А. А. Колесников [A. A. Kolesnikov]
П. А. Коропец [P. A. Koropets]
А. В. Кухарский [A. V. Kukharsky]

УДК 534.015.1

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС И УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

THE ENERGY BALANCE AND SUSTAINABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия,
e-mail: anatoly.kolesnikov@gmail.com

Аннотация. *В статье представлен метод создания системы с заданными свойствами по устойчивости. Параметры системы получены по условиям энергетического баланса между мощностью, подводимой и рассеиваемой в процессе автоколебаний.*

Рассматривается эффект стабилизации изначально неустойчивой системы за счет установки динамического гасителя автоколебаний. Приведен пример расчета параметров динамического гасителя автоколебаний. В основу метода оценки устойчивости системы положено свойство ортогональности собственных форм колебаний.

Характерное отличие предлагаемого метода от других известных критериев устойчивости состоит в том, что условия энергетического баланса записываются непосредственно в параметрах самой динамической системы.

Материалы и методы. *Существующие в настоящее время методы оценки устойчивости систем предполагают сначала обязательное задание всех параметров системы, а затем выполнения анализа ее устойчивости по известным критериям: корневым, частотным, алгебраическим и др.*

Такой подход требует определенного «перебора» возможных значений параметров системы, обеспечивающих ее устойчивость, и не может рассматриваться как наиболее рациональный.

Описанный в данной статье метод оценки устойчивости позволяет определить минимальное демпфирование в динамическом гасителе автоколебаний, обеспечивающее устойчивость по каждой из двух возможных форм автоколебаний. В определенном смысле (по массогабаритным показателям) такое демпфирование может считаться оптимальным.

Из условия обеспечения устойчивости следуют простые аналитические выражения для расчета упругих и инерционных создаваемого динамического гасителя автоколебаний.

Заключение. *Метод энергетического баланса в сочетании с разложением колебаний по собственным формам позволяет записать условия устойчивости системы в физических ее параметрах. Такие аналитические выражения устанавливают связь между инерционными, упругими и диссипативными параметрами системы.*

Выводы. *Задачи стабилизации неустойчивых динамических систем могут быть решены за счет установки упруго-диссипативного гасителя автоколебаний.*

Параметры гасителя автоколебаний рассчитываются из соотношений, обеспечивающих условия устойчивости системы при колебаниях с каждой из собственных частот.

Ключевые слова: *фрикционные автоколебания, энергетический баланс, динамическая система, устойчивость, собственная частота, демпфирование.*

Annotation. *The article presents a method for creating a system with specified stability properties. The system parameters are obtained under the conditions of the energy balance between the power supplied and dissipated in the process of self-oscillations.*

The effect of stabilization of initially unstable system due to the installation of dynamic self-oscillation dampener is considered. The example of calculation of parameters of dynamic dampener of self-oscillations is given. The method for assessing the sustainability of the system required the orthogonality property of own forms of fluctuations.

The characteristic difference of the proposed method from other known stability criteria is that the energy balance conditions are recorded directly in the parameters of the dynamic system itself.

Materials and methods. *The currently existing methods for assessing the stability of systems imply first the obligatory assignment of all the parameters of the system, and then performing an analysis of its stability using known criteria: root, frequency, algebraic, etc.*

Such an approach requires a certain "search" of possible values of system parameters ensuring its stability, and cannot be considered as the most rational.

The method of assessing stability described in this article allows determining the minimum damping in a dynamic self-oscillation suppressor, which provides stability for each of two possible forms of self-oscillations. In a certain sense (in terms of weight and dimensions) such damping can be considered optimal.

From the condition of ensuring stability, simple analytical expressions follow to calculate the elastic and inertial generated dynamic self-oscillation damper.

Conclusion. *The method of energy balance in combination with the decomposition of oscillations in their own forms allows us to record the stability conditions of the system in its physical parameters. Such analytical expressions establish a connection between inertial, elastic and dissipative parameters of the system.*

Summary. *The problems of stabilization of unstable dynamic systems can be solved by installing an elastic-dissipative self-oscillation damper.*

The parameters of the self-oscillation damper are calculated from the ratios that provide the stability conditions of the system during oscillations with each of the natural frequencies.

Key words: *friction self-oscillations, energy balance, dynamic system, stability, natural frequency, damping.*

Введение. Среди различных систем, существующих в природе или созданных человеком, особое место занимают автоколебательные системы. В них энергия, подводимая извне от не колебательного источника, за счет внутренних регулирующих функций самой системы преобразуется в колебания [1].

В автоколебательный режим могут входить системы управления при некорректном выборе их структуры и/или параметров.

По утверждению Теодорчика К. Ф., автоколебательные системы должны отвечать следующим основным трем требованиям: во-первых, быть колебательными, во-вторых, быть неустойчивыми «в малом», в-третьих, быть нелинейными [2].

Нелинейность продиктована необходимостью формирования фактора, способствующего стабилизации установившейся амплитуды автоколебаний. Колебательность определяет способность воспроизводить в системе периодически повторяющиеся виды движения. Это предполагает наличие в системе как минимум двух связанных между собой аккумуляторов различных видов энергии, способных переходить из одного в другой за определенный промежуток времени. И если в процессе такого перехода осуществляется подвод очередной порции энергии, превышающий возможные потери, то и общее количество энергии в системе возрастает. Это проявляется в нарастании амплитуды колебаний, пока не вступит в силу фактор ее ограничения. Свойство системы пополнять потери при движении теснейшим образом связано с понятием устойчивости (или неустойчивости).

Благодаря неустойчивости «в малом» система способна начать движение при сколь угодно малом отклонении от равновесного состояния. Если в системе возможны различные виды ее эволюции, то целесообразно ввести понятие «устойчивость по отношению к чему-либо», как свойство не идти именно по этому сценарию развития.

Цель работы – показать, как методом энергетического баланса оценить устойчивость системы по отношению к фрикционным автоколебаниям и выбрать соответствующим образом ее структуру и параметры.

Материалы и результаты исследования

Классическая модель автоколебательной системы показана на рис. 1.

Движение модели описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(V_{ск}) \tag{1}$$

где $V_{ск} = \dot{x} - V$ – скорость скольжения тела относительно ленты транспортера;

V – скорость движения ленты транспортера;

$\dot{x}$ – абсолютная скорость движения тела;

m, b, c – инерционные, диссипативные и жесткостные параметры модели.

Разлагая нелинейную характеристику $F(V_{ск})$ в ряд Тейлора с удержанием только первых двух членов разложения, и переходя к новым (динамическим) координатам, исключающим постоянные составляющие равновесного режима, уравнение (1) можно записать в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \beta\dot{x} \tag{2}$$

где β – угловой коэффициент касательной к характеристике $F(V_{ск})$ в окрестности равновесного режима $[F_*, V_*]$. Отрицательный наклон касательной иногда называют коэффициентом «отрицательного трения», что в свою очередь может трактоваться как фактор подвода энергии в систему, аналогично тому, что положительное демпфирование свидетельствует об отводе энергии из системы.

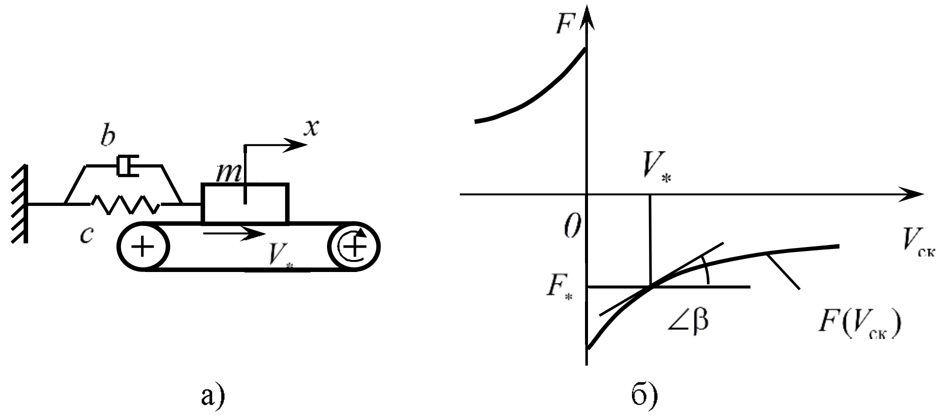

Рис. 1. Модель автоколебательной системы «масса на ленте транспортера»: а) расчетная схема модели, б) зависимость силы трения от скорости скольжения

Если представить уравнение (2) в виде

$$m\ddot{x}+b\dot{x}-\beta\dot{x}+cx=0 \text{ или } m\ddot{x}+(b-\beta)\dot{x}+cx=0, \quad (3)$$

то по очевидному соотношению между величинами b и β можно судить об устойчивости системы:

– если $b>\beta$, то колебания в системе будут затухать, и система считается устойчивой,

– если $b<\beta$, то амплитуда колебаний со временем будет возрастать, и система буде считаться неустойчивой по отношению к фрикционным автоколебаниям.

Определим для системы, описываемой уравнением (3), среднюю за период мощность E^-, рассеиваемую в процессе колебаний, полагая, что колебания имеют гармонический характер $x(t)=x_а\cos(\omega t)$, и их амплитуда $x_а$ мало меняется за период $T=\frac{2\pi}{\omega}$, где ω – собственная частота колебаний системы:

$$E^-=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\cdot\dot{x}(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T b\dot{x}(t)\cdot\dot{x}(t)dt=\frac{b}{T}\int_0^T \dot{x}^2(t)dt=\frac{\omega b}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\omega^2x_a^2\sin^2(\omega t)dt=$$
$$=\frac{b}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\omega^2x_a^2\sin^2(\omega t)d(\omega t)=\frac{b\dot{x}_a^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2(\omega t)dt(\omega t)=\frac{b\dot{x}_a^2}{2\pi}\pi=\frac{b\dot{x}_a^2}{2}, \quad (4)$$

Аналогично определяется и средняя мощность E^+, подводимая в систему:

$$E^+=\frac{\beta\dot{x}_a^2}{2}. \quad (5)$$

Если система находится на границе устойчивости, то справедливо соотношение:

$$E^+=E^-. \quad (6)$$

Автоколебательная система может иметь несколько (s) степеней свободы, и в ней возможно развитие автоколебаний с каждой из собственных частот (ω_s). В пределах малых амплитуд (в окрестности равновесного режима) даже существенно нелинейные системы могут рассматриваться как линейные, а частоты колебаний равны собственным частотам линейных систем. Поскольку собственные колебания ортогональны, то возможно составление соотношений энергетического баланса отдельно для колебаний с каждой из собственных частот [3–5].

У систем с несколькими степенями свободы при колебаниях с собственной частотой существуют вполне определенные линейные соотношения между амплитудами обобщенных координат системы [6–11]. Тогда для каждой из собственных частот ω_s амплитуду каждой обобщенной координаты системы q_{is} можно выразить с помощью соответствующих коэффициентов формы колебаний μ_{is}:

$$q_{is} = \mu_{is} q_{1s}, \tag{7}$$

где q_{1s} – обобщенная координата, по отношению к которой нормируются все остальные обобщенные координаты системы.

С учетом изложенного, рассеиваемая энергия при колебаниях с s -ой собственной частотой может быть представлена в виде:

$$E_s^- = \frac{1}{2}\sum_k b_k \dot{\Delta}_{ks}^2 = \frac{1}{2}\sum_k b_k [\mu_{ks} - \mu_{(k+1),s}]^2 \omega_s^2 q_1^2 = \frac{1}{2}\sum_k b_k [\mu_{ks} - \mu_{(k+1),s}]^2 \dot{q}_{1s}^2, \tag{8}$$

а подводимая энергия:

$$E_s^+ = \frac{1}{2}\sum_n \beta_n [\mu_{ns}]^2 \dot{q}_{1s}^2, \tag{9}$$

где b_k – k -й диссипативный элемент системы;

β_n – n -й элемент системы, имеющий «отрицательное трение».

С учетом (8) и (9), условия, при которых система находится на границе устойчивости по отношению к автоколебаниям с частотой ω_s, имеют вид:

$$\sum_k b_k [\mu_{ks} - \mu_{(k+1),s}]^2 = \sum_n \beta_n [\mu_{ns}]^2. \tag{10}$$

Выражение (10) позволяет при известной структуре, инерционных и жесткостных параметрах системы, а также значениях коэффициентов «отрицательного трения» определить критические значения диссипативных коэффициентов системы для каждого из возможных автоколебательных режимов.

Соотношение энергетического баланса вида (10) может широко использоваться как для оценки устойчивости динамических систем, так и при синтезе систем с заданными свойствами.

Рассмотрим динамическую систему, представляющую телескопическую или раскладную руку робота (штангу) с поворотной обрабатывающей головкой (фрезой, резцом и т.п.) для работ на вешней оболочке космической автоматической станции.

Процессы, происходящие в контакте инструмента с обрабатываемой поверхностью, по своей природе близки к процессам с «отрицательным трением» и способны провоцировать автоколебания, недопустимые по условиям позиционирования инструмента и/или обеспечения качества обрабатываемой поверхности.

Ставится задача – за счет минимального демпфирования гарантировано исключить возможные автоколебания при заданных условиях и ограничениях:

– известны масса, жесткость руки робота в направлении действия основных сил и максимальный коэффициент «отрицательного демпфирования» в рабочем контакте инструмента;

– демпфирование в конструкции руки робота пренебрежимо мало, а установка на ней дополнительного демпфера конструктивно не возможна;

– введение дополнительных связей (упругих, диссипативных) между обрабатывающей головкой и внешней поверхностью космического аппарата конструктивно не возможно.

Исходя из условий задачи, полагаем, что одним из вариантов ее решения может быть установка на корпусе обрабатывающей головки динамического гасителя автоколебаний.

Структура такой динамической системы показана на рис. 2.

По условиям задачи $b_1 = 0$.

Необходимо при заданных параметрах m_1, c_1, β определить оптимальные параметры гасителя автоколебаний m_2, b_2, c_2.

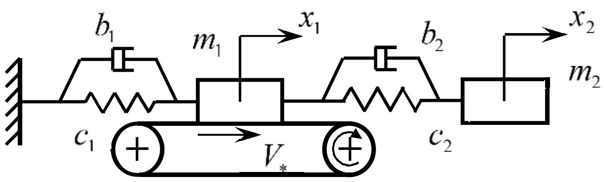

Рис. 2. Расчетная схема динамической системы обрабатывающей головки (m_1)
с динамическим гасителем автоколебаний (m_2)

Движение модели описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 - \beta\dot{x}_1 + c_1x_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_2(x_1 - x_2) = 0; \\ m_2\ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Составляем определитель, раскрываем его и приравняем нулю:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - \omega^2 m_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{12}$$

Получаем частотное уравнение:

$$m_1m_2\omega^4 - [m_1c_2 + m_2(c_1 + c_2)]\omega^2 + c_1c_2 = 0\,. \tag{13}$$

Введем соотношения

$$c_2 = \varepsilon \cdot c_1 \text{ и } m_2 = u \cdot m_1 \tag{14}$$

Решая уравнение (13) с учетом соотношений (14), получим собственные частоты колебаний системы:

$$\omega_{1,2}^2 = 0{,}5\frac{c_1}{m_1}\left[1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{u} \pm \sqrt{\left(1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{u}\right)^2 - 4\frac{\varepsilon}{u}}\right] \tag{15}$$

Полагая коэффициент формы колебаний обрабатывающей головки $\mu_{1s} = 1$, коэффициент формы колебаний гасителя μ_{2s} найдем из выражения:

$$\mu_{2s} = \frac{c_1 + c_2 - \omega_s^2 m_1}{c_2}\,. \tag{16}$$

Для нахождения данной системы на границе устойчивости по каждой из двух возможных форм колебаний соотношение энергетического баланса $E_s^+ = E_s^-$ имеет вид:

$$\frac{1}{2}\beta\dot{x}_{1s}^2 = \frac{1}{2}b_2(1 - \mu_{2s})^2\dot{x}_{1s}^2 \text{ или } \beta = b_2(1 - \mu_{2s})^2\,. \tag{17}$$

Выражение (17) позволяет вычислить коэффициент демпфирования в гасителе b_2 для исключения автоколебаний с частотами ω_1 и ω_2.

Но $\omega_1 \neq \omega_2$ и $\mu_{21} \neq \mu_{22}$. Следовательно, и коэффициенты демпфирования, вычисленные для каждой из частот, будут отличаться, что в общем случае нельзя считать рациональным решением поставленной задачи. Если для одной из форм он окажется достаточным, то для другой он может оказаться недостаточным или избыточным. Необходимо найти такие соотношения между параметрами всей системы, при которых выполнялось бы условие

$$(1 - \mu_{21})^2 = (1 - \mu_{22})^2, \tag{18}$$

что возможно только лишь при выполнении условия

$$|1 - \mu_{21}| = |1 - \mu_{22}| \text{ или } 1 - \mu_{21} = -1 + \mu_{22}\,. \tag{19}$$

Подставляя в (19) значения μ_{21} и μ_{22} из (16), а значения ω_1 и ω_2 из (15) в (16), и выполняя элементарные преобразования, получаем:

$$\varepsilon = \frac{u}{u+1} \text{ или } u = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,. \tag{20}$$

Из (20) следуют соотношения для жесткостных и инерционных параметров, при которых двухмассовая система оптимальна в смысле подавления автоколебаний сразу по обеим возможным формам с помощью введения минимального сосредоточенного демпфирования:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \text{ и } \frac{m_2}{m_1} = \frac{c_2}{c_1 - c_2}. \quad (21)$$

С учетом полученных соотношений (20), для такой системы имеем:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c_1}{m_1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{u}{u+1}}\right) = \frac{c_1}{m_1}\left(1 \pm \sqrt{\varepsilon}\right),$$

$$\mu_{2s} = -1 \pm \sqrt{\frac{u}{u+1}} = -1 \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon},$$

$$(1 - \mu_{2s})^2 = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{u+1}{u} = 1 + \frac{1}{u}.$$

Выражение (17) принимает вид:

$b_2 = \beta \cdot \varepsilon$. (22)Как следует из (22), полученный по условиям энергетического баланса коэффициент демпфирования гасителя автоколебаний b_2 пропорционален коэффициенту «отрицательного трения» β и зависит только от отношения жесткостей системы – ε.

Но здесь необходимо иметь в виду, что сам параметр ε строго определенным образом зависит от инерционных параметров системы – выражение (22). А каким параметрам, и в какой последовательности отдавать приоритет при создании системы, решает конструктор.

Заключение

1. В статье описан метод энергетического баланса применительно к задачам подавления автоколебаний, вызываемых «отрицательным демпфированием».

2. На конкретном примере продемонстрированы достоинства метода – простота, доступность понимания физического смысла, возможность получения решения сложных задач динамики, устойчивости, анализа и синтеза динамических систем в аналитическом виде.

Не сложно представить и сопоставить трудоемкость решения рассмотренной в статье задачи другими известными методами: с помощью критерия Рауса-Гурвица, критерия Найквиста, годографа Михайлова или с применением корневых критериев устойчивости.

3. Расчеты показали, что погрешность результатов, полученных описанным методом, по сравнению с точными расчетами на ЭВМ не превышает 3–5 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, С. Э. Хайкин. ОНТИ НКТП СССР, 1937. 519 с.
2. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1952. 272 с.
3. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 360 с.
4. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1980. 272 с.
5. Коропец П. А. Метод оценки устойчивости упругих систем с малой диссипацией // Вестник РГУПС. Ростов н/Д, 2016. № 1. С. 32 – 41.
6. Магнус К. Колебания. М.: Мир, 1982. 304 с.
7. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
8. Тондл А. Автоколебания механических систем.М.: Мир, 1979. 429 с.
9. Яблонский А. А. Курс теории колебаний: учебное пособие / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. М.: Высш. школа. 1975. 248 с.
10. Блакъер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
11. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Наука, 1964. 437 с.

REFERENCES

1. Andronov A. A. Teoriya kolebanii / A. A. Andronov, S. E. Khaikin. ONTI NKTP SSSR, 1937. 519 s.

2. Teodorchik K. F. Avtokolebatel'nye sistemy. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1952. 272 s.
3. Landa P. S. Avtokolebaniya v sistemakh s konechnym chislom stepenei svobody. M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1980. 360 s.
4. Panovko Ya. G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanii. M.: Nauka, 1980. 272 s.
5. Koropets P. A. Metod otsenki ustoichivosti uprugikh sistem s maloi dissipatsiei // Vestnik RGUPS. Rostov n/D, 2016. № 1. S. 32–41.
6. Magnus K. Kolebaniya. M.: Mir, 1982. 304 s.
7. Biderman V. L. Teoriya mekhanicheskikh kolebanii. M.: Vysshaya shkola, 1980. 408 s.
8. Tondl A. Avtokolebaniya mekhanicheskikh system. M.: Mir, 1979. 429 s.
9. Yablonskii A. A. Kurs teorii kolebanii: uchebnoe posobie / A. A. Yablonskii, S. S. Noreiko. M.: Vyssh. shkola, 1975. 248 s.
10. Blak"er O. Analiz nelineinykh sistem. M.: Mir, 1969. 400 s.
11. Strelkov S. P. Vvedenie v teoriyu kolebanii. 2-e izd. pererab. i dop. M.: Nauka, 1964. 437 c.

ОБ АВТОРАХ

Колесников Анатолий Аркадьевич, доктор технических наук, профессор, кафедра синергетики и процессов управления, Южный федеральный университет, 347900, г. Таганрог, ул. Чехова, 2, телефон +7 (8634) 36-07-07, e-mail: anatoly.kolesnikov@gmail.com
Kolesnikov Anatoliy Arkad'evich, Doctor of Engineering Sciences, Professor, The Department of Synergetics and Control, Southern Federal University, 347928, Russia, Taganrog, 2, Checkhov street, phone +7 (8634) 36-07-07, e-mail: anatoly.kolesnikov@gmail.com

Коропец Петр Алексеевич, кандидат технических наук, доцент, Ростовский государственный университет путей сообщения (РГУПС), кафедра «Электрический подвижной состав», 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2, телефон:+7 (951) 831-68-24, e-mail:pkoropets@gmail.com
Koropets Petr Alekseevich, Candidate of Engineering Sciences, Associated Professor, Rostov State Transport University (RSTU), 2, Rostovskogo Strelkovogo Polka Narodnogo Opolcheniya sq., Rostov-on-Don, 344038, Russia, Chair «Electric Rolling Stock», phone +7 (951) 831-68-24, e-mail: pkoropets@gmail.com

Кухарский Александр Витальевич, группа МРС-4-025,студент, Ростовский государственный университет путей сообщения (РГУПС), 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2, телефон +7 (919) 893-36-35, e-mail: 79198932212@yandex.ru
Kukharskiy Aleksandr Vital'yevich, group MRS-4-025, student, Rostov State Transport University (RSTU), 2, Rostovskogo Strelkovogo Polka Narodnogo Opolcheniya sq., Rostov-on-Don, 344038, Russia, phone +7 (919) 893-36-35, e-mail: 79198932212@yandex.ru

Дата поступления в редакцию 27.07.2018