

Г. А. Манкаева [G. A. Mankaeva]  
Л. Н. Джимбеева [L. N. Dzhimbeeva]  
Б. Б. Михалыев [B. B. Mikhalyaev]  
С. Б. Дертеев [S. B. Derteev]  
И. А. Лагаев [I. A. Lagaev]

УДК 533.95:004.9:  
519.6(470.47)

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАННОЙ КОНФИГУРАЦИИ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ ПЛАЗМЕННОГО ОБЛАКА**

**MODELING OF THE PROVIDED CONFIGURATION  
OF THE MAGNETIC FIELD IN THE PLASMA CLOUD**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова», г. Элиста, Россия

**Аннотация.** За последние годы исследования динамики магнитных облаков накоплено множество данных об их поведении под действием магнитных полей. В случае изучения корональных выбросов массы проблема заключается в постановке граничных и начальных условий как для магнитных полей, так и для других физических параметров: температуры, скорости, давления и т.д.

**Методы и результаты.** Корональный выброс массы (КВМ) представлен в виде цилиндра, при этом магнитные поля внутри и вне плазменного облака заданы определенными конфигурациями. После некоторых математических преобразований и упрощений было получено уравнение Пуассона для векторного потенциала, также для облегчения решения использовалась кулоновская калибровка. Уравнение Пуассона решалось численным методом конечных разностей и графически представлен результат анализа поведения магнитного поля внутри плазменного облака, под действием внешнего магнитного поля, также представлено начальное распределение плотности внутри облака с использованием магнитогидродинамических (МГД) уравнений и схемы WENO.

**Заключение.** На рассмотрение представлена одна из моделей магнитного поля и результаты, которые получаются при использовании МГД уравнений и численных методов.

**Ключевые слова:** Компьютерное моделирование, физика плазмы, динамика выбросов плазмы, технология численного решения, уравнение Пуассона.

**Abstract.** In recent years researches of the dynamics of magnetic clouds have accumulated a wealth of data on their behavior under the action of magnetic fields. In the case of researching coronal mass ejections, the problem lies in setting boundary and initial conditions for magnetic fields and other physical parameters: temperature, velocity, pressure, etc.

**Methods and results.** The coronal mass ejection is represented in the form of a cylinder, the magnetic fields inside and outside the plasma cloud given by certain configurations. After some mathematical transformations and simplifications, the Poisson's equation for the vector potential was obtained, and the Coulomb gauge was also used to facilitate the solution. The Poisson's equation was solved numerically by the finite-difference method and graphically presents the result of analyzing the behavior of the magnetic field inside the plasma cloud, under the action of an external magnetic field, and also the initial density distribution inside the cloud using the MHD equations and the WENO scheme.

**Conclusion.** One of the models of the magnetic field and the results obtained using the MHD equations and numerical methods are presented for consideration.

**Key words:** Computer modeling, plasma physics, dynamics of plasma emissions, technology of numerical solution, Poisson's equation.

**Введение.** В научных исследованиях используются различные технологии, в том числе компьютерное моделирование. Большое значение имеет выбор подходящих методов и подходов при решении конкретных задач. Например, в физике плазмы широко используется подход, основанный на применении численных методов при решении уравнений магнитной гидродинамики.

Одним из перспективных направлений таких исследований стал учет различных физических и технологических факторов при постановке и численного решения задач динамики выбросов плазмы на Солнце. Этот класс задач, несмотря на его значимость, мало исследован, что связано, прежде всего, со значительными трудностями в построении алгоритмов их решения. Применение новых технологий разработки программ, использующих современный аппарат математического моделирования, способствует достижению высоких технологических показателей и повышению критерия качества решения.

В конкретных ситуациях, при выборе технологии численного решения важно учитывать те или иные физические эффекты магнитной гидродинамики, а именно вязкость, теплопроводность и электрическое сопротивление плазмы, а также правильно подбирать начальные и граничные условия.

**Задание начальных и граничных условий.** Во многих исследованиях корональный выброс массы, его также называют магнитным или плазменным облаком, представляют в виде петли. В данном случае выбираем небольшой объем в виде цилиндра, который заполнен плазмой с внутренним магнитным полем и находится во внешнем магнитном поле. Если посмотреть на него сверху, то получим прямоугольник (рис. 1).

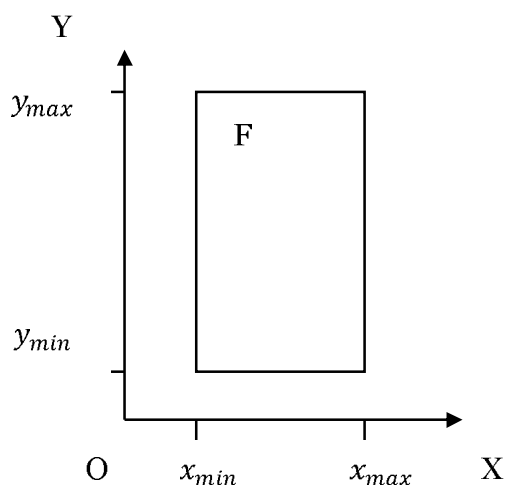


Рис. 1. Вид сверху на выделенный объем КВМ

Накладываем сетку: по оси  $OX$  с шагом  $\Delta x: \{x_i: i = \overline{1, n}\}$ , и по оси  $OY$  с шагом  $\Delta y: \{y_j: j = \overline{1, m}\}$ , тогда область  $F$  имеет такие границы:  $F = \{(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ .

Перейдем непосредственно к уравнениям Максвелла, а именно  $div \vec{B} = 0$  и  $rot \vec{B} = 4\pi/c \cdot \vec{j}$ . Представим вектор магнитной индукции через векторный потенциал  $\vec{B} = rot \vec{A}$ , далее получим, что  $rot rot \vec{A} = \nabla div \vec{A} - \Delta \vec{A} = 4\pi/c \cdot \vec{j}$ , наложим еще одно условие или так называемую калибровку Кулона:  $div \vec{A} = 0$ , тогда  $\Delta \vec{A} = -4\pi/c \cdot \vec{j}$ . Рассмотрим только  $x$ -компоненту уравнения Пуассона, тогда  $\Delta A_x = -4\pi/c \cdot j_x$ . Будем считать, что внутри цилиндра магнитное поле представляет собой винтовую линию, аналитический вид которого представляем в следующем виде[1]:

$$\vec{B} = -\frac{yB_0b}{1 + b^2(x^2 + y^2 + z^2)} \vec{e}_x + \frac{xB_0b}{1 + b^2(x^2 + y^2 + z^2)} \vec{e}_y + \frac{B_0}{1 + b^2(x^2 + y^2 + z^2)} \vec{e}_z,$$

Соответственно  $x$ -компонента плотности тока имеет вид

$$j_x = \frac{2xB_0b^3z}{(1 + b^2(x^2 + y^2 + z^2))^2} - \frac{2yB_0b^2}{(1 + b^2(x^2 + y^2 + z^2))^2}$$

Окончательно получаем уравнение Пуассона в виде:

$$\Delta A_x = -\frac{2xB_0b^3z}{(1 + b^2(x^2 + y^2 + z^2))^2} + \frac{2yB_0b^2}{(1 + b^2(x^2 + y^2 + z^2))^2}$$

Теперь нужно построить магнитное поле вокруг петли: магнитное поле направлено вдоль оси  $OX$  и имеет вид [2]:

$$B = \frac{B_0}{1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\gamma\delta\right)} \left[ -1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} + 2\ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a^2} \right] \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Записываем граничные условия I рода (Дирихле) и II рода (Неймана), далее проводим дискретизацию граничных условий методом конечных разностей и дискретизацию внутренних точек. Получаем систему линейных алгебраических уравнений размерности n·m, которая содержит (n-2)(m-2) уравнений для внутренних точек области  $\{(x_{min}, x_{max}); (y_{min}, y_{max})\}$  и 2n+2(m-2) для граничных условий.

В итоге мы получим распределение  $A_x$  на плоскости XOY.

На рис. 2, по оси OX, имеет характерную длину ~ 1000 км, векторный потенциал  $A_x$  представлен в единицах СГС.

Теоретические исследования динамики корональных выбросов массы (КВМ), как крупномасштабного явления, обычно проводятся в приближении магнитной гидродинамики. Проблема гидродинамического описания здесь осложняется необходимостью учета структуры магнитного поля, которая в большинстве случаев не является очевидной.

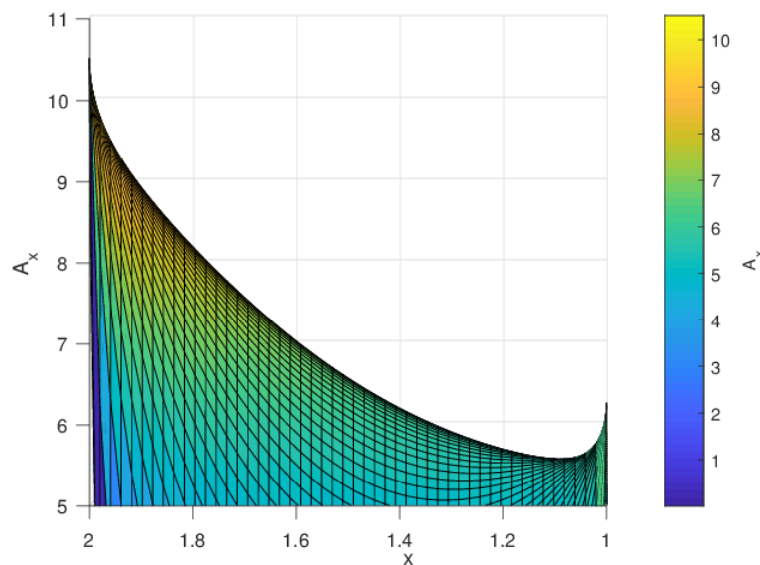


Рис. 2. Распределение векторного потенциала магнитного поля внутри КВМ

В связи с тем, что постановка задачи о моделировании КВМ не является однозначной ни с физической, ни с математической точки зрения особенно важен выбор технологического подхода. Поэтому задача определения технологических показателей численного решения делает актуальной проблему построения соответствующих математических моделей, выбора подходящего технологического критерия качества, а также разработки численных методов решения соответствующих задач.

История наблюдений КВМ насчитывает около полувека, однако использование в последнее время различных новых технических средств позволило получить большое количество подробных данных, из которых можно сделать ряд заключений о характере этого явления. Отдельной важной проблемой является описание механизма запуска КВМ, которое здесь мы не затрагиваем.

Одним из часто обсуждаемых вопросов, связанных с изучением возникновения и динамики КВМ, является роль магнитного пересоединения. В настоящее время принято считать, что вспышки, эрупция протуберанцев и КВМ есть составные части единого процесса глобальной магнитной эрупции. Согласно стандартной модели вспышки (КВМ), магнитное пересоединение играет ключевую роль на начальной стадии эрупции, когда процесс развивается в нижних, относительно плотных областях короны.

В обзоре [3] подробно проанализированы кинематические свойства 6621 событий, наблюдавшихся при помощи SOHO/LASCO. Замедленное движение (DDCME) оказалось далеко не характерным для их динамики и наблюдалось только в 1797 из рассмотренных случаев, в то время как в 2132 случаях наблюдалось ускорение (AACME). Наблюдалось также движение со знакопеременным ускорением: ускорение с последующим замедлением (ADCME, 1482 случая) и даже замедление с последующим ускорением (DACME, 1210 случаев). Обозначена

корреляция кинематических свойств с условиями возникновения КВМ: тип AA наблюдается перед вспышками, тип DD – после вспышек, в других случаях подобная корреляция не очевидна.

Подобная статистика свидетельствует о неоднозначности в целом динамики КВМ и существовании множества факторов, приводящих к этому результату. Механизм их распространения в гелиосфере так же до конца не понят, как и механизм начального ускорения. На распространение могут оказывать влияние как солнечный ветер (аэродинамическое торможение), так и ударная волна, возникающая впереди самого облака КВМ [4].

Адекватное моделирование процесса распространения КВМ до расстояний в несколько десятков  $R_{\odot}$  является существенно трехмерной задачей, которая требует для своего решения солидных технических и программных ресурсов. В последние годы оно становится доступным для широкого круга исследователей, что объясняет появление целого ряда работ на эту тему. Для постановки задачи требуется определить модель процесса, то есть необходимо сформулировать уравнения, начальные и граничные условия, первоначальный вид можно задать в виде петли [5], например, можно задать начальные условия магнитного поля, которые зависят от ускорения КВМ [6, 7]:

$$\begin{cases} B_{rCME}(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \\ B_{\theta CME}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \end{cases} \quad (1)$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \psi_0 \left( a(r, \theta, \varphi) - \frac{a_{CME}}{2\pi} \sin \left( \frac{2\pi a(r, \theta, \varphi)}{a_{CME}} \right) \right).$$

Имеется много работ с использованием уравнений идеальной МГД. Распространены также модели, где учитываются диссипативные эффекты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}, \\ \frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) &= -T \nabla \cdot \mathbf{v} - \frac{m_p}{2k\rho} (\nabla \cdot \mathbf{q} + n_e n_p Q(T) - H_{ch}), \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\nu \rho \nabla \mathbf{v}), \\ p &= p(\rho, T), \\ \mathbf{q} &= \begin{cases} -\kappa \nabla T, R_{\odot} \leq r \lesssim 10R_{\odot} \\ \alpha n_e k T \mathbf{v}, r > 10R_{\odot} \end{cases}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{v}$  – скорость,  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\sigma$  – коэффициент электропроводности,  $T$  – температура,  $k$  – постоянная Больцмана,  $m_p$  – масса протона,  $\gamma$  – адиабатический коэффициент,  $n_e, n_p$  – концентрация электронов и протонов,  $p$  – давление,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения,  $\nu$  – динамическая вязкость,  $H_{ch}$  – функция нагрева солнечной короны,  $Q(T)$  – функция радиационных потерь,  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  $\alpha$  – постоянная. Даже система уравнений (2) не является полным набором всех МГД уравнений. Решение системы уравнений (2) сводится к нахождению скорости или координат КВМ в виде зависимости или численных значений. При решении возникает ряд проблем, которые связаны с заданием магнитного поля, распределения температуры, плотности, вида функций радиационных потерь и нагрева солнечной короны.

Из-за вращения Солнца и наличия активных областей, общее магнитное поле все время меняет свою конфигурацию, поэтому можно использовать только приближенные полуэмпирические зависимости вектора магнитной индукции от времени и координат. Одной из главных проблем астрофизики, до сих пор является задача нагрева солнечной атмосферы и, соответственно, неизвестны распределения температуры и плотности, а функцию  $H_{ch}$  можно только выбирать различными способами, отталкиваясь от конкретной используемой модели, для построения функции радиационных потерь нужно учитывать множество факторов, в том числе химический состав. Также можно упростить систему, если рассматривать полностью ионизованную водородную плазму, тогда функция состояния выглядит так:

$$p = p(\rho, T) = \frac{k}{m_p} \rho T. \quad (3)$$

Типичным примером подхода на основе идеальной МГД можно считать модели, в которых начальное положение КВМ задается аналитически магнитной трубкой, а окружающая среда представлена в виде упрощенной модели солнечного ветра с учетом эффектов гравитации и дополнительных источников нагрева [5, 6]. Область, в которой разворачивается картина движения, обычно простирается от расстояний порядка  $1R_{\odot}$  до нескольких десятков и сотен  $R_{\odot}$ .

Более реалистичный подход должен основываться на конкретных данных о КВМ и внешней среде на определенную дату. Необходимо также отметить, что свойство идеальности в некоторой степени является относительным при численном моделировании, поскольку влияние искусственной вязкости способно привести к тем же результатам, которые могут дать вполне реальные диссипативные эффекты.

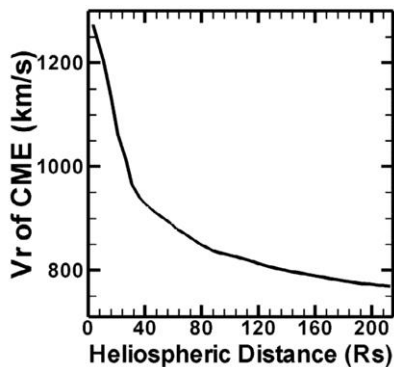


Рис. 3. Изменение скорости КВМ с расстоянием [7]

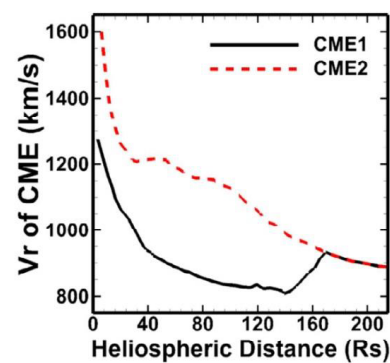


Рис. 4. Иллюстрация процесса взаимодействия двух КВМ [7]

На рис. 3 и 4 показаны результаты моделирования события от 28–31 марта 2001 года [7]. Силы, приводящие к замедлению движения КВМ, в данном случае есть силы аэродинамического торможения, магнитного натяжения и гравитационного притяжения. Силы, приводящие к ускорению, – это силы магнитного и газового давлений. На движение может влиять также обмен моментом количества движения с солнечным ветром, особенно значительно этот эффект проявляется при взаимодействии двух различных КВМ.

В диссипативном приближении широко используются уравнения так называемой термодинамической МГД, в которых учтены вязкость, теплопроводность, электрическое сопротивление, а также излучение и нагрев короны [8, 9]. Для численного моделирования разработан код MAS (Magnetohydrodynamic Algorithm outside a Sphere) с расчетами в сферических координатах, в данном коде используется система уравнений (2). Имеются версии с векторным потенциалом, один из таких способов представлен в данном случае, что освобождает от проблемы выполнения условия  $div\vec{B} = 0$ .

MAS-код используется при моделировании начального выброса. Для описания движения КВМ в межпланетном пространстве используется его гелиосферная версия, где в уравнении для энергии исключены диссипативные эффекты, нагрев и радиационные потери, но в уравнении для момента количества движения учтены сила Кориолиса и центробежная сила. При описании движения межпланетных КВМ учитывается также структура межпланетного магнитного поля.

**Результаты исследования и их обсуждение.** На рис. 2, видно как во фронтальной части относительно центральной и задней частей, увеличено магнитное поле, это обусловлено тем, что внешнее магнитное поле удерживает эруптивный протуберанец перед выбросом.

Для определения начальных данных потребуется задать распределения плазмы и магнитного поля внутри и вне цилиндра. Распределения внутри цилиндра, описывающие КВМ, будут осесимметричными. Распределение поля вне цилиндра, изображающее внешнее поле, имеет однородный характер на большом удалении от КВМ. Также для понимания сложности постановки задачи представлено распределение плотности плазмы внутри цилиндра, практически в начальный момент времени. Для моделирования использовалась система уравнений МГД и использовался численный метод решения по схеме WENO (weighted essentially non-oscillatory).

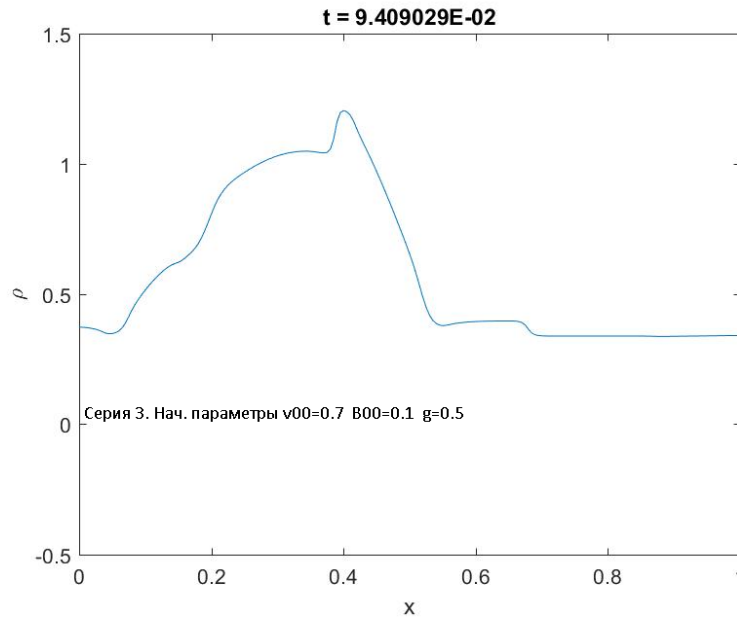


Рис. 5. Начальное распределение плотности вещества в солнечной короне, под действием КВМ

**Заключение.** Для того, чтобы описать поведение КВМ необходимо использовать большой объем вычислительных ресурсов. Необходимо выбрать модель, которая будет как можно ближе к наблюдательным данным, для дальнейшего предсказания динамики КВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Aschwanden M. J. A nonlinear force – free magnetic field approximation suitable for fast forward – fitting to coronal loops. I. Theory. SolarPhysics. 2013. vol. 287. issue 1-2. P. 323-344.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 520 с.
3. Nicewicz J., Michalek G. Classification of CMEs based on Their Dynamics. Solar Physics. 2016. vol. 291. issue 5. P. 1417-1432.
4. Howard T. Coronal Mass Ejections: An Introduction. New York: Springer, 2011. 244 p.
5. Poedts S., Jacobs C., van der Holst B., et al. Numerical simulations of the solar corona and Coronal Mass Ejections. Earth, Planets and Space. 2009. vol. 61. issue 5. P. 599-602.
6. Shen F., Shen C., Zhang J. et al. Evolution of the 12 July 2012 CME from the Sun to the Earth: Data – constrained three – dimensional MHD simulations. Journal of Geophysical Research: Space Physics. 2014. vol. 119. P. 7128-7141.
7. Shen F., Wu S. T., Feng X., Wu C.-C. Acceleration and deceleration of coronal mass ejections during propagation and interaction. JournalofGeophysicalResearch: Atmospheres. 2012. vol. 117. A11101.

#### REFERENCES

1. Aschwanden M. J. A nonlinear force – free magnetic field approximation suitable for fast forward – fitting to coronal loops. I. Theory. SolarPhysics. 2013. vol. 287. issue 1-2. P. 323-344.
2. Slezkin N. A. Dinamika vyazkoy neshzhimaemoy zhidkosti. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literature, 1955. 520 s.
3. Nicewicz J., Michalek G. Classification of CMEs based on Their Dynamics. Solar Physics. 2016. vol. 291. issue 5.P. 1417-1432.
4. Howard T. Coronal Mass Ejections: An Introduction. New York: Springer, 2011. 244 p.
5. Poedts S., Jacobs C., van der Holst B., et al. Numerical simulations of the solar corona and Coronal Mass Ejections. Earth, Planets and Space. 2009. vol. 61. issue 5. P. 599-602.
6. Shen F., Shen C., Zhang J. et al. Evolution of the 12 July 2012 CME from the Sun to the Earth: Data – constrained three – dimensional MHD simulations. Journal of Geophysical Research: Space Physics. 2014. vol. 119. P. 7128-7141.
7. Shen F., Wu S. T., Feng X., Wu C.-C. Acceleration and deceleration of coronal mass ejections during propagation and interaction. JournalofGeophysicalResearch: Atmospheres. 2012. vol. 117. A11101.

**ОБ АВТОРАХ**

**Манкаева Галина Алексеевна**, старший преподаватель кафедры математики, информатики и методики преподавания, Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, г. Элиста, ул. Пушкина, 11, e-mail: mankaeva.galina@yandex.ru, phone number: +79061764200

**Mankaeva Galina Alekseevna**, Senior Lecturer, Department of Mathematics, Computer Science and Teaching Methods, Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov, Elista, Pushkin Street, 11, e-mail: mankaeva.galina@yandex.ru, phone number: +79061764200

**Джимбеева Людмила Нарановна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, г. Элиста, ул. Пушкина, 11, e-mail: dzjimbeeva\_ln@mail.ru, phone number: +79054843794.

**Dzhimbeeva Lyudmila Naranovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical Physics, Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov, Elista, Pushkin Street, 11, e-mail: dzjimbeeva\_ln@mail.ru, phone number: +79054843794

**Михаляев Бадма Борисович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики, Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, г. Элиста, ул. Пушкина, 11, e-mail: bbmikh@mail.ru, phone number: +79613967444

**Mikhalyaev Badma Borisovich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Theoretical Physics, Kalmyk State University named after B.B. Gorodovikov, Elista, Pushkin Street, 11, e-mail: bbmikh@mail.ru, phone number: + 79613967444

**Дертеев Сергей Бадмаевич**, ассистент кафедры теоретической физики, Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, г. Элиста, улица Пушкина, 11, e-mail: derteevsergei@mail.ru, phone number: +79613963655

**Derteev Sergey Badmaevich**, Assistant of the Department of Theoretical Physics, Kalmyk State University named after B. B. Gorodovikov, Elista, Pushkin Street, 11, e-mail: derteevsergei @ mail.ru, phone number: +79613963655

**Лагаев Иван Анатольевич**, студент 2 курса направления «Физика и астрономия», магистерская программа «Астрофизика. Физика космических излучений и космоса», Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, г. Элиста, улица Пушкина, 11, e-mail: lagaev96@mail.ru, phone number: +79275965556

**Lagaev Ivan Anatolyevich**, 2nd year student of the direction "Physics and Astronomy", master's program "Astrophysics. Physics of cosmic radiation and space ", Kalmyk State University named after B. B. Gorodovikov, Elista, Pushkin street, 11, e-mail: lagaev96@mail.ru, phone number: +79275965556

Дата поступления в редакцию: 01.01.2019 г.

После доработки: 23.04.2019 г.

Дата принятия к публикации: 22.05.2019 г.