское месторождение углекислых минеральных вод: системный анализ, диагностика, прогноз, управление. М.: Наука, 2015. 283 с.
4. Малков А. В., Першин И. М. Синтез распределенных регуляторов для систем управления гидролитосферными процессами. М.: Научный мир, 2007. 365 с.
5. Першин И. М., Малков А. В., Першин М. И. Оперативное и стратегическое управление режимами эксплуатации гидролитосферных процессов. Недропользование XXI век // Межотраслевой научно-технический журнал. 2014/ №6а (44)/ С. 40-47.
6. Першин И. М. Синтез систем с распределенными параметрами. Изд-во РИО КМВ, 2002. 212 с.
7. Першин И. М., Малков А. В., Цаплева В. В. Технологическая безопасность эксплуатации гидроминеральных источников // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. №4 (129). С. 25-31.
8. Постановление правительства Российской Федерации от 6 июля 1992 г. №462 об особо охраняемом эколого-курортном регионе Российской Федерации – Кавказских минеральных водах.

#### ОБ АВТОРЕ

**Мардоян Михаил Максимович**, Северо-Кавказский федеральный университет, институт сервиса, туризма и дизайна (филиал) СКФУ в г. Пятигорске, аспирант кафедры информационных систем и технологий e-mail: micam@yandex.ru

**Mardoyan Michael Maksimovich**, North Caucasus Federal University, Institute of service, tourism and design (branch) of NCFU in Pyatigorsk, graduate student, Department of information systems and technology, e-mail: micam@yandex.ru

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭССЕНТУКСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ МИНЕРАЛЬНЫХ ВОД

М. М. Мардоян

Регион Кавказские минеральные воды (КМВ) имеет статус особо охраняемого эколого-курортного региона. В регионе КМВ находится большое количество месторождений минеральных вод. Минеральные воды региона КМФ используются как для лечения и питья, так и для промышленного розлива. За последние 20 лет объем добываемой воды из источников увеличился почти в два раза, без серьезного обоснования

возможности такого увеличения. Одним из способов определения рациональных режимов эксплуатации минеральных источников является математическое моделирование. На примере участка 1-КМВ-бис, входящего в состав есентукского месторождения минеральных вод, построена математическая модель месторождения, указаны граничные условия, условия перетекания между пластами. Приведены физические характеристики водоносных горизонтов. Полученная математическая модель позволяет составить дискретную модель, позволяющую на практике проводить моделирование гидрогеологических процессов месторождения, с целью определения рациональных режимов эксплуатации источников минеральных вод.

#### MATHEMATICAL MODEL OF THE ESSENTUKI'S MINERAL WATERS DEPOSIT

**M. M. Mardoyan**

The region of Caucasian mineral waters (KMV) has the status of especially protected ecological-resort region. In the region of CMS is a large number of deposits of mineral waters. Mineral water in the region of KMF can be used for both treatment and drinking and industrial bottling. Over the past 20 years, the volume of produced water sources has increased almost twice, without serious study of the possibility of such increase. One of the ways of definition of rational modes of exploitation of mineral sources is mathematical modeling. For example, plot 1-CMS-bis, part essentukskogo mineral water, a mathematical model of the Deposit, specified boundary conditions, the conditions of flow between the reservoirs. Given the physical characteristics of aquifers. The obtained mathematical model allows to create a discrete model that allows in practice for modeling of hydrogeological processes deposits, to determine the rational modes of operation of sources of mineral waters.